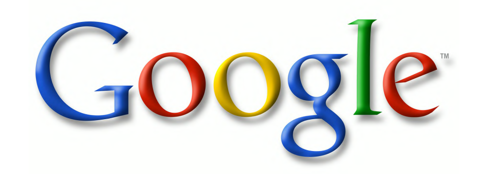
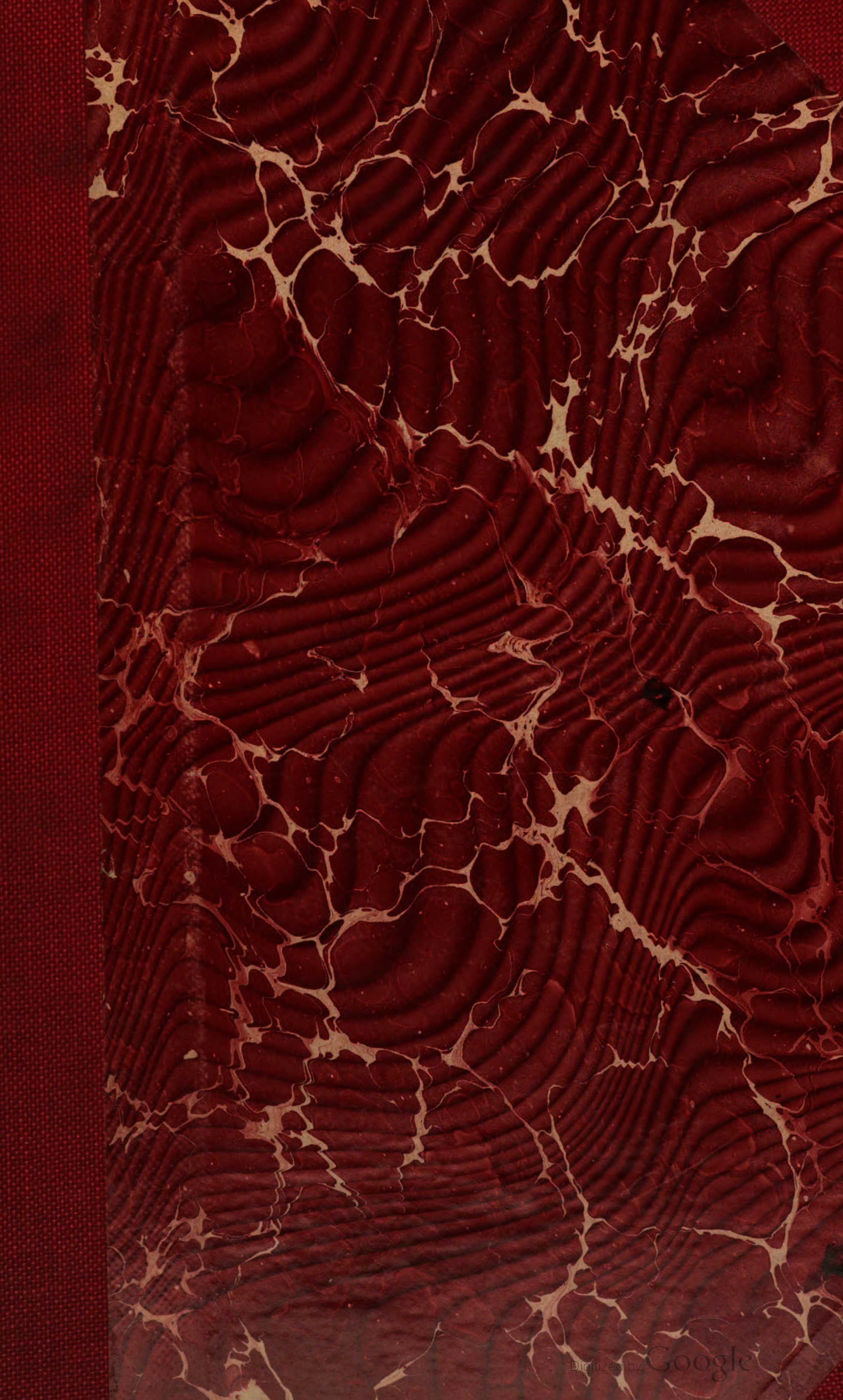




HARVARD UNIVERSITY.



LIBRARY

OF THE

MUSEUM OF COMPARATIVE ZOÖLOGY.

ABHANDLUNGEN

ZWANZIGSTER BAND.

ABHANDLUNGEN

DER KÖNIGLICH SÄCHSISCHEN

GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN.



ZWANZIGSTER BAND

MIT DREIZEHN TAFELN.

LEIPZIG

BEI S. HIRZEL.

1883.

ABHANDLUNGEN

DER MATHEMATISCH-PHYSISCHEN CLASSE

DER KÖNIGLICH SÄCHSISCHEN

GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN.



ZWÖLFTER BAND.

MIT DREIZEHN TAFELN.

LEIPZIG

BEI S. HIRZEL.

1883.

INHALT.

W. G. HANKEL,
MITGLIED DER KÖNIGL. SÄCHS. GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN.

ELEKTRISCHE UNTERSUCHUNGEN.

DREIZEHNTE ABHANDLUNG.

ÜBER DIE THERMOELEKTRISCHEN EIGENSCHAFTEN DES APATITS, BRUCITS, COELESTINS, PREHNITS, NATROLITHS, SKOLEZITS, DATOLITHS UND AXINITS.

Des XII. Bandes der Abhandlungen der mathematisch-physischen Classe der Königl. Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften

No I.

MIT DREI TAFELN.

LEIPZIG
BEI S. HIRZEL.
1878.

ABHANDLUNGEN

DER

KÖNIGL. SÄCHS. GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN

ZU LEIPZIG.

MATHEMATISCH-PHYSISCHE CLASSE.

ERSTER BAND. Mit 3 Tafeln. hoch 4. 1852. broch. Preis 13 ℳ 60 ₰.

A. F. MÖBIUS, Ueber die Grundformen der Linien der dritten Ordnung. 2 ℳ 40 ₰.

P. A. HANSEN, Auflösung eines beliebigen Systems von linearischen Gleichungen. — Ueber die Entwickelung der Grösse $(1-2\alpha H+\alpha\alpha)^{-\frac{1}{2}}$ nach den Potenzen von α. 1 ℳ 20 ₰.

A. SEEBECK, Ueber die Querschwingungen elastischer Stäbe. 1 ℳ.

C. F. NAUMANN, Ueber die cyclocentrische Conchospirale und über das Windungsgesetz von Planorbis Corneus. 1 ℳ.

W. WEBER, Elektrodynamische Maassbestimmungen (Widerstandsmessungen). 3 ℳ.

F. REICH, Neue Versuche mit der Drehwaage. 2 ℳ.

M. W. DROBISCH, Zusätze zum Florentiner Problem. 1 ℳ 60 ₰.

W. WEBER, Elektrodynamische Maassbestimmungen (Diamagnetismus). 2 ℳ.

ZWEITER BAND. Mit 19 Tafeln. hoch 4. 1855. br. Preis 20 ℳ.

M. W. DROBISCH, Ueber musikalische Tonbestimmung und Temperatur. 1852. 3 ℳ.

W. HOFMEISTER, Beiträge zur Kenntniss der Gefässkryptogamen. Mit 18 Tafeln. 1852. 4 ℳ.

P. A. HANSEN, Entwickelung des Products einer Potenz des Radius Vectors mit dem Sinus oder Cosinus eines Vielfachen der wahren Anomalie in Reihen, die nach den Sinussen oder Cosinussen der Vielfachen der wahren, excentrischen oder mittleren Anomalie fortschreiten. 1853. 3 ℳ.

——— Entwickelung der negativen und ungraden Potenzen der Quadratwurzel der Function $r^2+r'^2-2rr'(\cos U \cos U' + \sin U \sin U' \cos J)$. 1854. 3 ℳ.

O. SCHLÖMILCH, Ueber die Bestimmung der Massen und der Trägheitsmomente symmetrischer Rotationskörper von ungleichförmiger Dichtigkeit. 1854. 80 ₰.

——— Ueber einige allgemeine Reihenentwickelungen und deren Anwendung auf die elliptischen Functionen. 1854. 1 ℳ 60 ₰.

P. A. HANSEN, Die Theorie des Aequatoreals. 1855. 2 ℳ 40 ₰.

C. F. NAUMANN, Ueber die Rationalität der Tangenten-Verhältnisse tautozonaler Krystallflächen. 1855. 1 ℳ.

A. F. MÖBIUS, Die Theorie der Kreisverwandtschaft. 1855. 2 ℳ.

DRITTER BAND. Mit 15 Tafeln. hoch 4. 1857. br. Preis 19 ℳ 20 ₰.

M. W. DROBISCH, Nachträge zur Theorie der musik. Tonverhältnisse. 1855. 1 ℳ 20 ₰.

P. A. HANSEN, Auseinandersetzung einer zweckmässigen Methode zur Berechnung der absoluten Störungen der kleinen Planeten. 1856. 5 ℳ.

R. KOHLRAUSCH und W. WEBER, Elektrodynamische Maassbestimmungen insbesondere Zurückführung der Stromintensitäts-Messungen auf mechanisches Maass. 1856. 1 ℳ 60 ₰.

H. D'ARREST, Resultate aus Beobachtungen der Nebelflecken und Sternhaufen. Erste Reihe. 1856. 2 ℳ 40 ₰.

W. G. HANKEL, Elektrische Untersuchungen. Erste Abhandlung: Ueber die Messung der atmosphärischen Elektricität nach absolutem Maasse. Mit 2 Tafeln. 1856. 6 ℳ.

W. HOFMEISTER, Beiträge zur Kenntniss der Gefässkryptogamen. No. II. Mit 13 Tafeln. 1857. 4 ℳ.

VIERTER BAND. Mit 29 Tafeln. hoch 4. 1859. Preis 22 ℳ 50 ₰.

P. A. HANSEN, Auseinandersetzung einer zweckmässigen Methode zur Berechnung der absoluten Störungen der kleinen Planeten. Zweite Abhandlung. 1857. 4 ℳ.

W. G. HANKEL, Elektrische Untersuchungen. Zweite Abhandlung: Ueber die thermo-elektrischen Eigenschaften des Boracites. 1857. 2 ℳ 40 ₰.

——— Elektrische Untersuchungen. Dritte Abhandlung: Ueber Elektricitätserregung zwischen Metallen und erhitzten Salzen. 1858. 1 ℳ 60 ₰.

P. A. HANSEN, Theorie der Sonnenfinsternisse und verwandten Erscheinungen. Mit 2 Tafeln. 1858. 6 ℳ.

G. T. FECHNER, Ueber ein wichtiges psychophysisches Grundgesetz und dessen Beziehung zur Schätzung der Sterngrössen. 1858. 2 ℳ.

W. HOFMEISTER, Neue Beiträge zur Kenntniss der Embryobildung der Phanerogamen. I. Dikotyledonen mit ursprünglich einzelligem, nur durch Zellentheilung wachsenden Endosperm. Mit 27 Tafeln. 1859. 8 ℳ.

ELEKTRISCHE UNTERSUCHUNGEN.

DREIZEHNTE ABHANDLUNG.

ÜBER DIE THERMOELEKTRISCHEN EIGENSCHAFTEN DES APATITS, BRUCITS, COELESTINS, PREHNITS, NATROLITHS, SKOLEZITS, DATOLITHS UND AXINITS.

VON

W. G. HANKEL

MITGLIED DER KÖNIGL. SÄCHS. GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN.

Des XII. Bandes der Abhandlungen der mathematisch-physischen Classe der Königl. Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften

Nº I.

MIT DREI TAFELN.

LEIPZIG

BEI S. HIRZEL.

1878.

Vom Verfasser übergeben den 20. Mai 1878.
Der Abdruck vollendet den 13. Juni 1878.

ELEKTRISCHE UNTERSUCHUNGEN

VON

W. G. HANKEL.

DREIZEHNTE ABHANDLUNG.

ÜBER DIE THERMOELEKTRISCHEN EIGENSCHAFTEN DES APATITS, BRUCITS, COELESTINS, PREHNITS, NATROLITHS, SKOLEZITS, DATOLITHS UND AXINITS.

MIT DREI TAFELN.

Apatit.

In der zweiten Auflage seines Systems der Mineralogie bemerkt Jameson*), dass die Krystalle des Apatits thermoelektrisch werden. Hauy**) gedenkt dieses Ausspruchs in einer Anmerkung und setzt hinzu, dass er beim Apatit trotz aller seiner Bemühungen nicht die geringste Spur von Elektricität zu entwickeln vermocht habe. Brewster***) führt in seinem 1824 aufgestellten Verzeichnisse der thermoelektrischen Mineralien den Apatit nicht auf; wohl ein Beweis, dass es auch ihm nicht gelungen war, elektrische Spannungen auf der Oberfläche der erkaltenden Apatite wahrzunehmen.

Meine im Folgenden mitgetheilten Beobachtungen werden nun darthun, dass die Krystalle des Apatits in der That thermoelektrisch sind, dass aber ebenso wie bei den übrigen thermoelektrischen Mineralien die Intensität der auftretenden elektrischen Spannungen je nach dem Fundorte und der Beschaffenheit der Krystalle sehr verschieden ist. Während viele Apatite nur eine sehr geringe elektrische Erregung zeigen, giebt es andere, bei welchen dieselbe eine ziemliche Stärke erreicht, und endlich noch andere, welche in ihren elektrischen Spannungen den Turmalinen und Topasen gleichkommen. Es wäre daher allerdings nicht absolut unmöglich, dass Jameson eine wirklich thermoelektrische Erregung auf einem Apatite beobachtet hätte; indess ist bei dem damaligen Zustande der zur Wahrnehmung der Elektricität üblichen Vorrichtungen eine solche Beobachtung höchst unwahrscheinlich.

Der Apatit besteht aus drittelphosphorsaurem Kalk mit Fluorcalcium, wobei aber ein Theil des Fluors durch Chlor vertreten sein kann.

---

*) Bd. 2, S. 211.

**) *Traité de minéral.*; 2. Aufl. 1822, Bd. 1, S. 505.

***) *The Edinb. Journ. of Science*, conducted by David Brewster. 1824. Heft 2; übersetzt im *Jahrbuch der Chemie u. Phys.* von Schweigger, 1825. Bd. 43, S. 87.

Die Krystalle desselben gehören zum hexagonalen Systeme, und scheinen je nach der in ihnen vorhandenen Menge Chlor etwas verschiedene Winkel zu besitzen, dergestalt dass mit der Zunahme des Chlorgehaltes der Polkantenwinkel stumpfer und also die Hauptaxe kleiner wird. Die Winkel zwischen einer Fläche von P und 0P beträgt nach G. Rose bei den Krystallen von Ehrenfriedersdorf 139° 42′.

Die an den Apatiten beobachteten Gestalten sind: $\frac{1}{2}$P, P, $\frac{3}{2}$P, 2P, 3P; P2, 2P2, 4P2; 3P$\frac{3}{2}$, 2P$\frac{4}{3}$, 4P$\frac{4}{3}$; ∞P, ∞P2; ∞P$\frac{3}{2}$, ∞P$\frac{5}{4}$; und 0P. Jedoch kommen, wie zuerst Haidinger 1824 an den Krystallen vom St. Gotthardt nachgewiesen, die dihexagonalen Pyramiden und Prismen 3P$\frac{3}{2}$, 2P$\frac{4}{3}$, 4P$\frac{4}{3}$, ∞P$\frac{3}{2}$ und ∞P$\frac{5}{4}$ gewöhnlich nur mit der Hälfte ihrer Flächen vor, so dass die dihexagonalen Pyramiden als hexagonale Pyramiden dritter Art und die dihexagonalen Prismen als hexagonale Prismen der dritten Art erscheinen*).

Am Wildkreuzjoche finden sich übrigens die dihexagonalen Pyramiden nicht hemiedrisch, sondern vollzählig, und ebenso sind dieselben, sowie auch die Prismen ∞P$\frac{3}{2}$ an Krystallen von Pfitsch aus dem Sulzbachthale und von Schlaggenwald vollzählig beobachtet.

Nach Baumhauer**) entstehen auf den Flächen des Prismas ∞P beim Anätzen in Bezug auf rechts und links unsymmetrische Aetzfiguren, weshalb man dieselben als die eine Hälfte der Flächen eines zwölfseitigen Prismas ∞Pn, bei welchen $n = 1$ geworden ist, auffassen kann.

Die Krystalle des Apatites sind, wenn auch nicht sehr vollkommen, spaltbar nach den Flächen 0P und ∞P.

Werden Bruchstücke von Apatit erhitzt, so phosphoresciren sie mit grüner Farbe; bei stärkerem Erhitzen verschwindet dieser Lichtschein, und lässt sich dann nicht wieder hervorrufen. Hauy bemerkt darüber, dass das Pulver von Krystallen, welche die Flächen 0P tragen (mit Ausnahme einer dunkelgrünen Varietät aus Grönland) leuchtet, dass dage-

*) Quenstedt bemerkt in seinem *Handbuche der Mineralogie*, dass die Flächen der Prismen dritter Art die von den Flächen ∞P und ∞P2 gebildeten verticalen Kanten nur auf der Seite abstumpfen, auf welcher die Flächen der Pyramiden der dritten Art nicht auftreten; dagegen bildet v. Kokscharow in seinen *Materialien zur Mineralogie Russlands* Taf. 19, Fig. 9 und 13, sowie Taf. 20, Fig. 17 an den aus der Kupfergrube Kiräbinsk stammenden Krystallen die Flächen der Prismen und Pyramiden auf einer und derselben Seite der zuvor genannten verticalen Kante ab.

**) Sitzungsberichte der math.-physik. Classe der k. b. Akad. der Wiss. zu München. 1875. S. 169.

gen die in einer Spitze endigenden Krystalle die Erscheinung nicht zeigen *).

Die derben und fasrigen Massen von Logrosan unweit Truxillo in Spanien, welche Werner mit dem Namen Phosphorit bezeichnete, phosphoresciren beim Erhitzen sehr stark. Nach Hauy finden sich in dem Innern derselben kurze sechsseitige Prismen, welche durch eine auf die Axe senkrechte Fläche begrenzt sind; und Quenstedt bemerkt in seinem *Handbuche der Mineralogie:* „Es herrscht darin (im Phosphorit) deutlich ein blätteriger Bruch und auf der Oberfläche krystallisiren (scheinbar) sechsseitige Tafeln aus, welche wie beim schaligen Schwerspath auf der schmalen Kante stehen.“

Thermoelektrisches Verhalten der Apatitkrystalle.

Bei meinen früheren Untersuchungen der optisch einaxigen, also der zum tetragonalen und zum hexagonalen Systeme gehörigen Krystalle in Bezug auf ihr thermoelektrisches Verhalten habe ich wiederholt die Beobachtung gemacht, dass die Krystalle der einzelnen Mineralien sich in zwei Abtheilungen scheiden, welche dadurch charakterisirt sind, dass sie an den Enden der gleichnamigen Axen die entgegengesetzten Polaritäten zeigen.

Zuerst trat mir diese Erscheinung entgegen am Kalkspathe. Bei den Schneeberger Krystallen von der Form ∞R und $-\frac{1}{2}R$ **) sind beim Erkalten ***) die Flächen des Rhomboeders $-\frac{1}{2}R$, also die Enden der Hauptaxe positiv, die prismatischen Seitenflächen ∞R aber negativ. Dagegen zeigen die skalenoedrischen Krystalle aus Derbyshire, welche vorzugsweise von den Flächen des Skalenoeders $R3$ begrenzt werden, zu welchen an den von mir untersuchten Krystallen bisweilen noch die

*) Hauy stellt (*Traité de minér.* II édit. T. I. S. 488) noch einen weiteren Unterschied auf: Les cristaux terminés en pointe offrent quelquefois une cassure conchoidale; mais elle n'a lieu que dans certaines parties et le niveau parfait accompagné d'un vif éclat reparait dans d'autres parties, où il indique très sensiblement les positions des joints naturels. Les cristaux terminés par un plan perpendiculaire à l'axe ont leur tissu plus uniforme; mais leurs joints naturels, quoique bien apparens, ont moins d'éclat et s'obtiennent moins facilement.

**) Diese Abhandlungen Bd. 18, S. 203.

***) Ebenso wie in den früheren Abhandlungen gebe ich, der einfacheren Darstellung wegen, im Texte und in den Abbildungen stets nur die beim Erkalten auftretenden Elektricitäten an; bei steigender Temperatur sind sie die entgegengesetzten.



Flächen des verticalen Prismas ∞R, sowie in einzelnen Fällen die Flächen des Rhomboeders R und — 2R hinzutreten, eine gerade entgegengesetzte Vertheilung der elektrischen Polaritäten: auf den Theilen der Skalenoederflächen, welche die Enden der Hauptaxe umgeben, findet sich negative Elektricität, während auf den um die skalenoedrisch verlaufenden Seitenkanten liegenden Theilen, sowie auf den Flächen ∞R die positive erscheint.

Ich habe damals hervorgehoben, dass diese Unterschiede zwischen den Schneeberger und Derbyshirer Krystallen mit Verschiedenheiten in ihrer Form verbunden seien: bei den Schneeberger Krystallen ist die Hauptaxe kürzer, bei den Derbyshirer verhältnissmässig länger; bei den Schneeberger Kalkspäthen bilden stumpfe Rhomboeder (—½R), bei den Derbyshirer spitze Skalenoeder (R3) die Begrenzung an den Enden der Hauptaxe; bei den ersteren haben die Rhomboeder (— ½R) eine um 60° gegen die Grundgestalt R gedrehte Stellung, während die bei den Derbyshirer Krystallen auftretenden Skalenoeder in ihrer Stellung dem Grundrhomboeder entsprechen.

Eine ebensolche Umkehrung in der elektrischen Polarität habe ich sodann bei den Beryllen von Elba beobachtet. Bei den russischen Beryllen sind die Endflächen positiv, die Seitenflächen im Allgemeinen negativ. Eben dieses Verhalten zeigen die meisten Krystalle von Elba, doch kommen auf dieser Insel auch einzelne, den soeben genannten an Gestalt und Oberflächenbildung gleichende Individuen vor, bei welchen die Endflächen negative und die Seitenflächen positive Polarität besitzen*).

Auch unter den Idokrasen von Ala giebt es Krystalle mit umgekehrten Polaritäten. Während bei einem Theile derselben die Endfläche, wie bei den Wiluiten, positiv ist, erscheint sie bei anderen negativ**).

Wahrscheinlich findet sich bei den Apophylliten derselbe Gegensatz; wenigstens deuten die Beobachtungen an einem aus dem Fassathale stammenden Bruchstücke auf einen solchen hin***).

Zuletzt möge noch erwähnt werden, dass auch beim Turmalin dieselbe Erscheinung und hier sogar als eine Umkehrung in der Polarität

*) Diese Abh. Bd. 18, S. 235.

**) Diese Abh. Bd. 18, S. 257.

***) Diese Abh. Bd. 18, S. 276 und Taf. III, Fig. 22.

der an ihren Enden mit entgegengesetzten Polen versehenen Hauptaxe, auftritt.

Nach G. Rose*) ist beim Turmalin gewöhnlich das Ende, an welchem die Flächen des Hauptrhomboeders auf die Kanten des gewöhnlichen dreiseitigen Prismas aufgesetzt erscheinen, das positive; das andere, wo jene Flächen auf die Flächen dieses Prismas aufgesetzt sind, das negative. Jedoch kommen auch Krystalle vor, bei welchen diese Regel nicht zutrifft, sondern die Polarität gerade die entgegengesetzte ist. G. Rose glaubte anfangs, das an diesen letzten Krystallen auftretende Rhomboeder nicht als das Grundrhomboeder, sondern als sein Gegenrhomboeder betrachten zu dürfen, um ihre elektrische Vertheilung wieder mit der obigen Regel in Einklang zu bringen. Später, in seiner mit Riess veröffentlichten Abhandlung**) neigt er sich mehr zu der Ansicht, an diesen von der obigen Regel abweichenden Krystallen sei das dreiseitige Prisma nicht als das gewöhnliche, sondern als das ungewöhnliche (jenes erste zu einem sechsseitigen Prisma ergänzende) aufzufassen.

Ob an dem weiterhin in dieser Abhandlung angeführten Brucit, welcher dem hexagonalen Systeme angehört, auch solche Umkehrungen vorkommen, habe ich aus Mangel an Krystallen nicht feststellen können.

In gleicher Weise, wie bei den vorher genannten Mineralien, existiren nun auch beim Apatit zwei einander gerade entgegengesetzte elektrische Vertheilungen. Bei den meisten Krystallen sind die Endflächen 0 P positiv, und die Seitenflächen im Allgemeinen negativ; bei anderen dagegen liegen die Polaritäten umgekehrt vertheilt, die Endflächen sind negativ, die Prismenflächen positiv.

Soweit also bis jetzt die Beobachtungen reichen, tritt die Umkehrung der Polaritäten fast an allen von mir untersuchten Mineralien des tetragonalen und hexagonalen Systems ein. Ich unterlasse aber gegenwärtig ein weiteres Eingehen auf den Grund dieser Umkehrungen, da in einer späteren Abhandlung die Beobachtungen der elektrischen Vorgänge auf den ebenfalls zum hexagonalen Systeme gehörenden Krystallen des unterschwefelsauren Kalis Veranlassung geben werden, auf diese eigenthümlichen Erscheinungen zurückzukommen.

---

*) Abh. der Berl. Akad. der Wiss. 1836, S. 215.

**) Abh. der Berl. Akad. der Wiss. 1843, S. 70.

A. Krystalle mit positiven Endflächen und im Allgemeinen negativen Seitenflächen.

I. Krystall aus den Smaragdgruben am Ural.

Ueber dieses Vorkommen bemerkt von Kokscharow*): „Hier (in den Smaragdgruben am Flusse Tokowaia, 85 Werst nordöstlich von Katharinenburg) findet man den schön krystallisirten Apatit im Glimmerschiefer eingewachsen, in Begleitung von Smaragd, Phenakit, Chrysoberyll und anderen hier vorkommenden Mineralien. Die Krystalle dieses Apatites sind ziemlich gross und fast immer lang. Ihre Farbe ist gelblichweiss, grünlichgelb und auch ganz weiss. Grösstentheils sind sie sehr rissig, durchscheinend und nur an einigen Stellen durchsichtig. Farblose und ganz durchsichtige Krystalle sind äusserst selten. Gewöhnlich bieten sie das Ansehen des hexagonalen Prismas ∞P dar, an dessen einem oder an dessen beiden Enden sich die Flächen P, 2P, P2 und 2P2 und 0P von verschiedener Ausbildung finden. Nicht selten begegnet man den Flächen $\infty P2$ und der Hälfte von $\infty P\frac{3}{2}$."

Krystall No. 1. Taf. I, Fig 1.

Der einzige, durch meinen Collegen Herrn Prof. Zirkel mir zur Verfügung gestellte, dem hiesigen mineralogischen Museum gehörige und Taf. I, Fig. 1 in seinem Netze abgebildete Krystall des oben bezeichneten Fundortes stellt eine Combination von ∞P, $\infty P2$, 0P, P und 2P dar. Die Flächen ∞P sind vorhanden bis auf die Fläche 6, jedoch die Flächen 4 und 5 nur unvollkommen, während die Fläche 6 in dem mangelhaft ausgebildeten Theile dieses Krystalles nicht wahrzunehmen ist. Die Flächen 1 und namentlich 2 sind viel schmäler als die Fläche 3. In der Fig. 1, Taf. I sind die einzelnen Flächen getrennt neben einander gezeichnet und mit ihren krystallographischen Symbolen versehen. Von den Flächen des Prismas $\infty P2$ sind die Flächen VI, I und II**) vollkommen ausgebildet, während die Flächen III, IV und V fehlen. Die Flächen des Prismas ∞P zeigen stärkeren Glanz als die Flächen des Prismas

*) *Materialien zur Mineralogie Russlands* Bd. 2, S. 47.

**) Behufs leichterer Unterscheidung in der Zeichnung sind die Flächen des Prismas ∞P mit 1, 2, 3, 4, 5, die Flächen des Prismas $\infty P2$ mit den Zeichen I, II und VI bezeichnet. Eben diese Bezeichnung ist auch bei den folgenden Krystallen beibehalten.

∞P2. Von den Pyramiden P und P2 sind nur die oberhalb der Prismenfläche 1 liegenden deutlich vorhanden. Am oberen Ende wird der Krystall durch eine sehr glatte Fläche 0P begrenzt; auch das untere Ende trägt eben diese Fläche 0P, nur in mangelhafter Ausbildung.

Die Masse des Krystalles ist in dem vollkommen ausgebildeten Theile ziemlich durchsichtig; dagegen in dem mangelhaft ausgebildeten, wo die Flächen 4 und 5 liegen, undurchsichtig. Seine Farbe ist theils graulich, theils graugrünlich.

Die elektrische Vertheilung auf der Oberfläche dieses Krystalles ist im Allgemeinen sehr einfach: die beiden Endflächen 0P sind beim Erkalten positiv, die prismatischen Seitenflächen negativ. Der Apatit gleicht darin also den früher behandelten einaxigen Krystallen des Berylles, des Kalkspathes, des Idokrases (Vesuvians) und des Apophyllites*). Die negative Spannung auf den gut ausgebildeten und eine reinere Masse einschliessenden Prismenflächen ist grösser als auf den mangelhaft ausgebildeten und eine unreinere Masse bedeckenden. Im Ganzen nimmt die Durchsichtigkeit und Reinheit der Masse von oben nach unten ab, und dem entsprechend werden auch die elektrischen Spannungen in derselben Richtung geringer.

Auf dem nächstfolgenden Krystalle No. 2 tritt in der Vertheilung der negativen Elektricität auf den Flächen der beiden Prismen ∞P und ∞P2 eine Eigenthümlichkeit stark hervor: auf den Prismenflächen ∞P wächst die negative Spannung in der Richtung vom linken Rande zum rechten in beträchtlichem Grade und nimmt dann auf der anliegenden Fläche ∞P2 in derselben Richtung, also auch vom linken Rande nach dem rechten hin ab. Auch auf dem vorliegenden Krystalle No. 1 findet sich auf der Fläche 1 des Prismas ∞P und den Flächen I und II des Prismas ∞P2, wenn auch in geringerem Grade, ein solches Verhalten. Die Fläche 2 des Prismas ∞P ist zu schmal, um einen Unterschied in der elektrischen Spannung auf den beiden Rändern nachweisen zu können. Auf der Fläche 3 erscheint am linken Rande in der Mitte und unten die elektrische Spannung grösser als auf den übrigen Theilen der Fläche; da dieselbe aber in den oberen Theilen nicht auftritt, wo sie auf den übrigen Flächen am stärksten ist, so dürfte die schwache Intensität am rechten Rande durch den besonderen Umstand,

*) Diese Abh. Bd. 18, S. 201.



dass die Masse des Krystalles gegen die Fläche 4 hin undurchsichtig zu werden beginnt, veranlasst worden sein; was auch dadurch wahrscheinlich gemacht wird, dass die Fläche 4 und ebenso 5 nur sehr geringe Spannungen zeigen.

II. Krystalle von Ehrenfriedersdorf in Sachsen.

Krystall No. 2. Taf. I, Fig. 2.

Der sehr durchsichtige, aber von mehrfachen Rissen durchsetzte und einzelne sehr kleine grauliche Massen enthaltende Krystall No. 2, dessen Benutzung ich der Güte des Herrn Professor Weisbach verdanke, gehört der Freiberger Sammlung und stellt eine Combination der Gestalten 0 P, ∞P, ∞P2, $\frac{1}{2}$ P, P2, und 2P2 dar. Ausserdem sind noch die Flächen eines sechsseitigen Prisma dritter Art vorhanden, welche bei der in Fig. 2, Taf. I gewählten Stellung am linken Rande der Flächen des Prismas ∞P liegen; die streifige Beschaffenheit dieser Prismenflächen lässt eine genauere Bestimmung nicht wohl zu.

Fig. 2, Taf. I stellt das Netz dieses Krystalles in natürlicher Grösse dar; jedoch sind, um die auf den nur niedrigen Seitenflächen ausgeführten Messungen in dasselbe bequemer eintragen zu können, die einzelnen Flächen getrennt von einander gezeichnet worden. Auf der unteren Seite ist der Krystall von einer ziemlich ebenen, mit 0 P parallelen Durchgangsfläche begrenzt.

Vollständig ausgebildet sind von den Prismenflächen ∞P nur die Flächen 1, 2, 5 und 6. An die Stelle der Fläche 3 und ebenso der Fläche 4 ist ein Bruch getreten; jedoch haben die Krystallflächen sehr nahe über den beiden Bruchflächen gelegen, weil am oberen Rande beider Bruchflächen sich noch Reste der Pyramidenflächen $\frac{1}{2}$ P finden; auch scheint am rechten Rande des Bruches 4 bei *a* bereits ein Theil der Krystallfläche 4 wieder sichtbar zu werden. Von den Flächen des Prismas ∞P2 sind nur die Flächen I, V und VI vorhanden.

Der Krystall stimmt in Betreff seiner elektrischen Vertheilung im Allgemeinen mit dem vorhergehenden überein: die beiden gegen die Axe senkrechten Flächen (die obere Fläche 0P und die auf der unteren Seite vorhandene mit 0P parallele Durchgangsfläche) sind positiv, die seitlichen Prismenflächen negativ. Auf die untere Durchgangsfläche greift an einer Stelle die negative der Seitenflächen etwas hinüber.

Eigenthümlich gestaltet sich, wie schon bei dem vorhergehenden Krystalle hervorgehoben wurde, die Vertheilung der negativen Elektricität auf den prismatischen Seitenflächen. Auf allen ausgebildeten Flächen des Prismas ∞P, also auf 1, 2, 5 und 6, nimmt die Intensität sehr entschieden in der Richtung von links nach rechts hin zu; dagegen auf den ausgebildeten Flächen des Prismas ∞P2, also auf I, V und VI, in eben dieser Richtung ab, so dass das Maximum der elektrischen Spannung auf die in Bezug auf die Flächen ∞P rechts liegenden Durchschnittskanten von ∞P und ∞P2, das Minimum aber auf die in Bezug auf ∞P links liegenden Durchschnittskanten von ∞P und ∞P2 fällt. Jedenfalls hängt diese eigenthümliche Lage des Maximums und Minimums mit den Prismen dritter Art zusammen; das Minimum liegt nämlich an denjenigen Durchschnittskanten von ∞P und ∞P2, welche durch das Prisma dritter Art abgestumpft werden.

Auffallend ist das Auftreten von positiver Elektricität auf dem rechten Rande der Bruchfläche 4 (bei α), obwohl daselbst ein Rest der Krystallfläche 4 zu liegen scheint; dieselbe ist wahrscheinlich durch den benachbarten Bruch oder die daselbst vorhanden gewesene Anwachsung hervorgerufen.

Die Pyramidenflächen ½P sind entweder ganz negativ, oder nur in ihren unteren an ∞P grenzenden Theilen negativ, in den oberen der Fläche 0P benachbarten Theilen aber positiv, wobei jedoch bisweilen auf dem rechts liegenden Ende die negative Polarität bis zur Kante von ½P und 0P geht.

Die elektrische Erregung dieses Krystalles zeigt eine ziemlich starke Intensität.

Krystall No. 3. Taf. I, Fig. 3.

Der Krystall No. 3 gehört gleichfalls der Freiberger Sammlung. Seine Masse ist ziemlich durchsichtig, aber rissig; ihre Farbe hat einen violetten Schein. Der Krystall ist nur an den beiden Enden seiner Hauptaxe und auf einem Theile seiner seitlichen Begrenzung mit Krystallflächen versehen. Fig. 3, Taf. I stellt das Netz desselben, soweit dies möglich, in natürlicher Grösse dar. Wie die Abbildung der oberen Endfläche zeigt, ist der Krystall ein Aggregat von mehreren in paralleler Stellung verwachsenen Individuen. Von Krystallgestalten treten auf 0P, ½P, 2P2, ∞P, ∞P2 und eine matte Fläche eines hexagonalen Prismas dritter Art bei α, deren Lage eben ihrer matten Beschaffenheit

wegen sich nicht wohl bestimmen lässt. Dagegen erscheinen auf dem links liegenden kleineren Krystall bei α' die beiden Flächen eines zwölfseitigen Prismas, wenn auch die eine nur sehr schmal. Die Flächen $\infty P2$ zeigen weniger Glanz als die Flächen ∞P und die bei α auftretende Fläche des Prismas dritter Art erscheint sogar matt Die Fläche $\beta\gamma$ ist eine ziemlich ebene mit den Krystallflächen 3 und 6 parallele Durchgangsfläche, entspricht also der Krystallfläche 3, während das unter $\gamma\delta$ gezeichnete Stück der seitlichen Begrenzung theils von Durchgängen entsprechend den Krystallflächen 4 und 5, theils (am unteren Ende) von Resten von Krystallflächen gebildet wird. Zwischen a, b, c, d liegen kleinere Massen von Braunspath und Arsenikkies.

Die beiden Endflächen 0 P sind positiv elektrisch, die seitlichen Krystallflächen negativ mit Ausnahme des oberen Theiles der Fläche I des Prismas $\infty P2$, welche schwach positiv ist. Ob letztere dieser Stelle überhaupt angehört, oder nicht vielmehr durch den Einfluss der anliegenden positiven Durchgangsfläche $\beta\gamma$ hervorgerufen ist, lässt sich an dem vorliegenden Bruchstücke nicht entscheiden; ebensowenig ist es möglich, ein Wachsen oder Abnehmen der elektrischen Spannung in der Richtung von links nach rechts zu erkennen. Die grosse, ziemlich ebene, den Flächen 3 und 6 parallele Durchgangsfläche $\beta\gamma$ ist positiv, ebenso auch die oberen von den mit den Flächen 4 und 5 parallelen Durchgängen gebildeten Flächenstücke von $\gamma\delta$, während die unteren Theile von $\gamma\delta$, welche theils Bruch-, theils kleine Krystallflächen sind, negativ erscheinen.

Krystall No. 4. Taf. I, Fig. 4.

Das Herrn Chemiker Sachsse in Leipzig gehörige Krystallbruchstück gleicht dem vorhergehenden, nur ist seine Masse etwas weniger durchsichtig. Fig. 4, Taf. I bildet das Netz desselben ab. Am oberen Ende trägt es eine gut ausgebildete Fläche 0 P, am unteren scheint die Begrenzung kein Bruch, sondern eine sehr mangelhaft ausgebildete Endfläche zu sein. Die seitlichen Begrenzungen werden von den Resten zweier Krystallflächen ∞P und von einer Fläche $\infty P2$, ausserdem aber von den mit den Flächen ∞P parallelen Durchgängen gebildet. Die vorhandenen Prismenflächen 1 von ∞P und I von $\infty P2$ sind stark gestreift und es rührt diese Streifung von einer oscillatorischen Combination der beiden genannten Flächen mit den Flächen zweier sechssei-

tigen Prismen dritter Art her. Pyramidenflächen sind nicht zu erkennen; die Flächen ∞P und ∞P2 lassen sich aber durch ihren Glanz und durch die Lage der Durchgänge unterscheiden.

Das obere und untere Ende zeigen positive, die seitlichen Krystallflächen aber negative Spannung. Auf den seitlichen Bruchflächen findet sich theils negative, theils positive Elektricität. Auf den Flächen 1 und I nimmt die negative Spannung nach der von ihnen gebildeten Kante hin zu.

Krystall No. 5, Taf. I, Fig. 5.

Der dem hiesigen Museum gehörige Krystall sass zur Hälfte im Gestein und wurde in diesem Zustande untersucht. Dicht neben ihm lagen noch andere gleichgestaltete Apatitkrystalle. Fig. 5, Taf. I stellt die Abbildung der freien Flächen und Flächenstücke des grösseren, am besten ausgebildeten Krystalles dar. Die Masse ist grünlich und wenig durchsichtig. Von Krystallformen finden sich an ihm nur 0P, ∞P und ∞P2.

Die Endflächen 0P sind positiv, die freien Seitenflächen negativ elektrisch. Ebenso verhalten sich die entsprechenden freien Flächen der übrigen anliegenden Krystalle. Ein Unterschied in der Intensität der negativen Elektricität auf dem rechten und linken Rande tritt nicht hervor.

Krystall No. 6. Taf. I, Fig. 6.

Das kleine, Fig. 6, Taf. I in natürlicher Grösse abgebildete und der Freiberger Sammlung gehörige Stück wird wahrscheinlich überall von Durchgängen begrenzt. Es bildet ein niedriges sechsseitiges Prisma. Die grauweise Masse desselben erscheint etwas unrein.

Die obere Fläche 0P entwickelt positive, die untere negative Elektricität; eben diese letztere findet sich auch vorzugsweise auf den Seitenflächen, unter denen nur die rechte Seite der Durchgangsfläche 2 positive Spannung zeigt; die Fläche 5 ist nur sehr schwach elektrisch.

III. Krystalle von Sulzbach in Tyrol.

Krystall No. 7. Taf. I, Fig. 7.

Der kleine Apatitkrystall No. 7 ist vollständig durchsichtig und etwas gelblich von Farbe. Er wird seitlich begrenzt von den Flächen

des Prismas ∞P und zwei sehr schmalen Flächen $\infty P2$, oben von den Flächen der Pyramide P und am unteren Ende von einer unregelmässigen Bruchfläche *b*. Von dem Prisma ∞P sind die Flächen 2 und 3 vollständig, 1 und 6 zum grössten und 5 nur zum kleinsten Theile vorhanden, während an Stelle der Fläche 4 ein Bruch getreten ist. Die Fläche 2 ist sehr schmal, wie aus Fig. 7, Taf. I hervorgeht, welche das Netz in doppelt linearer Vergrösserung*) darstellt. Von dem Prisma $\infty P2$ sind allein die Flächen I, II und V in geringer Breite sichtbar. Unter den Pyramidenflächen P zeichnen sich die Flächen 2 und 3 durch ihre Grösse aus.

Die elektrische Erregung tritt in ziemlicher Stärke auf und gleicht der bisher beschriebenen. An den Enden der Hauptaxe liegen die positiven Pole, während die negative Polarität auf den prismatischen Seitenflächen vertheilt ist. Ein Unterschied in der Intensität des rechten und linken Randes der Prismenflächen ∞P liess sich nicht nachweisen.

IV. Krystalle vom St. Gotthardt.

Krystall No. 8. Taf. I, Fig. 8.

Der dem Museum der hiesigen Universität gehörige Krystall No. 8 ist nur auf seiner oberen Fläche $0P$ und drei Flächen des Prisma ∞P frei. Von der Fläche 3 des Prisma ∞P und von der unteren Endfläche sind nur kleine Theile sichtbar, während der Rest derselben, sowie die Prismenflächen 4 und 5 von einer kleinen Gesteinsmasse bedeckt werden. Fig. 8, Taf. I stellt die freien Theile der Oberfläche in doppelt linearer Vergrösserung dar.

Die an sich farblose und klare Masse des Krystalles enthält undurchsichtige Nadeln oder Fasern eingesprengt. Die Seitenflächen desselben werden nur von den Flächen des Prismas ∞P gebildet. An den von $0P$ und ∞P gebildeten Kanten finden sich die Flächen der Pyramiden $\frac{1}{4}P$ und P, sowie an den Enden der Prismenkanten die Flächen der Pyramide $2P2$ und rechts daneben die Flächen der beiden Pyramiden dritter Art $\frac{3P\frac{3}{2}}{2}$ und $\frac{4P\frac{4}{3}}{2}$.

*) Auf den Tafeln wird stets durch das Zeichen $\frac{1}{1}$ angedeutet, dass die Abbildung in natürlicher Grösse gezeichnet ist; dagegen durch das Zeichen $\frac{2}{1}$, dass alle linearen Dimensionen doppelt, und durch das Zeichen $\frac{1}{2}$, dass sie halb so gross genommen sind.



Die elektrische Vertheilung stimmt mit der auf den vorhergehenden Krystallen beobachteten überein; die Endfläche 0 P ist positiv, die Seitenflächen 6, 1 und 2 negativ, und zwar nimmt bei der gewählten Stellung die negative Spannung von dem linken Rande nach dem rechten hin zu; sie ist also an demjenigen Rande, an welchem oben und unten die Pyramidenflächen dritter Art auftreten, am geringsten; ja auf der Fläche 1 scheint am linken Rande (da wo in der Zeichnung 0 steht) sogar eine schwache positive Polarität aufzutreten.

Die elektrische Erregung dieses Krystalles ist übrigens nur schwach.

Krystall No. 9. Taf. I, Fig. 9.

Das ebenfalls der hiesigen Universitätssammlung gehörige, sehr kleine, Fig. 9, Taf. I in doppelt linearer Vergrösserung dargestellte Bruchstück ist vollkommen klar und durchsichtig, und trägt dieselben Krystallgestalten wie No. 8. Von den Prismenflächen ∞ P sind nur vorhanden die Flächen 6, 1 und ein Theil von 2; die übrigen Flächen sind durch einen unregelmässigen Bruch ersetzt. Bei der gezeichneten Stellung liegen die Flächen der Pyramide $\frac{3 P \frac{3}{2}}{2}$ und $\frac{4 P \frac{4}{3}}{2}$ ebenfalls am linken Rande der Prismenflächen ∞ P.

Von den Seitenflächen erscheint nur die Fläche 6 und der rechte Rand der Bruchfläche sehr schwach negativ; auf den Flächen 1 und 2, besonders aber auf der Bruchfläche, und zwar auf deren linkem Rande und der Mitte, tritt positive Spannung auf.

V. Krystall aus Norwegen.

Krystall No. 10. Taf. I, Fig. 10.

Das kleine Fragment, welches Fig. 10, Taf. I in doppelt linearer Vergrösserung in seinem Netze dargestellt ist, hatte ich von dem Gestein, an welchem es sich als einzelner Krystall befand, abgebrochen. Die Masse ist kaum durchscheinend und schmutzig grün. Es wird seitlich von den Prismenflächen ∞ P und ∞ P 2, oben und unten aber von zwei gut ausgebildeten Flächen 0 P begrenzt. Auf jeder der beiden Endflächen liegt eine ungefähr 0,5^{mm} dicke Schicht von einer mehr graulichen Masse, die auf den Seitenflächen sich scharf von der übrigen Masse abhebt. Von den Flächen des Prismas ∞ P sind vollständig vorhanden die Flächen 1 und 2, von den Flächen 3 und 6 erscheinen nur sehr geringe Reste, während an die Stelle der Fläche 4 eine mit ihr parallele

ebene Durchgangsfläche, an die Stelle der Fläche 5 aber ein sehr unregelmässiger Bruch getreten ist, auf welchem ein Rest einer quarzartigen Masse liegt. Von den Flächen des Prismas $\infty P 2$ sind nur die Flächen I, II und VI sichtbar.

Die elektrische Vertheilung bietet ein ganz besonderes Interesse durch den Umstand dar, dass die Verschiedenheiten in der Intensität der negativen Polarität auf den Seitenflächen, wie wir sie bei den Krystallen No. 1 und 2 beobachtet haben, bei dem vorliegenden Krystalle sogar so weit geht, dass sie sich in dem Auftreten der beiden entgegengesetzten Elektricitäten ausspricht.

Die obere Endfläche ist positiv, die untere zum grössten Theile negativ; nur an dem der Bruchfläche zugewandten Rande erscheint positive Spannung. Auf den Flächen 1 und 2 ist der linke Rand negativ, der rechte Rand positiv; auf den Flächen I, II und VI dagegen umgekehrt der linke Rand positiv, der rechte negativ. Es fallen also die negativen Pole auf die von den Flächen ∞P links liegenden Durchschnittskanten der Flächen ∞P und $\infty P 2$, und die positiven auf die von denselben Flächen ∞P aus rechts liegenden Durchschnittskanten der Prismen ∞P und $\infty P 2$ *).

Auf einem vollständig ausgebildeten Krystalle dieser Art würden also auf den prismatischen Seitenflächen zwölf elektrische Zonen liegen und zwar sechs positive abwechselnd mit sechs negativen. Die Maxima derselben würden auf die von den Flächen ∞P und $\infty P 2$ gebildeten Kanten fallen**).

VI. Krystalle von Sadisdorf bei Dippoldiswalde.

Der Apatit fand sich in der Kupfergrube bei Sadisdorf in langsäuligen bläulichweissen oder grünlichen Krystallen in Begleitung von Kupferkies und violblauem Flussspath.

---

*) Die negative Spannung nimmt also bei der gewählten Stellung des Krystalles auf der Prismenfläche ∞P von rechts nach links ab; hätte ich den Krystall umgekehrt gestellt (die obere Endfläche zur unteren gewählt), so würde dies Abnehmen in der Richtung von links nach rechts auf der Prismenfläche ∞P erfolgen, wie dies bei den Krystallen No. 1 und 2 beobachtet wurde. Die im Texte und in der Abbildung als obere betrachtete Fläche wurde ihrer starken positiven Spannung wegen in diese Stellung gebracht.

**) Aehnliche Vorgänge werden wir in einer späteren Abhandlung über die ther-

Krystalle No. 11. Taf. I, Fig. 11.

Durch die Güte des Herrn Chemiker Sachsse in Leipzig erhielt ich eine Druse Apatitkrystalle von Sadisdorf. Durch einen Fall derselben brachen zwei kleine Nadeln, deren Netz in Fig. 11 und 12 dargestellt ist, ab. Die Oberflächen derselben sind zum Theil sehr stark gerieft, so dass sich namentlich bei No. 11 die einzelnen Seitenflächen nicht wohl unterscheiden lassen. Nach einer ungefähren Schätzung sind dieselben für dieses grössere Stück in Fig. 11, Taf. I in natürlicher Grösse abgebildet. Am oberen Ende findet sich eine vollkommene Krystallfläche 0P, während das untere Ende von einer Bruchfläche begrenzt ist.

Die obere Endfläche ist sehr stark positiv, die untere Bruchfläche sehr schwach negativ. Dass wir auch bei diesen Apatitkrystallen von Sadisdorf keinen polaren Gegensatz in der Richtung von unten nach oben haben, wie beim Turmalin, beweist die Vertheilung auf den Seitenflächen und die positive Beschaffenheit der unteren Bruchfläche beim folgenden Krystalle. Auf den Seitenflächen herrscht im Allgemeinen die negative Elektricität vor; jedoch ist die eine Fläche 5 positiv, und ausserdem zieht sich von dem unteren Ende der Fläche 1 eine positive Zone über die Mitte der Fläche 2 nach der Mitte und dem unteren Theile der Fläche 3. Auffallend ist die Abnahme der positiven Spannung auf der Fläche 5 gegen das untere Ende hin, während diese Spannung an letzterem selbst wieder steigt.

Der Apatit gleicht, wie schon oben erwähnt, in seiner elektrischen Vertheilung dem Beryll; auch bei diesem habe ich ebenfalls die Erscheinung nachgewiesen, dass die positive Elektricität sich nicht blos auf den Endflächen findet, sondern sehr oft auch über eine oder zwei der Prismenflächen ausdehnt*).

Ob diese Eigenthümlichkeit nur in dem Umstande begründet ist, dass beim Beryll ebenso wie beim Apatit die beiden positiven Endflächen im Verhältniss zu den langen Seitenflächen eine sehr geringe Ausdehnung haben, oder ob etwa, namentlich beim Apatit, Flächen des zweiten Prismas $\infty P2$ dabei eine Rolle spielen, vermag ich für jetzt

---

moelektrischen Eigenschaften der gleichfalls dem hexagonalen Systeme angehörigen Krystalle des unterschwefelsauren Kalis antreffen.

*) Diese Abh. Bd. 18, S. 235.

nicht zu entscheiden. Bei dem vorliegenden Krystalle könnten zwei kleine Apatitnadeln, welche in der unteren Hälfte des rechten Randes auf den Flächen 2 und 5 aufgewachsen sind, von einem gewissen Einflusse gewesen sein. Auch ist die obere Hälfte des ganzen Krystalles hellgrün und durchsichtig, die untere Hälfte aber dunkler grün gefärbt.

Krystall No. 12. Taf. I, Fig. 12.

Die kleine Fig. 12, Taf. I in natürlicher Grösse abgebildete Apatitnadel gleicht in der Beschaffenheit ihrer Masse der vorstehend beschriebenen. Ihre Seitenflächen sind meistens glatt, so dass die sechs Flächen des Prismas ∞P bestimmt hervortreten. Von dem Prisma $\infty P 2$ zeigt sich nirgends eine Spur, dagegen liegt oben links auf der Prismenfläche 1 eine kleine Fläche einer Pyramide dritter Ordnung. Am obern Ende findet sich eine Krystallfläche $0P$, während das untere Ende durch eine Bruchfläche gebildet wird.

Die elektrische Vertheilung stimmt im Allgemeinen mit der beim vorhergehenden Krystalle beschriebenen überein; nur ist auch hier die untere Bruchfläche positiv. Ihre elektrische Beschaffenheit hängt, wie ich dies schon beim Topas und ebenso bei den Spaltungsstücken des Gypses nachgewiesen habe, von ihrer Lage im ganzen Krystalle ab. Auf den Prismenflächen, die im Allgemeinen negativ sind, findet sich ebenso wie beim vorhergehenden Krystalle eine positive Region, welche die Fläche 4 einnimmt und sich von da über die Fläche 5 und den unteren Rand der Fläche 6 ausbreitet. Die elektrische Erregung dieses Krystalles ist sehr stark.

B. Krystalle mit negativen Endflächen und positiven Seitenflächen.

Die zu dieser Abtheilung gehörenden Apatitkrystalle unterscheiden sich von den im Vorhergehenden beschriebenen durch die Beschaffenheit ihrer Masse, welche weisslich und kaum durchscheinend ist, und zahlreiche mit der Fläche $0P$ parallel gehende Sprünge zeigt. Auch sind die Pyramidenflächen bei ihnen stärker ausgebildet als bei den früheren (mit Ausnahme des Krystalles von Sulzbach, der jedoch einen ganz anderen Charakter trägt). Der eine der beiden, der Freiberger Sammlung entliehenen Krystalle stammt von Ehrenfriedersdorf, der andere vom St. Gotthardt, und trotz dieser weitgetrennten Fundorte stimmen sie doch in ihrer Masse und ihrem ganzen Habitus überein.

Krystall Nr. 13. Taf. I, Fig. 13.

Der durch seine Grösse ausgezeichnete Krystall No. 13 stammt von Ehrenfriedersdorf. Fig. 13 Taf. I stellt sein Netz, so gut dies eben thunlich ist, in natürlicher Grösse dar. Er ist fast ringsum von mehr oder weniger ausgebildeten Krystallflächen begrenzt, welche den Gestalten $0P$, $\frac{1}{2}P$, P, $2P$, $P2$, $2P2$, $\frac{3P\frac{3}{2}}{2}$, ∞P, $\infty P2$ angehören; indess treten die Gestalten $P2$, $\frac{3P\frac{3}{2}}{2}$ und $\infty P2$ nur mit einer Fläche auf und zwar an einer Stelle, wo die Ausbildung des Hauptkrystalls durch das Auftreten und Hineinwachsen eines zweiten Krystalls, der nicht vollkommen genau mit seinen Axen denen des Hauptkrystalls parallel liegt, gestört worden ist. Mit den Zahlen 1 bis 6 sind die Flächen des Prismas ∞P bezeichnet, während den Pyramidenflächen und der Endfläche ihre krystallographischen Symbole beigefügt sind.

Am oberen Ende sind die Endfläche und die Pyramidenflächen gut ausgebildet, dagegen ist das untere in A B dargestellte Ende sehr mangelhaft krystallisirt. Von dem Prisma ∞P sind die Flächen 1 und 6 (letztere jedoch von geringer Breite) vollständig vorhanden; links an der Fläche 6 erscheint, freilich zum grössten Theile bedeckt durch den eingeschobenen Krystall $\alpha\beta$, ein Theil der Fläche V des Prismas $\infty P2$. Einigermassen ausgebildet ist auch noch die Fläche 2; von den Flächen 3 und 4 existiren nur kleinere Theile, und noch geringer sind die von der Fläche 5 erscheinenden Stücke.

Wie schon in den vorangeschickten allgemeinen Bemerkungen über diese Abtheilung der Apatitkrystalle hervorgehoben, ist die elektrische Vertheilung gerade die entgegengesetzte als bei den Krystallen der ersten Abtheilung. Die beiden Enden der Hauptaxe zeigen negative Polarität und zwar das untere mangelhaft ausgebildete eine stärkere als das obere; die Seitenflächen 1, 2, 3 und 6 und zum Theil auch 4 sind positiv, während sich über die sehr mangelhaft ausgebildete Fläche 5 und den rechten Theil der Fläche 4 eine negative Region vom oberen nach dem unteren Ende herabzieht. Die Spannung der positiven Elektricität auf den Flächen 2 und 3 ist nicht unbeträchtlich; auf der Fläche 1 ist sie schwächer, was wohl in der von dem oberen Ende über die rechte Seite der oberhalb der Fläche 1 liegenden Pyramidenflächen herablaufenden und auch noch in den oberen Theilen des rechten Randes der Fläche 1 selbst auftretenden negativen Elektricität seinen Grund hat.

Krystall No. 14. Taf. I, Fig. 14.

Der vom St. Gotthardt stammende Krystall gehört gleichfalls der Freiberger Sammlung. Er gleicht, wie schon oben bemerkt, in seiner Masse dem vorhergehenden. Seine Begrenzungen werden vorzugsweise von den Flächen 0P, $\frac{1}{2}$P, P und ∞P gebildet, zu denen noch einzelne kleine Flächen von P2, 2P2, und ∞P2 hinzutreten. Das obere Ende ist vollkommen, das untere aber mangelhaft gebildet.

Die auf seiner Oberfläche beobachteten elektrischen Spannungen sind nur gering; die Enden der Hauptaxe tragen die negativen, die Seitenflächen die positiven Pole.

Brucit.

Der Brucit oder das natürliche Magnesiahydrat (Talkhydrat) kommt meistens in schaaligen Massen vor, welche einen sehr deutlichen Blätterdurchgang besitzen. Selten finden sich Krystallflächen. Nach Hessenberg ist die Krystallform rhomboedrisch und misst der Polkantenwinkel 83° 22',5, woraus das Verhältniss der Nebenaxen zu der Hauptaxe 0,5208 : 1 folgt. Der zuvor erwähnte vollkommene Durchgang ist parallel mit 0P.

Die vier im Nachfolgenden beschriebenen und auf Taf. I in halber linearer Grösse abgebildeten, blätterigen Brucitstücke, von welchen zwei mehr oder weniger grosse Theile von Krystallflächen zeigten, stammen sämmtlich von Texas in Pennsylvanien; sie sind farblos und mehr oder weniger durchsichtig.

Der Brucit besteht aus 69 Theilen Magnesia und 31 Theilen Wasser; erträgt aber eine Erhitzung bis zum Siedepunkt des Wassers, ohne sichtbar zersetzt zu werden. Trotz seines hohen Wassergehaltes hat er ein ausserordentlich grosses Isolationsvermögen. In optischer Beziehung gehört er zu den positiv einaxigen Krystallen.

Brucit No. 1. Taf. I, Fig. 1.

Die Brucitmasse No. 1, welche Fig. 1 Taf. I in halber linearer Grösse in *A* von der oberen, in *B* von der unteren Seite abgebildet ist, gehört dem mineralogischen Museum der hiesigen Universität. *C* ist

eine ungefähre Darstellung des in A links liegenden, D des in A rechts liegenden, und E des in der Zeichnung A vorn liegenden Randes oder der betreffenden seitlichen Begrenzung. Auf der oberen Seite erhebt sich zwischen $\alpha\beta\gamma$ eine pyramidal aufsteigende Masse; bei ihrer Bildung ist sie in der Richtung von der unteren Fläche B nach der oberen A hin gewachsen. Auf den Seiten der pyramidal sich erhebenden Masse sind einzelne Reste von Rhomboederflächen erkennbar.

Beim Erkalten zeigt die obere Fläche A überall negative Spannung, ebenso die untere, nur tritt auf letzterer an dem einen Rande eine schwache positive Elekricität hervor; dagegen sind sämmtliche seitliche Begrenzungen positiv.

Hiernach würde sich also die normale Vertheilung der Elektricität auf einem vollkommenen Brucitkrystalle so gestalten, dass beim Erkalten die beiden Enden der Hauptaxe nebst den sie umgebenden Flächenstücken negativ, die Kanten an der Basis nebst den ihnen anliegenden Flächenstücken aber positiv elektrisch werden. Die Vertheilung entspricht der auf dem Skalenoeder der Derbyshirer Kalkspäthe beobachteten*).

Auf dem vorliegenden Bruchstücke ist die Stärke der erregten Elektricität, wie die in die Figuren eingetragenen Zahlen nachweisen, auf der oberen Seite nicht unbeträchtlich; auf der unteren dagegen erscheint sie wesentlich schwächer und geht an dem einen Rande bereits in die positive über.

Je nach der Lage, welche ein solches Brucitstück in Bezug auf den ganzen Krystall einnimmt, kann aber auch die untere Seite (Brucit No. 2, 3 und 4) positiv werden, wie ich dies beim Topase**) nachgewiesen habe.

Wenn ein Gypskrystall parallel seinem vollkommensten Durchgange zerspalten wird, so zeigen die beiden Spaltungsflächen, die zuvor an einander gelegen haben, entgegengesetzte Polaritäten, wofern nicht die Spaltung gerade die Mitte des Krystalles trifft, in welchem Falle beide Flächen gleichartig erscheinen. Auch dieser Vorgang lässt sich an den Brucitmassen beobachten, wie die in Fig. 4, Taf. II abgebildeten Brucitblätter zeigen.

---

*) Diese Abh. Bd. 14. S. 441.

**) Diese Abh. Bd. 18. S. 494.

Brucit No. 2. Taf. I, Fig. 2.

Die in Fig. 2, Taf. I abgebildete Brucitmasse gleicht sehr der vorhergehenden. *A* stellt die obere, *B* die untere Seite, *C* den in der Zeichnung *A* links, *D* den rechts und *E* den vorn liegenden Rand (Seitenfläche) dar. Auf der oberen Seite erhebt sich die Masse ähnlich wie bei No. 1 pyramidenartig, während sie auf der unteren Seite von einer ebenen Durchgangsfläche begrenzt wird, die nur an einigen Randstellen Reste von Krystallflächen trägt. Auf der oberen Seite finden sich bei α, α', α'' und γ, und auf der unteren Seite bei β und β' Theile von Krystallflächen. Die bei α, α', α'' und β und β' sichtbaren gehören, wenn wir den Krystall rhomboedrisch nehmen, den beiden Rhomboedern $+ \frac{1}{3}$ R und $- \frac{1}{3}$ R, oder einer vollständigen hexagonalen Pyramide an, während das bei γ hervortretende Flächenstück von dem Rhomboeder R selbst herrührt.

Auf der oberen Seite sind die pyramidal sich erhebenden Theile stark negativ elektrisch; auf den niedrigen Theilen des linken und des vorderen Randes (oder der seitlichen Begrenzungen) erscheint aber positive Spannung, die auch auf der ganzen unteren Seite und den Rändern sich findet.

Brucit No. 3. Taf. I, Fig. 3.

Die ziemlich durchsichtige, blätterige Masse, No. 3, hatte ich von einem grösseren Stücke abgebrochen. In Fig. 3 Taf. I habe ich die obere und untere Seite in halber linearer Grösse abgebildet. Die eine Seite, die ich im Anschluss an die vorhergehenden Beobachtungen als die obere bezeichnen will, ist überall negativ, die entgegengesetzte untere aber positiv.

Brucit No. 4. Taf. II, Fig. 4.

Von dem hiesigen mineralogischen Museum hatte ich zwei Brucitplatten erhalten, welche oben und unten von ebenen Durchgangsflächen begrenzt waren und früher eine einzige Platte gebildet hatten. Auch der Durchgang, in welchem sie getrennt waren, bildete eine fast vollkommene Ebene, so dass sich nach dem Zusammenlegen beide genau aneinander anschliessenden Platten wie eine einzige behandeln liessen. Die Dicke der oberen Platte betrug 2,5 bis 4^{mm}, die Dicke der unteren 2 bis 3^{mm}.

In Fig. 4 Taf. II habe ich die oberen und unteren Flächen beider Platten in halber linearer Grösse abgebildet und die auf ihnen beobachteten elektrischen Spannungen in diese Abbildungen eingetragen. Die oberen Seiten beider Platten *A* und *C* sind negativ; die unteren *B* und *D* positiv. Ebenso verhielten sich die obere und untere Begrenzungsfläche *A* und *D*, als beide Platten genau zusammengelegt und als eine einzige Platte von 5,5 bis 7^{mm} Dicke untersucht wurden.

Vor der Spaltung hatten die beiden Flächen *B* und *C* zusammen gelegen; nach ihrer Trennung zeigte *B* positive und *C* negative Polarität. Die Maxima, sowohl der positiven als auch der negativen Spannungen liegen auf allen vier Flächen nahe an derselben Stelle.

Cölestin.

Die Krystalle des Cölestins sind mit denen des Schwerspaths isomorph und theilen mit ihnen das gleiche Geschick, bei ihrer Beschreibung seitens der Krystallographen auf sehr verschiedene Weise gestellt worden zu sein. Aus den bereits beim Schwerspathe *) ausgesprochenen Gründen nehme ich im Folgenden den Hauptdurchgang, ebenso wie beim Schwerspathe, senkrecht gegen die verticale Axe (Hauptaxe) und die beiden etwas weniger vollkommenen Durchgänge parallel mit den Flächen des Prismas ∞P. Nach dieser Stellung finden sich bei den weiterhin beschriebenen Individuen überhaupt die Gestalten: $0P$, ∞P, $\breve{P}\infty$, $\frac{1}{2}\bar{P}\infty$ und ein sehr stumpfes Brachydoma, sehr wahrscheinlich $\frac{1}{15}\breve{P}\infty$.

Nimmt man den Winkel, unter welchem die Flächen des Prismas $\frac{1}{2}\bar{P}\infty$ am Ende der Brachydiagonale zusammenstossen, zu $78^0\ 50'$ und den Winkel des Prismas ∞P ebenfalls an dem Ende der Brachydiagonale zu $104^0 6'$, so ergeben sich daraus die Verhältnisse der Brachydiagonale zur Makrodiagonale und zur Hauptaxe = 0,6083 : 0,7801 : 1 **).

Wie beim Schwerspathe zeigen auch die von verschiedenen Fundorten stammenden Krystalle des Cölestins ein verschiedenes Wachsthum. Die Krystalle von Strontian Island im Huronsee sind in der

*) Diese Abh. Bd. 15, S. 274.

**) Beim Schwerspath sind diese Verhältnisse 0,6210 : 0,7622 : 1.

Richtung der Makrodiagonale gewachsen und haben mit einem Ende derselben angesessen; sie bilden gleich den Przibramer Schwerspäthen flache Tafeln, die besonders von den Flächen 0P, ∞P und ¼P̄∞ begrenzt werden. Andrerseits gleichen die im Wadi el Tih in Egypten vorkommenden Cölestinkrystalle bezüglich ihres Anwachsens den Schwerspäthen aus der Auvergne; sie sitzen wie diese mit dem einen Ende der Brachydiagonale fest, sind also in der Richtung dieser Diagonale gewachsen und bilden Säulen, welche von den Flächen P̆∞ und 0P begrenzt werden und am freien Ende der Brachydiagonale die Flächen ∞P und ¼P̄∞ tragen. Ebenso sind die Cölestinkrystalle von Girgenti in der Richtung der Brachydiagonale gewachsen und bilden oft stängliche Aggregate, aus welchen nur das eine Ende der Brachydiagonale frei hervorragt.

Die Beobachtungen an den verschieden gestalteten Schwerspathkrystallen hatten sehr merkliche Unterschiede in der Stärke der durch Temperaturänderungen erregten elektrischen Spannungen ergeben; namentlich traten dieselben im Allgemeinen stärker auf denjenigen Krystallen hervor, welche in der Richtung der Makrodiagonale gewachsen sind, als bei den in der Richtung der Brachydiagonale verlängerten Säulen. Ich war daher gar nicht erstaunt, als ich zur Zeit der Untersuchung der Schwerspäthe auf kleinen Bruchstücken von Cölestinkrystallen von Girgenti nur sehr schwache elektrische Erregungen wahrzunehmen vermochte. In der letzten Zeit habe ich durch Herrn Th. Schuchardt in Görlitz ziemlich grosse Cölestinkrystalle von Strontian Island erhalten; auf diesen erlangen die elektrischen Polaritäten eine grössere Stärke*). Uebrigens gleicht die elektrische Vertheilung auf den Cölestinkrystallen im Allgemeinen der von mir auf den Schwerspäthen beobachteten.

A. Krystalle von Strontian Island im Huronsee.

Krystall No. 1. Taf. II, Fig. 1.

In Fig. 1, Taf. II ist der Krystall No. 1 in einer Ansicht von oben und von unten in natürlicher Grösse abgebildet; neben die Ansicht von oben sind die zwei am ausgebildeten Ende der Makrodiagonale vorhan-

*) Sehr leicht elektrisch erregbar waren auch die Durchgangsflächen an den unter No. 4 beschriebenen Bruchstücken von Montecchio maggiore; s. weiter unten.

denen Flächen ∞P, sowie die Bruchfläche *AB* und eine mangelhaft ausgebildete Fläche *CD* gezeichnet.

Der Krystall wird von den Gestalten $0P$, ∞P, $\frac{1}{2}\bar{P}$ und $\frac{1}{15}\breve{P}\infty$ *) begrenzt. Die Masse desselben ist ziemlich klar, aber von zahlreichen mit ∞P parallelen Sprüngen durohsetzt. Auf der oberen Fläche liegen an zwei Stellen kleinere thonige Massen.

Die äusserste Schicht der Substanz auf den beiden Flächen ∞P. ist in einer fast 1mm grossen Dicke undurchsichtig. Durch diese Schicht wird jedenfalls das Hervortreten der elektrischen Spannung auf diesen Flächen beeinträchtigt. Auf der rechten Seite (bezogen auf die linksstehende Zeichnung, welche die Ansicht von oben darstellt) ist der Krystall durch eine nicht sehr unebene Bruchfläche *AB* begrenzt, an welche sich nach vorn eine wahrscheinlich durch Anliegen fremder Massen in ihrer Ausbildung gehemmte Fläche *DC* anschliesst.

Die elektrische Vertheilung auf diesem Cölestinkrystalle gleicht der beim Schwerspathkrystalle No. 5 **) beobachteten; es sind also die Flächen $0P$ sammt den beiden Flächen des Prismas ∞P, sowie die Bruchfläche am rechten Ende positiv, die Flächen $\frac{1}{2}\bar{P}\infty$, sowie die an ihre Stelle getretene Anlegefläche dagegen zeigen negative Polarität. Bei dem eben erwähnten Schwerspathe No. 5 tritt ausserdem noch eine negative Zone an dem freien Ende der Makrodiagonale auf, die bei dem vorliegenden Cölestinkrystalle nicht wahrzunehmen war, vielleicht gehindert durch die zuvor beschriebene Auflagerung einer undurchsichtigen Masse auf die Flächen ∞P.

Krystall No. 2. Taf. II, Fig. 2.

Der Krystall No. 2 trägt dieselben Krystallgestalten wie der vorhergehende; auf der unteren Seite findet sich selbst eine matte Fläche von $\frac{1}{15}\breve{P}\infty$. Indess ist seine Masse weniger rein und sind die Flächen der oberen und unteren Seite minder vollkommen gebildet, als bei dem

*) Da die Fläche des Brachydomas $\frac{1}{15}\breve{P}\infty$ matt war, so konnte ihr Winkel mit der anliegenden Fläche $0P$ nur mit dem Anlegegoniometer gemessen werden. Eine genauere Bestimmung desselben liess sich aber bei der Regelmässigkeit des Krystalles durch die Abmessungen der Dicke und Länge des betreffenden Stückes erlangen; daraus ergab sich der Winkel zwischen jener matten Fläche und der anliegenden Fläche $0P$ zu $175^0\ 6'$, woraus dann das Zeichen $\frac{1}{15}\breve{P}\infty$ folgt.

**) Diese Abh. Bd. 15. Taf. I. Fig. 5.

vorhergehenden. Die Zeichnung Fig. 2, Taf. II stellt die Ansicht von oben (links) und von unten (rechts) dar; neben die Ansicht von oben sind die vier Flächen des Prismas ∞P gezeichnet; die mit 1 und 4 bezeichneten Flächen sind eben, aber wie bei No. 1 mit einer undurchsichtigen, fast 1^{mm} dicken Schicht belegt. Die Fläche 3 ist ziemlich eben, die Fläche 2 dagegen unvollkommen ausgebildet und zum Theil mit fest ansitzenden Thonmassen bedeckt.

Die Flächen $0P$ sind positiv; ebenso, wenn auch schwächer, die beiden Flächen 1 und 4 des Prismas ∞P; die Flächen $\frac{1}{2}\bar{P}\infty$ zeigen sich negativ und ebenso verhält sich die Fläche 3. Die Polarität der mangelhaft ausgebildeten Prismenfläche 2 liess sich nicht bestimmen.

B. Krystalle von Girgenti.

Krystall No. 3. Taf. II, Fig. 3.

Wie bereits oben bemerkt, sind die Cölestinkrystalle von Girgenti stets mit dem einen Ende der Brachydiagonale angewachsen und haben sich von da aus zu mehr oder weniger freien Säulen entwickelt, oder sind mit den benachbarten Individuen zu einem stänglichen, etwas strahligen Aggregate verwachsen, aus welchem nur die Enden der Brachydiagonale heraustreten. Die in der Richtung der Brachydiagonale verlängerten Säulen werden von den Flächen $\breve{P}\infty$ gebildet, zu denen gewöhnlich noch schmale Flächen von $0P$ hinzutreten. Am Ende der Brachydiagonale erscheinen die Flächen ∞P und $\frac{1}{2}\bar{P}\infty$, und bilden je nach ihrer Grösse eine vertikale Kante (Durchschnitt von ∞P) oder eine horizontale (Durchschnitt von $\frac{1}{2}\bar{P}\infty$).

Die elektrische Erregung dieser Krystalle ist meistens sehr gering und erreicht nur auf dem vorderen freien Ende der Brachydiagonale eine etwas grössere Stärke. Dieses vordere Ende (die von ∞P gebildete vertikale, oder die von $\frac{1}{2}\bar{P}\infty$ gebildete horizontale Kante) sammt den anliegenden Flächenstücken zeigt negative Spannung; dieselbe beherrscht auch bei dem Fig. 3 gezeichneten Krystall die Flächen $0P$, sodass nur auf den makrodiagonalen Seitenkanten desselben und den ihnen anliegenden Theilen der Flächen $\breve{P}\infty$ die positive Elektricität erscheint.

Fig. 3 stellt einen Krystall von Girgenti in zwei Ansichten von der

oberen und unteren Seite, nebst der Abbildung der beiden am freien Ende der Brachydiagonale befindlichen Flächen ∞P dar.

O. Krystalle von Montecchio maggiore bei Vicenza.

In der mineralogischen Sammlung der hiesigen Universität finden sich zwei krystallinische Bruchstücke eines bläulichen Cölestins des eben genannten Fundortes, welche ehemals ein Ganzes gebildet haben und parallel dem vollkommenen Blätterdurchgange auseinander gesprengt worden sind. Ich habe dieselben in Fig. 4*a* und 4*b*, so gut es ging, abgebildet. *A B* und *A' B'* sind die beiden Durchgangsflächen, nach welchen die Stücke gesprengt wurden. Wenn das Fig. 4*a* dargestellte Stück als oberes und das Fig. 4*b* als unteres Stück betrachtet wird, so stellt die Fläche *AB* die untere Fläche des oberen Stückes und *A' B'* die obere Fläche des unteren Stückes dar. Wird das obere Stück auf auf das untere gelegt, sodass wieder das ursprüngliche Ganze sich herstellt, so bilden die Flächen *C*, *C'*, *D*, *D'*, *E*, *E'*, *F* und *F'* die seitlichen Begrenzungen, die aber sehr unregelmässig verlaufen; es liegt dann *C* oberhalb *C'*, *D* oberhalb *D'*, *E* oberhalb *E'* und *F* oberhalb *F'*. Die kleine Durchgangsfläche *G* bildet an diesem Ganzen dann die obere, und die grössere Durchgangsfläche *G'* die untere Seite. Die Flächen *E*, *E'*, *D* und *C'* sind Durchgangsflächen, welche mit den Prismenflächen ∞P parallel gehen.

Die obere und die untere Fläche *G* und *G'* sind in erheblichem Grade positiv, ein Hinweis, dass dieselben im ursprünglichen Gebilde nahe an den Krystallflächen 0P gelegen haben. Die unregelmässigen Seitenflächen an dem mit *A* bezeichneten Ende der Makrodiagonale zeigen negative, an dem anderen mit *B* bezeichneten Ende positive Spannung. Die beiden auf einander gelegen habenden Durchgänge *A B* und *A' B'* sind negativ, und zwar *A' B'* stärker als *AB*. Bei den in den Zeichnungen eingetragenen Messungen waren die Krystalle bis gegen 97° C. erhitzt; es genügen aber schon Temperaturerhöhungen bis gegen 30° oder 40° C., um bei der Abkühlung einen Ausschlag von einigen Skalentheilen zu erhalten. Ja es genügt, z. B. die Spaltungsfläche *A' B'* (Fig. 4*b*) einige Minuten in die Sonne zu stellen, um sogleich darauf einen der steigenden Temperatur entsprechenden positiven Ausschlag von 2 Skalentheilen zu erhalten.

Prehnit.

Den Prehnit lernte man zuerst in einer Varietät kennen, welche der Physiker Rochon 1774 vom Cap der guten Hoffnung mitbrachte. Später wurde er an derselben Oertlichkeit vom holländischen Obersten von Prehn, von welchem er den Namen trägt, aufgefunden. Man hielt ihn anfangs für einen Smaragd, wies ihn nachher dem Prasem, dann dem Chrysolith und später den Zeolithen zu, bis er schliesslich nach den Analysen Hassenfratz's und Klaproth's von Werner als eine selbstständige Gattung unter dem Namen Prehnit aufgestellt wurde.

Die Krystalle des Prehnits gehören dem rhombischen Systeme an; der stumpfe Winkel des Prismas ∞P beträgt $99^0\ 58'$*). Die Krystalle bilden gewöhnlich niedrige, von den Flächen ∞P begrenzte Prismen, die oben und unten die Fläche $0P$ und an den Enden der Makrodiagonale kleine Flächen $\infty \bar{P} \infty$ tragen. Diese Tafeln erscheinen meistens an den Enden der Brachydiagonale etwas aufgeblättert und verdickt, sodass auf den Endflächen $0P$ eine mit der Makrodiagonale parallel laufende Vertiefung entsteht; bisweilen ist dieses Aufblättern so stark, dass die brachydiagonalen Seitenkanten nicht gerade, sondern bogenförmig gekrümmte Linien bilden. Ausserdem kommt der Prehnit auch kugelig und nierenförmig vor, wobei diese Kugeln eine schaalige und radial faserige Zusammensetzung zeigen.

Der Prehnit ist bisweilen farblos, gewöhnlich aber grünlich (weisslichgrün bis lauchgrün) gefärbt; seine Härte ist sehr beträchtlich, 6 bis 7. Die Bestandtheile desselben sind Kieselsäure, Thonerde, Kalk und Wasser, zum Theil auch etwas Eisenoxyd.

Nach einer in der ersten Ausgabe seines *Traité de minéralogie* von Hauy gemachten Angabe, die aber sonderbarerweise in der zweiten Ausgabe fehlt, ist die Eigenschaft des Prehnits, durch Temperaturänderung elektrisch zu werden, von Dré entdeckt worden. In der zweiten Ausgabe des *Traité* führt Hauy nur an, dass die elektrische Axe die Richtung der kurzen Diagonale der Kerngestalt habe, und fügt dann, befangen in der Ansicht, dass alle thermoelektrischen Krystalle noth-

*) Genauere Bestimmungen über die Krystallformen des Prehnits gibt Streng (Neues Jahrb. für Min. 1870, S. 316).



wendig hemimorph gebildet sein müssen, hinzu: L'analogie semble exiger que les parties, dans lesquelles résident les poles électriques dérogent à la symmétrie par une différence de configuration: j'ai déjà quelques aperçus à cet égard etc.

Wegen Mangels an geeigneten Krystallen konnte ich bei meinen früheren Untersuchungen*) nur das elektrische Verhalten des einen, gewöhnlich freien Endes der Brachydiagonale bestimmen, und dasselbe als beim Erkalten positiv erkennen.

Riess und G. Rose**) haben 12 verschiedene Prehnite (Prismen, Tafeln und kugelförmige Stücke) auf ihr elektrisches Verhalten geprüft und aus den auf ihnen gemachten Beobachtungen folgende Schlüsse gezogen: „Alle diese Beobachtungen stimmen mit einander überein und lehren eine eigenthümliche, bisher unbekannte Vertheilung der elektrischen Pole an Krystallen kennen. Bei den bisher angeführten Krystallen (den terminalpolarischen) mündete nämlich jede einzelne elektrische Axe an der Oberfläche des Krystalles, und es fand sich daher stets eine gerade Anzahl von Polen vor. Der Prehnit hingegen hat zwei gegen einander gekehrte elektrische Axen, deren analoge Pole zusammenfallen, und erscheint daher dreipolig. Die kurze Diagonale der Basis des Prismas giebt die Richtung beider Axen, deren gemeinschaftlicher analoger Pol in der Mitte liegt, während die zugehörigen beiden antilogen Pole an den Enden dieser Linien liegen. Da diese Vertheilung durch die Masse des ganzen Krystalles geht, so müssen die scharfen Seitenkanten unelektrisch sein; eine Abstumpfung der scharfen Seitenkante trifft immer den analogen Pol, eine Abstumpfung der stumpfen Kante nur dann, wenn sie durch die lange Diagonale der Basis geht. Wir nennen diese Art der pyroelektrischen Vertheilung centralpolarisch."

Genau dieselbe centralpolarische Vertheilung glaubten Riess und G. Rose beim Topas annehmen zu müssen. Ich habe aber bereits in meiner Abhandlung „über die thermoelektrischen Eigenschaften des Topases" ***) nachgewiesen, dass eine solche centralpolarische Vertheilung beim Topase nicht existirt; und ebensowenig ist dieselbe beim Prehnit

*) *De thermoelectricitate crystallorum.* Hal. 1839, S. 32.

**) Abh. der Akad. d. Wiss. zu Berlin 1843, S. 88.

***) Diese Abh. Bd. 18. S. 355.

vorhanden. Ich kann nur wiederholen, was ich bereits in der zuvor genannten Abhandlung über den Topas ausgesprochen, dass alle von Riess und G. Rose speciell angeführten Beobachtungen richtig sind, dass jedoch ihre Untersuchungsmethode die Wahrnehmung schwächerer elektrischer Zonen nicht gestattete und hierdurch die vollständige Erkennung der elektrischen Erscheinungen unmöglich machte.

Die elektrische Vertheilung auf dem Prehnite gleicht der auf dem Topase von mir beobachteten. Nehmen wir z. B. ein Stück eines brasilianischen Topaskrystalles (wie solche Figg. 60 und 62, Taf. IV der zuvor angezogenen Abhandlung abgebildet sind), dessen oberes und unteres Ende von den mit 0P parallelen Durchgängen begrenzt werden, so sind diese Endflächen (Durchgangsflächen) nebst den makrodiagonalen Seitenkanten beim Erkalten negativ, die brachydiagonalen Seitenkanten aber positiv. Da jedoch die negative Elektricität auf den Endflächen eine ausgedehnte Entwickelung hat, so tritt sie nur auf den makrodiagonalen Seitenkanten selbst und den ihnen zunächst gelegenen Theilen der prismatischen Seitenflächen auf, während die positive sich von den brachydiagonalen Seitenkanten weit hin über die prismatischen Flächen ausbreitet.

Gerade ebenso gestaltet sich, wie die im Nachfolgenden mitgetheilten Beobachtungen darthun, die elektrische Vertheilung auf den Prehnitkrystallen. Die beiden Endflächen sind beim Erkalten negativ, und ebenso die beiden makrodiagonalen, gewöhnlich durch kleine Flächen $\infty \breve{P} \infty$ abgestumpften Seitenkanten, während die brachydiagonalen Seitenkanten positive Polarität besitzen, und diese Polarität weithin über die anliegenden Flächenstücke von ∞P ausdehnen. Auf den durch Bruch entstandenen oder durch Anwachsen mangelhaft ausgebildeten seitlichen Begrenzungsflächen zeigt sich negative Spannung, doch ist auch meistens auf ihnen durch die Stärke der an den einzelnen Punkten beobachteten Elektricität noch die dem normalen Zustande zukommende Vertheilung angedeutet, indem die negative Spannung von den makrodiagonalen Seitenkanten nach den brachydiagonalen hin abnimmt, während die positive in der Richtung von den brachydiagonalen Seitenkanten nach den makrodiagonalen hin geringer wird.

Die auf den Prehnitkrystallen auftretenden elektrischen Spannungen sind nicht unbeträchtlich, weshalb sie auch mit den früheren unvollkommeneren Beobachtungsmitteln aufgefunden werden konnten. Um

das Anschlagen des Goldblättchens meines Elektrometers an die zur Seite stehenden, mit den Polen der Volta'schen Säule verbundenen Messingplatten zu verhindern, musste die Empfindlichkeit desselben auf ein Drittel von der sonst gewöhnlich gebrauchten verringert werden.

Ich werde die Beobachtungen an vier Krystallen oder vielmehr Bruchstücken solcher mittheilen. Trotz der Unvollkommenheit derselben werden die an ihnen angestellten Beobachtungen doch hinreichen, um die oben von mir ausgesprochene Vertheilung der Elektricität in voller Bestimmtheit nachzuweisen. Sämmtliche Krystalle, die ich der Güte meines Collegen Zirkel verdanke, waren von Handstücken aus Ratschinges in Tyrol abgebrochen.

Die Zeichnungen stellen bei allen vier Krystallen die einzelnen Flächen und Kanten in doppelt linearer Grösse dar. Alle von Krystallflächen gebildeten Kanten sind durch ausgezogene Linien, dagegen alle durch Bruch entstandenen nur durch punktirte Linien dargestellt.

Krystall No. 1. Taf. II, Fig. 1.

Am vollständigsten unter den vier Krystallen ist die in Fig. 1 gezeichnete dünne Tafel. Von den Flächen des Prismas ∞P sind vollständig die Flächen 1 und 2 vorhanden; von der Fläche 4 ist nur ein Theil in der Nähe des vorderen*) Endes der Brachydiagonale sichtbar, während an Stelle der Fläche 3 ein Bruch die Begrenzung bildet. An diesem Bruche finden sich auf der oberen Fläche einige kleinere Krystallmassen eingewachsen.

Die Endflächen 0 P sind im Allgemeinen negativ; nur erscheint in der Nähe des vorderen Endes der Brachydiagonale positive Spannung, die sich auf der unteren Fläche eine Strecke weit neben dem einen Rande hinzieht. Die schwache positive Elektricität am linken Ende der Makrodiagonale ist durch die daselbst aufgewachsenen kleinen Krystallmassen bedingt. Die stärkste negative Spannung erscheint, namentlich auf der unteren Fläche, an dem ausgebildeten rechten Ende der Makrodiagonale. Die vordere Kante am Ende der Brachydiagonale, welche von zwei Krystallflächen gebildet wird, ist stark positiv und diese positive Elektricität dehnt sich auch über die Flächen 1 und 4, sowie ein wenig auf die Flächen 0 P aus. Diese Ausbreitung ist eine nothwendige Folge der gerin-

*) Diese Benennung ist auf die Lage der oberen Fläche 0 P bezogen.



gen Grösse der Prismenflächen im Vergleich zu den Flächen 0P, auf welchen negative Polarität sich entwickelt. An dem hinteren Ende der Brachydiagonale ist die Kante nicht von Krystallflächen gebildet; die Krystallfläche 2 ist daselbst durch den an Stelle der Fläche 3 vorhandenen Bruch begrenzt. Daher erscheint an diesem hinteren Ende der Brachydiagonale nur eine schwache positive Spannung. Das ausgebildete rechte Ende der Makrodiagonale (schwach abgestumpft durch eine Fläche $\infty \breve{P} \infty$) ist stark negativ. Auf der Bruchfläche 3 zeigt sich in der Nähe des linken Endes der Makrodiagonale, also nach der Fläche 4 hin, ebenfalls, wenn auch schwächere, negative Elektricität.

Es treten an diesem Krystalle also sämmtliche vier Pole auf den Seitenkanten auf, und zwar auf den von Krystallflächen gebildeten Kanten stärker, als auf den durch Bruch entstandenen.

Krystall No. 2. Taf. II, Fig. 2.

An diesem kleinen Bruchstücke ist die Fläche 4 vollständig, die Flächen 1 und 3 aber nur theilweise vorhanden, und an Stelle der Fläche 2 ein Bruch getreten. Das linke Ende der Makrodiagonale trägt eine Abstumpfung durch die Fläche $\infty \breve{P} \infty$.

Die Vertheilung der Elektricität stimmt mit der auf dem Krystall No. 1 beobachteten überein, bis auf die Bruchfläche 2, welche negativ erscheint.

Krystall No. 3. Taf. II, Fig. 3.

Der etwas grössere Krystall No. 3 ist an dem vorderen Ende der Brachydiagonale stark aufgeblättert (verdickt), wie aus der Abbildung der Prismenflächen 1 und 4 ersichtlich wird. Die Prismenfläche 1 ist vollständig, die Fläche 4 zum grössten Theil vorhanden; an die Stelle der Flächen 2 und 3 sind Bruchflächen getreten. Jedoch erscheint am rechten Ende der Makrodiagonale noch eine schmale Krystallfläche $\infty \breve{P} \infty$.

Die elektrische Vertheilung auf den Krystallflächen ist die normale. Dagegen tritt auf den beiden Bruchflächen 2 und 3, wie bei dem vorhergehenden Krystalle auf der Bruchfläche 2, nur negative Spannung auf, jedoch in abnehmender Stärke gegen das hintere Ende der Brachydiagonale hin*).

*) Die Zeichen $\#$ und $=$ in den Abbildungen bedeuten eine so starke positive und resp. negative Elektricität, dass das Goldblättchen des Elektrometers ganz aus dem Gesichtsfelde des Mikroskops verschwand.

Krystall No. 4. Taf. II, Fig. 4.

Das kleine Krystallbruchstück No. 4 besitzt nur die Krystallfläche 1 und ein sehr kleines Stück der Fläche 4. Ausserdem zeigt es noch am rechten Ende der Makrodiagonale eine kleine Fläche $\infty \breve{P} \infty$. Der übrige Theil seines Umfanges wird von Bruchflächen begrenzt.

In seiner elektrischen Vertheilung gleicht dieser Krystall den früheren; auf den Bruchflächen waltet die negative Elektricität vor.

Natrolith und Skolezit.

Unter der von Cronstedt eingeführten Bezeichnung Zeolith waren verschiedene Mineralien zusammengefasst worden. Hauy schied davon eine Gattung unter dem Namen Mesotyp aus. Dieser Name sollte andeuten, dass ihre Kernform ungefähr zwischen den Kerngestalten des Stilbits und des Analcims die Mitte hält. Diese von Hauy aufgestellte Gattung Mesotyp trennten Gehlen und Fuchs in die drei Gattungen Natrolith, Mesolith und Skolezit, für deren Zusammensetzung sie nach der älteren Schreibweise die Formeln

$$\dot{Na}\,\dddot{Si} + \ddot{\overline{Al}}\,\dddot{Si} + 2\dot{H} \quad \text{(Natrolith)}$$

$$\left.\begin{matrix}\dot{Na}\,\dddot{Si}\\ 2\dot{Ca}\,\dddot{Si}\end{matrix}\right\} + \ddot{\overline{Al}}\,\dddot{Si} + 2\tfrac{2}{3}\,\dot{H} \quad \text{(Mesolith)}$$

$$\dot{Ca}\,\dddot{Si} + \ddot{\overline{Al}}\,\dddot{Si} + 3\,\dot{H} \quad \text{(Skolezit)}$$

aufstellten*).

Während nun der Natrolith und der Skolezit als selbstständige Gattungen feststehen, ist zur Zeit noch nicht völlig entschieden, ob der Mesolith gleichfalls als eine solche zu betrachten ist, oder ob die zu ihm gerechneten Mineralien nur kalkhaltige Natrolithe oder natronhaltige Skolezite sind.

In den nachfolgenden Untersuchungen kommen nur die beiden Gattungen des Natroliths und Skolezits in Betracht.

Die Eigenschaft des Mesotyps, durch Temperaturänderungen elektrisch zu werden, wurde von Hauy entdeckt**); jedoch fand er diese Eigenschaft nicht bei allen, sondern nur bei einem Theile der von ihm

*) *Jahrbuch der Chemie u. Phys.* v. Schweigger, Bd. 18. S. 8 ff. 1816.

**) Hauy, *Traité de minéral.* 2. édit. T. 3. p. 179.

zum Mesotyp gerechneten Krystallen. Ueber die specielle Vertheilung der beiden elektrischen Polaritäten auf den Oberflächen dieser Krystalle schweigt er, und setzt nur hinzu, dass er in der Beschreibung der Varietäten, welche jene Eigenschaft besitzen, die Krystalle als symmetrisch annehmen werde, bis es gelungen sein würde, in bestimmter Weise die Unterschiede in der Ausbildung derjenigen Theile, in welchen die beiden elektrischen Pole ihren Sitz haben, anzugeben. Hauy erwartet also, dass ähnliche Unsymmetrien wie beim Turmalin gefunden werden würden.

Fuchs bemerkt in der oben citirten Abhandlung vom Jahre 1816, dass der Natrolith durch Erwärmen nicht elektrisch werde; über den Skolezit gibt er an, dass die Krystalle desselben sehr dünn und nur an dem einen Ende auskrystallisirt sind, an welchem Ende sie durch das Erwärmen positiv elektrisch werden. Fuchs will hiermit ausdrücken, dass diese ausgebildeten Enden der Skolezitkrystalle bei dem auf das Erwärmen folgende Erkalten positive Elektricität zeigen. Der Mesolith stimmt nach Fuchs in seinem Verhalten mit dem Skolezite überein.

Brewster*) führt in dem Verzeichnisse der von ihm elektrisch befundenen Krystalle den Skolezit und Mesolith an, ohne jedoch nähere Angaben über die elektrische Vertheilung zu machen.

Riess und G. Rose**) fanden den Natrolith, selbst den von Brevig in Norwegen (den sog. Radiolith Esmark's) unelektrisch, dagegen den Mesolith und Skolezit von Island sehr stark elektrisch, und zwar waren, entsprechend den Angaben von Fuchs, die freien oder divergirenden Enden beim Erkalten positiv, die verwachsenen oder convergirenden Enden negativ elektrisch. Sie schliessen ihre Untersuchungen über den Skolezit mit folgenden Sätzen: „Der Skolezit hat demnach eine elektrische Axe, die mit der Hauptaxe seines vertikalen Prismas zusammenfällt, und das Ende, an welchem sich die vorderen schiefen Prismen finden, oder das freie divergirende Ende (denn er kommt stets nur in excentrisch zusammengehäuften Krystallen vor) ist antilog (d. h. beim Erkalten positiv), das aufgewachsene convergirende Ende analog (d. h. beim Erkalten negativ). Die Vertheilung der Elektricität ist demnach ganz wie beim Turmalin und Kieselzinkerz. Da aber die Krystalle, wie früher

*) *Jahrbuch der Chemie u. Phys.* von Schweigger, 1825. Bd. 43, S. 94.
**) Abhandl. der Berliner Akad. 1843.

gezeigt ist, stets Zwillingskrystalle sind und an den Enden jedes dieser Krystalle sich also die Flächen der entgegengesetzten Enden des einfachen Krystalles vereinigt finden, so kann man fragen, wie die Vertheilung in den einfachen Krystallen ist. Erschiene sie auch hier wie beim Turmalin, so kämen bei den Zwillingskrystallen an beiden Enden positive und negative Elektricität zusammen, die sich aufheben müssten. Es scheint daher kein anderer Ausweg möglich zu sein, als anzunehmen, dass die einfachen Krystalle, die man bis jetzt nicht beobachtet hat, unelektrisch sind und die Elektricität bei dem Skolezite erst durch die Zwillingsbildung entsteht, und der Zwillingskrystall sich nun in Bezug auf Vertheilung der Elektricität wie ein einfacher Krystall verhält. Daraus folgt nicht, dass, wenn man bei dem Skolezit durch Abschleifen den einen Krystall ganz fortschafft, der andere nun unelektrisch würde" u. s. w.

Die vorstehend über den Natrolith berichtete Angabe, wonach derselbe durch Temperaturänderung nicht elektrisch werden soll, entspricht der Wirklichkeit nicht; ich werde nachher zeigen, dass seine Krystalle thermoelektrisch sind, wenn auch beträchtlich schwächer, als die Krystalle des Skolezits.

Die oben gemachten Mittheilungen von Fuchs, Riess und G. Rose über die elektrischen Polaritäten an den beiden Enden der Säulenaxe des Skolezits (freies Ende beim Erkalten +, verwachsenes Ende —) sind allerdings richtig, genügen aber nicht zu einer genaueren Einsicht in die Lage der verschiedenen elektrischen Pole. Alle von Hauy, Riess und G. Rose ausgesprochenen Ansichten basiren auf der alten Vorstellung des nothwendigen Vorhandenseins einer einzigen mit der Säulenaxe zusammenfallenden elektrisch polaren Axe. Eine solche existirt aber, wie ich mit Bestimmtheit nachweisen werde, bei den Krystallen des Skolezits nicht; die elektrische Vertheilung auf denselben gleicht vielmehr der von mir beim Topas, Aragonit, Gyps, Diopsid, Orthoklas u. s. w. beobachteten, und die Zwillingsbildung hat, wie ich durch meine Untersuchungen über die Zwillinge und mehrfach zusammengesetzten Krystalle des Aragonits, des Gypses, Orthoklases, des Albits und Periklins nachgewiesen habe, auf die elektrische Vertheilung keinen maassgebenden Einfluss.

Die nahe Verwandtschaft des Natroliths und Skolezits hat mich bestimmt, beide Mineralien hier in eine Abtheilung zusammenzufassen.

A. Natrolith.

Der Natrolith kommt zu Brevig in Norwegen in isolirten Krystallen von ziemlicher Grösse vor und es standen mir vier solche in der hiesigen Universitätssammlung befindliche Krystalle, für deren Darleihung ich meinem Collegen, Herrn Professor Zirkel, zu Dank verpflichtet bin, zur Verfügung.

Die Krystalle des Natroliths gehören zum rhombischen Systeme; die Winkel des verticalen Prismas ∞P nähern sich sehr dem rechten, sie betragen 91° und 89°. Die Winkel der Grundpyramide P sind in den Polkanten 143° 20′ und 142° 40′ und in den Mittelkanten 53° 20′, woraus sich das Verhältniss der Brachy-, der Makrodiagonale der Basis und der verticalen Axe = 0,9827 : 1 : 0,3521 ergiebt. Ausser den genannten Formen ∞P und P finden sich an den von mir untersuchten Krystallen noch die Flächen von $\infty \bar{P} \infty$ und $\infty \breve{P} \infty$, jedoch meistens nur in geringer Breite.

Die Substanz der von mir untersuchten Krystalle ist weisslich; dieselben erscheinen gewissermaassen aus Fasern, welche mit der verticalen Axe parallel laufen, zusammengesetzt.

Auf Taf. II. Fig. 1, 2 und 3 habe ich drei der untersuchten Krystalle in natürlicher Grösse in zwei Projectionen (von der vorderen und von der hinteren Seite gesehen, wobei die Brachydiagonale nach dem Beobachter hin gerichtet ist) abgebildet. Von den mit den Zahlen 1, 2, 3 und 4 bezeichneten Flächen des Prismas ∞P schneiden sich also 4 und 1, ebenso 2 und 3 in den brachydiagonalen (d. h. in den an den Enden der Brachydiagonale liegenden), 1 und 2 und ebenso 3 und 4 in den makrodiagonalen (d. h. in den an den Enden der Makrodiagonale liegenden) Seitenkanten. Die unregelmässig verbrochenen Flächen, welche das untere Ende begrenzen, sind unter jedem Krystalle besonders abgebildet worden. In die Zeichnungen sind die auf den Kanten, den Pyramidenflächen und der unteren Bruchfläche beobachteten Ausschläge des Goldblättchens im Elektrometer eingetragen worden.

Die Krystalle wurden in der gewöhnlichen Weise bis auf die zu prüfenden Ecken oder Kanten oder Flächen in Kupferfeilicht eingehüllt bis 97° C. erhitzt und dann nach dem Bestreichen mit einer Alkoholflamme der Abkühlung überlassen. Die elektrischen Spannungen erlangen übrigens nirgends eine beträchtliche Stärke, was ihr Uebersehen

bei den früher angestellten, oben mitgetheilten Untersuchungen hinreichend erklärt. Die grösste Stärke der auf den Natrolithen beobachteten elektrischen Spannungen erreicht nicht ein Hundertstel der grössten auf den Skoleziten gemessenen Spannung*).

Das thermoelektrische Verhalten der Natrolithkrystalle ist sehr einfach. Die an den Endpunkten der Brachydiagonale liegenden (sogenannten brachydiagonalen) Seitenkanten nebst den auf ihnen auftretenden Flächen $\infty\bar{P}\infty$ sind beim Erkalten negativ, die an den Enden der Makrodiagonale liegenden (makrodiagonalen) Seitenkanten nebst den auf ihnen auftretenden Flächen $\infty\breve{P}\infty$ dagegen positiv elektrisch. Auf den Flächen des Prisma's ∞P geht also die eine Polarität in die andere über. Die sämmtlichen vier von mir untersuchten Krystalle waren nur an dem einen Ende der Hauptaxe ausgebildet, am anderen aber, mit welchem sie angewachsen gewesen, verbrochen. Das ausgebildete, die Flächen der Pyramide P tragende Ende ist beim Erkalten positiv, die am unteren Ende vorhandene unregelmässige Bruchfläche an einem Krystalle positiv, an den drei anderen aber negativ. Ob diese Bruchfläche positiv oder negativ erscheint, hängt von ihrer Lage im ganzen Krystalle ab, wie ich dies bereits beim Topas**) gezeigt habe, wo die parallel mit der Hauptaxe angeschlagenen Durchgänge je nach ihrer Lage im ganzen Krystalle ebenfalls positiv oder negativ erscheinen können. Liegen die angeschlagenen Durchgänge etwas von den ausgebildeten Enden entfernt, so zeigen sie negative Elektricität, die also bei Topasbruchstücken auf den Durchgangsflächen am häufigsten sein wird, ebenso wie sie auch beim Natrolith auf den Bruchflächen dreier Kry-

*) Um eine ungefähre Vorstellung von der Stärke der auf den Natrolithen beobachteten und mit ihren Zahlenwerthen in die Zeichnungen Fig. 1, 2 und 3 eingetragenen elektrischen Spannungen zu gewinnen, wird folgende Angabe dienen. Wenn die Spitze des Platindrahtes (vergl. diese Abhandlungen Bd. 14. S. 380), welche den verschiedenen Punkten des zu untersuchenden Krystalles möglichst genähert wird, der Mitte einer isolirten und durch Verbindung mit dem Pole einer Volta'schen Säule elektrisirten Kupferplatte von 95^{mm} Durchmesser bis auf gleich geringen Abstand wie der Krystallfläche oder Kante nahe gebracht wurde, so entstand ein Ausschlag, der für 1 Element Wasser, Kupfer und Zink, welches mit der Kupferplatte verbunden war, nahe 1 Skalentheil betrug; der grösste bei gleicher Annäherung der Spitze des Platindrahtes an die Seitenkanten der Natrolithkrystalle beobachtete Ausschlag erreichte nur 4 Skalentheile.

**) Diese Abhandl. Bd. 14, S. 439.

stalle auftritt. Dass die Bruchfläche an dem einen Krystall (No. 1, Fig. 1) positiv ist, könnte auch vielleicht durch das An- und Hineinwachsen mehrerer kleiner Natrolithkrystalle in den unteren Theil der Fläche 1 dieses Krystalles hervorgerufen sein.

B. Skolezit.

Die Krystalle des Skolezits gehören zum monoklinoedrischen Systeme; der schiefe Axenwinkel beträgt aber noch 89° 6′, nähert sich also sehr einem rechten. Auch das Prisma ∞P nähert sich, ebenso wie beim Natrolith, sehr einem quadratischen, indem der im klinodiagonalen Hauptschnitt liegende Kantenwinkel 91° 35′ beträgt. Die Polkanten der Grundpyramide P, welche im klinodiagonalen Hauptschnitte liegen, messen 144° 20′ und 144° 40′ und die beiden anderen gleichen 143° 29′. Das Verhältniss der Axen ist hiernach 0,9726 : 1 : 0,3389, weicht also nur wenig von den Axenverhältnissen des Natroliths ab. Als gewöhnliche Combination wird angeführt ∞P, $\frac{P}{2}$ und $-\frac{P}{2}$; sehr häufig sind Zwillinge, bei welchen die Verticalaxe die Zwillingsaxe und ∞P∞ die Zusammensetzungsfläche bildet, und beide Individuen scheinbar, ähnlich wie beim Gyps, einen einfachen Krystall darstellen.

Zu den folgenden Untersuchungen über das thermoelektrische Verhalten des Skolezits dienten zunächst drei Krystalle, die ich von Herrn Th. Schuchardt in Görlitz mit der Angabe des Fundortes Kandallah erhalten hatte. Der dickere derselben ist an beiden Enden verbrochen und seitlich von den Flächen ∞P und ∞P∞ begrenzt. Die beiden anderen sehr dünnen nadelförmigen Krystalle sind nur an dem einen Ende verbrochen und tragen an dem anderen gegen die Säulenaxe geneigte Flächen, von denen die grösseren einem Orthodoma, jedenfalls P∞, angehören. Ausser sehr kleinen Flächen P sind auch noch sehr kleine Flächen eines Klinodomas, wahrscheinlich P∞ wahrzunehmen.

Das thermoelektrische Verhalten dieser Skolezite ist nun einfach folgendes: Die klinodiagonalen Seitenkanten und die in sehr geringer Breite auftretenden Flächen ∞P∞ nebst den anliegenden Prismenflächen ∞P sind beim Erkalten positiv, dagegen die an den Enden der Orthodiagonale liegenden ziemlich breiten Flächen ∞P∞ negativ. Das ausgebildete Ende der Verticalaxe zeigt beim Erkalten sehr starke positive Elektricität; dieselbe geht aber durch Uebergreifen der negativen

Polarität von den Flächen $\infty \breve{P} \infty$ bei zwei Krystallen nach längerer Zeit (nach einer halben oder auch erst nach einer Stunde) zum Theil in eine schwache negative über, während sie bei dem dritten bis zuletzt in positivem Zustande verbleibt. Das untere verbrochene Ende ist beim Erkalten negativ und behält auch diese Polarität bis zum Verschwinden aller Polarität bei.

Die elektrische Erregung der untersuchten Skolezite ist so beträchtlich, dass sie der des Turmalins und brasilianischen Topases gleichkommt, dieselbe öfters sogar übertrifft. Wiederholt wurde die Untersuchung durch den Umstand gestört, dass während des Erhitzens infolge der elektrischen Anziehung zahlreiche Theilchen des Kupferfeilichts, in welches die Krystalle eingebettet waren, auf die frei liegenden Flächen oder Kanten gesprungen waren.

Um eine specielle Untersuchung der einzelnen Flächen zu ermöglichen, musste die Empfindlichkeit des Elektrometers beträchtlich verringert werden, weil sonst bei Annäherung der Spitze des Platindrahtes an den Krystall das Goldblättchen gegen die seitlichen Messingplatten getrieben wurde. Die in Fig. 1—5 Taf. II und III eingetragenen Zahlen sind daher nicht mit den bei den anderen Mineralien verzeichneten Ausschlägen zu vergleichen. Während bei der Untersuchung dieser letzteren (mit Ausnahme des Prehnits und eines Axinites) die Empfindlichkeit des Instrumentes so gross war, dass ein Element Zinn-Kupfer-Wasser einen Ausschlag von 20 bis 25 Skalentheilen gab, wurde die Empfindlichkeit desselben bei den Beobachtungen auf den Skoleziten durch Verringerung der Anzahl der kleinen Elemente Zink-Kupfer-Wasser, welche die Messingplatten zur Seite des Goldblättchens elektrisch erhalten, soweit geschwächt, dass das eben genannte Element Zinn-Kupfer-Wasser nur einen Ausschlag von 1,5 Skalentheilen hervorrief; die Empfindlichkeit war jetzt also ungefähr 15 Mal geringer als bei den übrigen Messungen.

Krystall No. 1. Taf. II, Fig. 1.

Der Krystall No. 1 war zwar an beiden Enden verbrochen (die Bruchfläche am oberen Ende erschien etwas convex, die am unteren dagegen etwas concav); ich stelle ihn aber voran, weil seine grösseren Dimensionen eine genauere Untersuchung seiner Seitenflächen ermöglichten. In Fig. 1 Taf. II sind die einzelnen Flächen ∞P (1 bis 4) und

die beiden Flächen ∞P̄∞ in geringem Abstande neben einander in natürlicher Grösse abgebildet. Oberhalb und unterhalb einer Fläche ∞P̄∞ findet sich die Projection der Bruchfläche am oberen und unteren Ende.

Die in die Zeichnungen eingetragenen Beobachtungen weisen dieselbe Vertheilung der Elektricität nach, wie ich sie bei den Krystallen des Aragonits, Gypses u. s. w. beobachtet habe. Sie ist vollständig entscheidend dafür, dass wir es beim Skolezit durchaus nicht mit einem in der Richtung der verticalen Axe hemimorph gebildeten Krystalle und infolge dessen mit einer nur an den Enden der verticalen Axe mit entgegengesetzten Polaritäten auftretenden elektrischen Vertheilung, wie beim Turmalin, dem Kieselzinkerz, dem Zucker u. s. w. zu thun haben. Weder beim Turmalin noch beim Zucker lassen sich auch nur angenähert ähnliche Verhältnisse in der Vertheilung der Elektricität auf den Seitenflächen wahrnehmen. Ferner hat auch die Zwillingsbildung nichts mit der Erzeugung der Elektricität durch Temperaturveränderungen zu thun. Es gleichen die Zwillinge des Skolezits in ihrer Bildungsweise den analog gebildeten Zwillingen des Gypses; ich habe aber gezeigt, dass die Vertheilung der Elektricität auf diesen Zwillingen genau dieselbe ist, wie auf den entsprechenden Flächen der einfachen Krystalle *).

Auch lässt sich der Umstand, dass an Bruchstücken die beiden Enden der Hauptaxe entgegengesetzte Elektricität zeigen, ja dass selbst beim Zerbrechen einer Skolezitnadel die eine der zuvor in Berührung gewesenen Flächen positiv und die andere negativ auftritt, in keiner Weise als Beweis für eine nach der verticalen Axe eines vollständigen Krystalles auftretende polar-elektrische Vertheilung aufstellen. Denn ganz analoge Erscheinungen habe ich bereits ausführlich beim Topas**) und beim Gypse***) beschrieben. Wird ein sächsischer Topas nahe der Mitte oder in der Nähe des unteren angewachsen gewesenen Endes nach seinem Hauptdurchgange zersprengt, so sind beide Durchgangsflächen, die zuvor mit einander verbunden gewesen, beim Erkalten negativ; liegt der angeschlagene Durchgang dagegen nahe einem ausgebildeten Ende, so zeigt die Durchgangsfläche am kleinen Stücke nega-

*) Diese Abhandl. Bd. 18, S. 487.

**) Diese Abhandl. Bd. 13, S. 439.

***) Diese Abhandl. Bd. 18, S. 490.

tive, am grossen aber, ebenso wie die ausgebildete matte Endfläche, positive Spannung. Beim Gyps treten analoge Vorgänge beim Spalten parallel seinem Hauptdurchgange, also parallel mit den Flächen ∞P∞ auf. Liegen die angeschlagenen Durchgänge nahe der Mitte, so sind, weil die äusseren, ihnen parallelen Krystallflächen negative Elektricität tragen, die beiden Durchgangsflächen positiv; liegt die Stelle, an welcher der Krystall zersprengt wird, weiter nach aussen, so ist der Durchgang am äusseren dünneren Stücke positiv, am anderen dickeren Stücke aber negativ, wenn auch schwächer, als die äussere mit ihm parallele Fläche ∞P∞. In gleicher Weise entsteht, wenn eine Skolezitnadel zerbrochen wird (wie ich mich durch einen speciellen Versuch überzeugt habe), auf der unteren Bruchfläche des oberen nach dem freien Ende hin gelegenen Stückes negative, und auf der mit ihm verbunden gewesenen Bruchfläche, also am oberen Ende des unteren Stückes positive Spannung. Das Anwachsen des unteren Endes wirkt wie eine Verlängerung dieses unteren Endes in's Unbestimmte.

Die Umkehrung der positiven Elektricität auf der oberen Bruchfläche beim Erkalten, welche man nach Verlauf einer halben Stunde beobachtet, wird durch das Hinübergreifen der sehr starken negativen Spannungen auf den Flächen ∞P∞ herbeigeführt; die in die Zeichnung der oberen Fläche eingetragenen Zahlen weisen auf dieser Bruchfläche in der Nähe der eben genannten Flächen ∞P∞ die geringste positive Spannung nach. Uebrigens vermag die negative Elektricität zu dieser Zeit auch nicht die ganze Bruchfläche einzunehmen; der Versuch ergab, dass bei dem vorliegenden Krystalle auf der rechten Seite (also in der Nähe der rechts gezeichneten orthodiagonalen Kante, wo in der Abbildung die Zahl + 16 steht), die positive Elektricität unausgesetzt bis zum Verschwinden aller elektrischen Spannungen fortbestand.

Krystall No. 2 und 3. Taf. II, Fig. 2 und 3.

Die sehr dünnen nadelförmigen Krystalle No. 2 und 3 tragen am oberen Ende gegen die verticale Axe geneigte Flächen; sind daneben aber auch zum Theil etwas verletzt. Ich habe dieselben in Fig. 2 und 3 in einer Ansicht von der vorderen und hinteren Seite (den klinodiagonalen Hauptschnitt nach dem Beschauer hin gerichtet) abgebildet und nur die auf den Seitenkanten, sowie die auf dem oberen und unteren Ende beobachteten Polaritäten durch die Farbe (die positive durch die

bräunliche, die negative durch die grünliche) angedeutet. Auch diese beiden Krystalle zeigen trotz ihrer Kleinheit ausserordentlich starke elektrische Spannungen. Auf dem oberen Ende des Krystalles No. 3 bleibt die positive Spannung dauernd bestehen, während auf dem oberen Ende beim Krystall No. 2 nach Verlauf einer Stunde eine schwache negative Elektricität erscheint.

Krystallgruppe No. 4 und 5. Taf. III, Fig. 4 und 5.

Schliesslich will ich noch die elektrische Vertheilung auf zwei dem hiesigen mineralogischen Museum gehörigen radial stänglichen Skolezitmassen angeben, die sich ebenfalls durch starke elektrische Erregungen auszeichneten. Ich habe versucht, durch die Zeichnungen in Fig. 4 und 5 Taf. III eine ungefähre Ansicht derselben zu geben. Die Zeichnungen sind übrigens nur in halber linearer Grösse ausgeführt. Die abgebildeten, durch Bruch entstandenen Flächen sind selbstverständlich keine ebenen, sondern durch die auf ihnen hervortretenden Seitenflächen der einzelnen stängelförmigen Krystalle gefurcht und überhaupt uneben. Die einzelnen Krystallstängel oder Fasern sind öfter auch schon in der Mitte der Flächen abgebrochen. An dem oberen Ende, nach welchem hin die Fasern divergiren, finden sich auch Partieen ganz anders gerichteter Fasern, die ich in der Zeichnung ungefähr angedeutet habe.

Das Stück No. 4, Fig. 4 Taf. III bildet fast eine dreiseitige Pyramide, deren Spitze in E liegt und deren drei Seitenflächen die Zeichnungen EA, EB und EC darstellen. In a ist eine dunkelschwarzgrün gefärbte amorphe Masse von zersetztem Basalt eingewachsen; kleinere Partieen dieser Substanz finden sich auch noch an einigen anderen Stellen. Die auf den gezeichneten Flächen beobachteten elektrischen Spannungen sind in diese Abbildungen eingetragen. Die positive Polarität tritt auf an den divergirenden Enden A, B und C, und zieht sich über die Mitte hinab bis gegen die Spitze E, an welcher negative Elektricität erscheint.

Das Vorwalten der positiven Elektricität auf diesen Flächen hängt jedenfalls von dem Umstande ab, dass die einzelnen Krystallstängel vorzugsweise mit den Flächen ∞P an die Oberfläche treten.

Bei den mannichfachen Verwachsungen der Arragonitkrystalle, welche in der Vertheilung der Elektricität auf ihren Seitenflächen genau

den Krystallen des Skolezits gleichen, habe ich gezeigt*), dass überall da, wo die positiven Flächen ∞P die Oberfläche bilden, die positive Elektricität, dagegen überall, wo Theile der Flächen $\infty \check{P} \infty$ an der Oberfläche sichtbar sind, die negative Elektricität erscheint. Hiernach steht zu erwarten, dass auch die durch den Bruch in den radialstänglichen Massen des Skolezits entstandenen Flächen negative Spannung zeigen können, wenn nämlich die in dem Bruche liegenden Flächen der einzelnen Krystalle den negativen Flächen $\infty \check{P} \infty$ angehören.

Dieses Verhalten zeigt nun in der That das aus ähnlichen stänglichen Massen gebildete Handstück No. 5. Dasselbe bildet ungefähr eine vierseitige Pyramide, von deren Seitenflächen zwei, *A* und *D* breiter sind, als die beiden anderen, *B* und *C*; Fig. 5 Taf. III stellt dieselben in halber linearer Grösse dar. Zwei dieser Flächen *AE* und *BE* sind an den divergirenden Enden, in der Mitte bis gegen das Centrum der Fasern hin positiv, und nur ganz in der Nähe dieses Centrums (der Spitze *E*) findet sich schwache negative Spannung, die namentlich auf der Fläche *BE* nur dann deutlich hervortritt, wenn alle übrigen Flächenstücke mit Ausnahme des an der Spitze *E* gelegenen Theiles mit Kupferfeilicht bedeckt werden. Dagegen erscheinen die beiden anderen Flächen *CE* und *DE* in ihrer ganzen Ausdehnung negativ.

Datolith.

Der Datolith wurde 1806 von Esmark (daher auch Esmarkit) auf den Magneteisensteinlagern bei Arendal entdeckt und nach seiner körnigen Beschaffenheit benannt. Seine Krystalle gehören zum monoklinoedrischen Systeme; indess ist die Abweichung des Winkels zwischen der Hauptaxe und der Klinodiagonale von einem rechten ausserordentlich gering; sie beträgt nur 9′, sodass von manchen Krystallographen der Datolith dem rhombischen Systeme zugezählt wird. Aber auch bei dieser letzteren Annahme muss zugestanden werden, dass das Auftreten der verschiedenen Gestalten nicht dem rhombischen, sondern dem monoklinoedrischen Typus entspricht.

---

*) Diese Abhandl. Bd. 15, S. 382.

Die gewöhnlich auftretenden Krystallgestalten sind: 0P, ∞P, ∞Ꝑ2, ∞Ꝑ∞; — ½P, Ꝑ2; Ꝑ∞ und ½Ꝑ∞. Dazu kommen noch ∞Ꝑ∞, Ꝑ∞, und mehrere Pyramiden ⅔Ꝑ2, Ꝑ2 u. s. w.

Aus den gemessenen Winkeln ergeben sich die Verhältnisse der Klinodiagonale zur Orthodiagonale und zur verticalen Axe = 1,2690 : 1 : 1,2656, während der schiefe Axenwinkel 89° 51′ beträgt. Auffällig ist die angenäherte Gleichheit der verticalen Axe und der Klinodiagonale, sodass, wenn man die beiden ebengenannten Axen als gleich und den Axenwinkel als rechten nimmt, und die Orthodiagonale aufrecht stellt, das Axenkreuz dem tetragonalen Systeme entsprechen würde *).

Der Datolith besteht aus 37,50 Kieselsäure, 21,88 Borsäure, 35,00 Kalk und 5,62 Wasser, welches letztere erst in starker Glühhitze entweicht.

Ich habe sieben aus Andreasberg stammende Krystalle auf ihr thermoelektrisches Verhalten untersucht. Bei der Uebereinstimmung der erhaltenen Resultate wird es genügen, nur drei derselben näher zu beschreiben. Von diesen letzteren erhielt ich No. 1 und 2 von Herrn Professor Weisbach aus den Freiberger Sammlungen, und No. 3 von Herrn Professor Karsten aus der Universitätssammlung in Kiel.

Die Vertheilung der Elektricität auf einem vollständig ausgebildeten Krystalle gestaltet sich sehr einfach: die Endflächen sammt den klinodiagonalen Seitenkanten und den diesen anliegenden Theilen der Prismenflächen sind negativ, die orthodiagonalen Seitenkanten nebst den ihnen benachbarten Theilen der Prismenflächen aber positiv. Ist das eine Ende der verticalen Axe verbrochen, so kann es je nach seiner Lage zum ganzen Krystalle noch negativ oder auch positiv, oder theils negativ, theils positiv sein.

Es ist merkwürdig, dass diese Vertheilung auch mit der oben angeführten Auffassung der Krystalle als dem tetragonalen Systeme angehörig, nicht im Widerspruch ist. Bei einer solchen Annahme würde der Datolith den Krystallen des Apophyllites, des Wiluites u. s. w. gleichen; die Hauptaxe trüge an ihren Enden die positive Polarität, während die negative den Nebenaxen angehörte.

*) Dana glaubt auch, die im Tunnel von Bergen Hill in New Jersey vorkommenden sehr flächenreichen Krystalle so stellen zu müssen, dass die oben als Orthodiagonale betrachtete Axe zur verticalen Axe genommen wird.

Krystall No. 1. Taf. III, Fig. 1.

Der Fig. 1, Taf. III in natürlicher Grösse abgebildete Krystall ist an seinem oberen Ende und an den Seiten von Krystallflächen begrenzt, die ziemlich gut ausgebildet sind; nur an der (in der Zeichnung der oberen Endfläche) durch $\alpha\beta\gamma\delta$ bezeichnete Stelle ist ein Mangel, indem das eben angedeutete Stück ungefähr 3^{mm} tiefer liegt, als der übrige Theil der Endfläche. Es sieht aus, als ob ein kürzerer Krystall in den längeren so eingewachsen, dass er am oberen Ende um die angegebene Grösse kürzer ist, dagegen mit seinen Seitenflächen genau in die Ebenen der Seitenflächen des grösseren Krystalles fällt. Am unteren Ende ist der Krystall verbrochen. Seine Masse ist nur durchscheinend.

Die Hauptbegrenzung bilden die Flächen 0P und ∞P; dazu treten noch kleine Flächen von ∞₽2, ₽∞, ∞₽∞, ₽2, ₽2.

Während die eine negative Zone auf der einen klinodiagonalen Kante ziemlich ausgedehnt ist, erscheint sie auf der gegenüberliegenden nur in den mittleren und unteren Theilen. Die untere unebene Bruchfläche ist zum grössten Theile positiv, und nur in der Nähe der schwächeren negativen Seitenkante, gewissermassen zur Ergänzung, negativ; die negative Zone scheint auf dieser Seite abwärts gedrückt.

Krystall No. 2. Taf. III, Fig. 2.

Der in Fig. 2, Taf. III in natürlicher Grösse dargestellte Krystall gleicht in seiner Masse dem vorhergehenden; doch finden sich darin auch kleinere durchsichtige Partieen. Er wird hauptsächlich begrenzt von den Flächen 0P, ∞P und ∞₽2, welche letzteren Flächen bei ihm ausgedehnter sind, als bei dem vorhergehenden. Ausserdem trägt er noch die Flächen ₽∞, ∞₽∞, ₽∞ und ½P.

Die unregelmässige Bruchfläche am unteren Ende ist in ihrer ganzen Ausdehnung positiv; die Intensität dieser positiven Spannung ist jedoch geringer, als die der negativen auf der oberen Fläche 0P.

Krystall No. 3. Taf. III, Fig. 3.

Das Krystallbruchstück No. 3 ist seitlich nur in der einen in Fig. 3 Taf. III in natürlicher Grösse abgebildeten Hälfte von Krystallflächen (∞P und ∞₽2) begrenzt, während die andere Hälfte verbrochen ist, wie dies auch die Abbildung der oberen Endfläche zeigt. Das untere

Ende trägt eine sehr unebene Bruchfläche. Die Flächen $\infty P 2$ sind an diesem Krystalle grösser, als bei den beiden vorherbeschriebenen Krystallen. Sehr schmal sind die Flächen $\infty P \infty$.

Auf dem ausgebildeten Theile findet sich die Elektricität in normaler Weise vertheilt; dagegen ist der von Bruchflächen gebildete, in der Zeichnung nicht dargestellte Theil der seitlichen Begrenzung überall positiv, wenn auch schwächer gegen diejenigen Stellen hin, wo die klinodiagonalen Seitenkanten liegen würden. Die Bruchfläche am unteren Ende ist gleichfalls positiv, während die Fläche 0P am oberen Ende eine starke negative Spannung besitzt.

Axinit.

Der Axinit wurde 1781 von Saussure in den Gängen der Hornblendeschiefer an der Balme d'Auris bei Bourg d'Oisans (südöstlich von Grenoble im Dep. der Isère) entdeckt. Seine Krystalle beschrieb zuerst Rome de l'Isle und führt sie als *schorl lenticulaire* auf. Werner nannte ihn nach seinem Fundorte Thum in Sachsen Thumerstein; den Namen Axinit hat Hauy eingeführt.

Die Krystalle des Axinits gehören zum triklinoedrischen Systeme, und in Betreff ihrer Stellung und der Auffassung ihrer Flächen sind bis jetzt sehr verschiedene Ansichten ausgesprochen worden, so dass man in Bezug hierauf nur die Worte Hauy's wiederholen kann: „Tout concourt à offrir un de ces problèmes compliqués, qui, après avoir été rétournés de mille manières, ne laissent pas l'esprit pleinement satisfait des resultats.“

Da die bisherigen Untersuchungen über die Thermoelektricität der Krystalle ausnahmslos eine enge Beziehung zwischen der Lage der elektrischen Pole und der krystallographischen Axen gezeigt haben, so liess sich erwarten, dass das elektrische Verhalten des Axinits über die Lage der krystallographischen Axen Aufschluss geben würde. Diese Erwartung scheint sich in der That erfüllt zu haben, indem die elektrische Vertheilung sich nur an eine der bisherigen Auffassungen anschliesst, und zwar an die von Hauy angenommene*). Ich werde die von Hauy

*) Wenn der Umstand, dass die Flächen *P* und *u* oft parallel mit ihren Combi-

gewählte Stellung daher auch sogleich den Abbildungen der Krystalle zu Grunde legen, und die einzelnen Flächen derselben mit den ihnen von Hauy beigelegten Buchstaben bezeichnen.

Ein unüberwindliches Hinderniss für die richtige Auffassung der elektrischen Vertheilung auf den Axiniten bildete für mich lange Zeit der Mangel an ringsum vollständig ausgebildeten Krystallen, und erst nach Erlangung solcher war es mir möglich, die Lage der elektrischen Zonen mit Sicherheit zu bestimmen.

Die Eigenschaft des Axinits, durch Temperaturänderung elektrisch zu werden, ist von Brard entdeckt und in dem *Manuel du Minéralogiste et du Géologue voyageur* beschrieben worden*). Nach Hauy soll nur ein Theil der Axinitkrystalle elektrisch sein; ein Ausspruch, der nur durch die damaligen unvollkommenen Hülfsmittel zur Wahrnehmung schwacher elektrischer Spannungen veranlasst ist. Befangen in der Ansicht, dass alle elektrischen Krystalle Verletzungen der Symmetriegesetze zeigen müssten, fügt Hauy dann noch hinzu**): „Ayant observé depuis avec attention les cristaux d'axinite, j'en ai trouvé plusieurs, dont les formes dérogeaient à la symmétrie, et ils étaient précisement de ceux, qui deviennent électriques par la chaleur.“ Indess ein Hemimorphismus, wie ihn Hauy unter der Verletzung der Symmetrie versteht, und wie er sich beim Turmalin, Kieselzinkerz u. s. w. findet, existirt beim Axinit nicht; seine Krystalle tragen an den Enden jeder Axe im Allgemeinen dieselben Flächen, wenn auch öfter in verschiedener Ausdehnung; das gänzliche Fehlen einer Fläche ist nur ein zufällig eingetretener Mangel, wie er fast bei allen Mineralien vorkommt.

Ueber die Art der elektrischen Vertheilung macht Hauy keine Andeutung; die erste bestimmte Angabe hierüber findet sich in der Abhandlung von Riess und G. Rose über die Pyroelektricität der Mineralien***). Es heisst daselbst: „Stets fand sich ein antiloger (d. h. beim Erkalten positiver) Pol auf der kleinen gewöhnlich dreieckigen

---

nationskanten gestreift sind, eine verticale Stellung dieser Flächen zu fordern scheint, so würde doch eine solche Stellung den auf den Axinitkrystallen beobachteten elektrischen Vertheilungen nicht gut entsprechen.

*) Hauy, *Traité du minéral.* II. Ed. T. II. p. 560.

**) Hauy, *Traité de minéral.* II. Ed. T. II. p. 560.

***) Abhandl. der Berl. Akad. 1843. S. 82.

Fläche n*), ein analoger (d. h. beim Erkalten negativer) Pol unterhalb der stets sehr glänzenden Fläche s, an der scharfen Ecke zwischen den Flächen u, x und dem hinteren P, und ein zweiter an der ihr parallelen oberen Ecke. Die Krystalle waren alle an einer Seite verbrochen, so dass sich keiner unter ihnen fand, welcher beide Flächen n zeigte, aber an einigen fand sich die linke obere, an anderen die rechte untere, und beide waren stets antilog elektrisch; im Allgemeinen die antilogen Pole stärker als die analogen Pole.“

Wie hieraus erhellt, benutzten Riess und G. Rose bei ihren Untersuchungen nur abgebrochene Krystalle; dieselben stammten vorzugsweise aus dem Dauphiné. Nach ihrer Angabe konnten zwei unter den 15 von ihnen geprüften Krystallen nicht elektrisch gemacht werden, darunter ein um und um ausgebildeter Krystall. Es ist aber aus ihrem Ausdrucke nicht zu ersehen, ob der ringsum ausgebildete Krystall auch dem Dauphiné angehörte; stammt derselbe von einem anderen Fundorte, z. B. vom Scopi, so reichten allerdings die damaligen Elektrometer nicht hin, um die elektrische Spannung auf seinen Flächen mit Sicherheit zu bestimmen.

I. Krystalle vom Scopi.

Ich habe sieben ringsum ausgebildete Krystalle vom Scopi untersucht, und dieselben in zwei Ansichten, von denen die erste die vordere, die zweite die hintere heissen möge, auf Tafel III, Fig. 1 bis 7 in doppelt linearer Vergrösserung abgebildet. Die Flächen der vorderen Seite sind mit dem Buchstaben u, r, p, s und x, und die parallelen Flächen der hinteren Seite mit den entsprechenden Buchstaben u', p', r', s' und x' bezeichnet.

Die Krystalle sind an Grösse und Gestalt fast genau gleich, und zeigen nur durch die mehr oder weniger grosse Entwickelung der Flächen s und x, sowie s' und x' geringe Unterschiede.

Auf beiden Flächen r und r' findet sich bei sämmtlichen Krystallen eine Bildung, als ob ein anderer dünner Axinitkrystall in ein wenig abweichender Richtung auf der Fläche r von der Kante (ru') durch den Krystall hindurch gesteckt wäre, so dass sein anderes Ende auf der

*) Diese Fläche n liegt da, wo die Flächen r, P und u', oder r', P' und u zusammenstossen.

Fläche r' in der Nähe der Kante $(r'u)$ wieder hervortritt. Ich könnte auch sagen, der Krystall erscheint auf der Fläche r in der Nähe der Kante (ru') und auf der Fläche r' in der Nähe der Kante $(r'u)$ etwas aufgeblättert.

Die Krystalle sind durch beigemengten Chlorit dunkelgrün gefärbt; die Beimengung ist aber so fein, dass die Flächen meistens stark glänzen. Auf den Flächen r zeigt sich eine schwache vertikale, und auf den Flächen u eine schwache der Kante up parallele Streifung, während auf den Flächen p, s und x eine Streifung nicht wahrzunehmen ist.

Krystall No. 1—6. Taf. III, Fig. 1—6.

Es wird zweckmässig sein, die Beobachtungen an den sechs Krystallen No. 1 bis 6 zusammenzufassen, da ja im Allgemeinen bei der fast völligen Gleichheit derselben an Gestalt und Grösse sehr wesentliche Abweichungen nicht zu erwarten sind.

Die Krystalle werden vorzugsweise von den Flächen r, u und p, sowie von den mit ihnen parallelen r', u' und p' begrenzt. Stellen wir, wie dies in der Zeichnung geschehen ist, die von den Flächen r, u, r' und u' gebildeten Kanten vertical, so bilden die eben genannten Flächen ein verticales Prisma mit rhomboidischem Querschnitte, auf welches p und p' als doppelt schiefe Endflächen aufgesetzt sind.

Ausserdem treten noch, wenn auch bei den meisten nur in geringer Breite, die Flächen s und s' auf, welche die Kanten ru und $r'u'$ abstumpfen, und mit p und resp. p' eine horizontale Kante bilden; sie lassen sich also als die Flächen eines Pinakoids betrachten. Bei den Krystallen No. 1, 2 und 3 sind alle Flächen s und s' sehr schmal, bei No. 4, 5 und 6 dagegen breiter, bei No. 6 sogar breiter als die benachbarten Flächen u und u'.

Die kleinen Flächen x und x' bilden mit den Flächen s und p', sowie s' und p gleichfalls horizontale Kanten, und gehören also einem Doma an. Sie fehlen bei dem Krystalle No. 1 gänzlich und sind bei No. 2 und 3 nur sehr klein. Bei No. 3 findet sich am unteren Ende der Fläche u eine kleine dreieckige Fläche; ihr Durchschnitt mit u ist aber nicht der Kante pu parallel. Ihre matte Beschaffenheit lässt keine genauere Bestimmung zu.

Die zweite rechts abgebildete Ansicht, die oben als die Ansicht

der hinteren Seite bezeichnet ist, entsteht, wenn der Krystall aus der ersten links gezeichneten Lage um die Kante ur' um 180° gedreht wird.

Ich habe die Zeichnungen in doppelt linearer Grösse ausgeführt, um wenigstens den grössten Theil der auf den einzelnen Flächen ausgeführten Messungen eintragen zu können.

Aus der Gesammtheit der auf den Krystallen No. 1 bis 6 gemachten Beobachtungen ergeben sich nun folgende Resultate:

Die schiefen Endflächen p und p' zeigen beim Erkalten negative Elektricität, und zwar liegt die grösste Stärke derselben in der Mitte dieser Flächen, und nimmt nach den Rändern hin ab. Zwischen den beiden Rändern der Flächen p und p', welche an die Flächen r und r' grenzen, ist in der Stärke der elektrischen Spannung kein wesentlicher Unterschied; die kleinen Differenzen können einfach durch den Umstand bedingt sein, dass die Spitze des Platindrahtes der Fläche nicht immer genau in gleichem Abstande von ihrem Rande genähert wurde. Auch zwischen den beiden an die Flächen u und u' anstossenden Rändern ist kein erheblicher Unterschied in der Intensität wahrzunehmen, ausser beim Krystalle No. 6, wo die negative Spannung auf p gegen u und auf p' gegen u' hin etwas grösser ist als an dem gegenüberliegenden Rande. Die Endpunkte der verticalen Axe tragen also, wenn ich diesen Ausdruck gebrauchen darf, die negativen Pole.

Von den beiden gegen diese verticale Axe schiefen Axen endigt die eine in den Kanten ru' und ur', die andere in den Kanten ru und $r'u'$.

Die verticalen Kanten ru' und ur' sind nun positiv, und zwar nimmt die positive Spannung sowohl auf den Flächen r und r', als auch auf den Flächen u und u' *) gegen die Kanten ru' und $u'r$ in sehr bestimmter Weise zu, so dass auf ihnen also die positiven Pole liegen. Eine genauere Durchsicht der in die Figuren eingetragenen Messungen zeigt aber ferner, dass auf sämmtlichen Flächen r am linken (an u' grenzenden) Rande die positiven Spannungen von oben nach unten hin wachsen, während sie auf den Flächen r' am linken (an u grenzenden) Rande in der entgegengesetzten Richtung von unten nach oben hin wachsen. Die Maxima der positiven Spannung liegen also auf der Kante $u'r$ am unteren und auf der Kante ur' am oberen Ende; ihre Ver-

*) Auf einigen der Flächen u und u' konnte die elektrische Spannung nicht mit Sicherheit bestimmt werden.



bindungslinie steht also auffallender Weise fast senkrecht auf der verticalen Axe. Da die positive Polarität dieser Kanten der negativen der Endflächen *p* und *p'* entgegengesetzt ist, so tritt sie stark hervor; wie auch bei allen früher untersuchten Krystallen des rhombischen und des monoklinoedrischen Systemes stets beobachtet wurde, dass diejenige Polarität auf den Seitenkanten und Seitenflächen, welche der Polarität der Endflächen entgegengesetzt ist, besonders kräftig ist, und sich so beträchtlich ausbreitet, dass dadurch die entgegengesetzte (d. h. die mit der auf den Endflächen gleichnamige) Elektricität auf den Seitenkanten und Seitenflächen nur schwach und in geringer Ausdehnung erscheint, ja öfter auf den ihr entsprechenden Kanten ganz unterdrückt wird. Als Beweis dafür mag es genügen, auf die in meinen elektrischen Untersuchungen angeführten Beobachtungen an den sächsischen Topasen No. 1 bis 5 *), und an den Orthoklasen No. 1 bis 6 **) zu verweisen. Da bei diesen Krystallen die Endflächen, entgegengesetzt wie beim Axinit, positiv sind, so tritt auf den Seitenflächen und Seitenkanten die negative Elektricität in grosser Ausdehnung auf, während die positive Zone an den ihr entsprechenden Seitenkanten eine nur geringe Breite besitzt oder auch wohl gar nicht oder nur in einem Theile der Kanten sichtbar wird.

Da beim Axinit die Endflächen negativ sind, so werden wir also auf den Seitenflächen und Kanten keine ausgedehnten negativen Zonen zu erwarten haben, ja wir werden sie an den betreffenden Stellen bisweilen gar nicht nachzuweisen vermögen. Diese negativen Pole müssen beim Axinit an den Kanten *ru* und *r' u'* auftreten, und sie finden sich auch daselbst an dem Krystall No. 1, während sie am Krystall No. 2 nur an der Kante *ru*, und beim Krystall No. 3 nur an der Kante *r'u'* wahrgenommen werden.

Einen eigenthümlichen Einfluss scheint die Verbreiterung der Flächen *s* und *s'*, welche die negativen Kanten *ru* und *r' u'* abstumpfen, auszuüben, indem sie die negative Polarität daselbst verstärkt. Am breitesten treten diese Flächen *s* und *s'* am Krystall No. 6 auf; infolge dessen erscheint nun an diesen Stellen eine so starke negative Polarität, dass sie die positive der Flächen *u* und *u'* verdrängt oder wenigstens vernichtet. Das Auftreten einer stärkeren und ausgedehnteren negativen

*) Diese Abh. Bd. 14. Taf. I. Fig. 1—5.

**) Diese Abh. Bd. 18. Taf. II. Fig. 1—6.

Zone an den Kanten *ur* und *u'r'*, und die grössere Ausdehnung der sie abstumpfenden Flächen *s* und *s'* entstammen jedenfalls derselben Ursache.

Die normale elektrische Vertheilung an einem vollkommenen Axinitkrystalle ist also die folgende: Auf den schiefen Endflächen *p* und *p'* sowie an den stumpfen Seitenkanten *ru* und *r'u'* liegen negative, an den Enden der scharfen Seitenkanten *ru'* und *r'u* dagegen positive Zonen. Dass das Maximum der positiven Spannung bei den vorstehend beschriebenen Krystallen an der Kante *ru'* am unteren, an der Kante *r'u* aber am oberen Ende liegt, ist wohl eine Folge ihrer speciellen Dimensionsverhältnisse.

Krystall No. 7. Taf. III, Fig. 7.

Schon öfter habe ich darauf hingewiesen, dass Fälle vorkommen, wo durch innere Vorgänge bei der Bildung der Krystalle eine Veränderung in der elektrischen Vertheilung bewirkt wird, ohne dass sich auf der äusseren Oberfläche der Krystalle irgend ein Anzeichen für eine solche Abweichung von der normalen Vertheilung der Elektricität auffinden lässt. So ist es z. B. eine ziemlich häufige Erscheinung an den gelben und grünen Beryllen*), dass von den Seitenflächen, welche normal die negative Spannung darbieten, eine oder selbst zwei positiv erscheinen.

In ähnlicher Weise ist nun auch beim Axinit No. 7 eine Störung eingetreten, welche sich äusserlich durch kein Anzeichen verräth: es erscheint nämlich die Fläche *r'* in ihrer ganzen Ausdehnung negativ. Während auf dieser Fläche sonst die positive Elektricität von dem linken Rande *r'u* nach dem rechten *r'u'* hin abnimmt, steigt auf der negativen Fläche *r'* No. 7 die negative Spannung in derselben Richtung; ihre Aenderung findet also in demselben Sinne statt wie auf den positiven Flächen *r'*, d. h. in beiden Fällen geht sie in der Richtung von rechts nach links nach der negativen Seite hin. Auch auf der benachbarten Fläche *u* ist wohl durch dieselbe Ursache die positive unterdrückt; jedoch steigt auf ihr die negative vom rechten Rande (*u'r'*) zum linken (*ur* oder *us*). Auf der Kante *ur'* liegt also ein negatives Minimum als Anzeichen der hier unterdrückten positiven Zone.

Zum Ersatz für die auf *r'* und *u* unterdrückte positive Zone tritt

*) Siehe diese Abh. Bd. 18, Taf. II, Beryll No. 3—6, und No. 7—10.



nun die positive Spannung auf der Fläche *r* mit einer Stärke auf, wie sie bei keinem der früheren sechs Krystalle beobachtet worden ist.

II. Krystalle von Bourg d'Oisans.

Krystall No. 8. Taf. III, Fig. 8.

Es ist mir geglückt, einen ringsum fast ganz vollkommen ausgebildeten Krystall von Bourg d'Oisans zu erlangen. Fig. 8 zeigt seine beiden Ansichten in natürlicher Grösse. Nur an der durch den Buchstaben *a* bezeichneten Stelle der Kante *up'* scheint er bei seiner Bildung mit dem Rande aufgesessen zu haben. Seine Masse ist, so weit sie rein, durchsichtig und fast nelkenbraun.

Die Elektricität, welche nach einer Erwärmung bis 120° auftrat, war so stark, dass die Empfindlichkeit des Elektrometers auf $\frac{1}{8}$ der bei den vorhergehenden Krystallen benutzten reducirt werden musste, um überhaupt vergleichbare Messungen ausführen zu können.

Die Flächen *p*, *r* und *u* besitzen an diesem Krystalle ganz andere Ausdehnungsverhältnisse als bei den vorhergehenden, was den Abbildungen ein ganz anderes Ansehen giebt; die neben dieselben gesetzten Buchstaben werden indess das Verständniss derselben leicht vermitteln.

Die Aenderungen in der Grösse und Gestalt der einzelnen Flächen sind nun nicht ohne Einfluss auf das Verhalten der elektrischen Vertheilung, und es dürfte sehr schwer sein, aus diesem Krystalle allein das Gesetz der elektrischen Vertheilung auf den Axiniten herzuleiten. Nachdem wir jedoch dasselbe durch die vorhergehenden Beobachtungen kennen gelernt, wird sich das Verständniss für die auf diesem Krystalle auftretende Vertheilung leicht gewinnen lassen.

Die beiden Endflächen *p* und *p'* sind negativ, jedoch tritt auf dem untern linken Theil von *p* und auf dem obern rechten Theil von *p'* bereits die positive Spannung der gegen früher sehr verkleinerten Flächen *r* und *r'* hinüber. Die Flächen *r* und *r'* sind positiv; ein sehr starker positiver Pol entwickelt sich auf der Kante *ru'*, während der andere auf *ur'* schwächer ist. Diese Schwächung des letzteren Poles hängt mit dem Umstande zusammen, dass auch die positive Spannung auf der Fläche *u* durch die von der Kante *ru* sich ausbreitende negative Zone

unterdrückt ist. Dagegen erscheint der negative Pol auf der Kante $r' u'$ nur im oberen Theile der Fläche s'.

Riess und G. Rose geben in ihrer oben S. 47 erwähnten Abhandlung keine Abbildungen der von ihnen geprüften Krystalle, sondern tragen die Pole einfach in eine krystallographische Projection ein. Wenn nun die untersuchten Krystalle ähnlich dem Fig. 8 abgebildeten Krystalle gestaltet waren, so ersieht man, dass ihre Angaben über die Lage der zwei positiven Pole und des einen Paares der negativen Pole nahe die Stellen treffen, welche sich aus den vorstehenden Beobachtungen für dieselben ergeben haben.

Uebrigens erleidet die elektrische Vertheilung durch die Art der Anwachsung der Krystalle und der durch Lostrennen vom Gestein gebildeten Bruchflächen oft sehr beträchtliche Verschiebungen, wie ich mich durch die Beobachtung derselben auf 17 Krystallbruchstücken und aufgewachsenen Krystallen überzeugt habe. Es mag genügen, die auf zwei derselben ausgeführten Messungen mitzutheilen. Beide gehörten der Freiberger Sammlung.

Krytall No. 9. Taf. III, Fig. 9.

In das Fig. 9, Taf. III. in einer Ansicht dargestellte Bruchstück, dessen Flächen durch die beigefügten Buchstaben leicht erkenntlich sind, habe ich die beiden Polaritäten nur durch Farben eingetragen. Wie ersichtlich stimmt die auf ihm beobachtete Vertheilung mit der auf der entsprechenden Stelle der hinteren Ansicht des Krystalles No. 1 überein.

Krystall No. 10. Taf. III, Fig. 10.

Der Fig. 10, Taf. III. in einer Ansicht abgebildete Krystall No. 10 sass mit dem unteren Ende bei $\alpha\beta\gamma$ sowie mit einem sehr grossen Theile der nicht abgebildeten hinteren Seite noch im Gestein, und wurde in diesem Zustande untersucht. Auf ihm tritt nun aber eine merkliche Verschiebung der elektrischen Vertheilung ein, indem die negative Zone auf der Fläche s', wie dies auch z. B. an der entsprechenden Stelle des Krystalles No. 2 geschehen, unterdrückt ist, und dafür die negative Zone der Fläche p (auf der nicht abgebildeten Seite) über die Kante pu' auf u' herübergreift.

Inhalt.

Berichtigung.

Auf Tafel II ist in der Abbildung des Coelestines No. 3 anstatt $\frac{1}{2}\bar{P}\infty$ zu setzen ∞P.

FÜNFTER BAND. Mit 30 Tafeln. hoch 4. 1861. Preis 24 ℳ.

W. G. HANKEL, Elektrische Untersuchungen. Vierte Abhandlung. 1859. 2 ℳ.

P. A. HANSEN, Auseinandersetzung einer zweckmässigen Methode zur Berechnung der absoluten Störungen der kleinen Planeten. Dritte Abhandlung. 1859. 7 ℳ 20 ℛ.

G. T. FECHNER, Ueber einige Verhältnisse des binocularen Sehens. 1860. 5 ℳ 60 ℛ.

G. METTENIUS, Zwei Abhandlungen: I. Beiträge zur Anatomie der Cycadeen. Mit 5 Tafeln. II. Ueber Seitenknospen bei Farnen. 1860. 3 ℳ.

W. HOFMEISTER, Neue Beiträge zur Kenntniss der Embryobildung der Phanerogamen. II. Monokotyledonen. Mit 25 Tafeln. 1861. 8 ℳ.

SECHSTER BAND. Mit 10 Tafeln. hoch 4. 1864. Preis 19 ℳ 20 ℛ.

W. G. HANKEL, Elektrische Untersuchungen. Fünfte Abhandlung. 1861. 1 ℳ 60 ℛ.

——— Messungen über die Absorption der chemischen Strahlen des Sonnenlichtes. 1862. 1 ℳ 20 ℛ.

P. A. HANSEN, Darlegung der theoretischen Berechnung der in den Mondtafeln angewandten Störungen. Erste Abhandlung. 1862. 9 ℳ.

G. METTENIUS, Ueber den Bau von Angiopteris. Mit 10 Tafeln. 1863. 4 ℳ 40 ℛ.

W. WEBER, Elektrodynamische Maassbestimmungen, insbesondere über elektrische Schwingungen. 1864. 3 ℳ.

SIEBENTER BAND. Mit 5 Tafeln. hoch 4. 1865. 17 ℳ.

P. A. HANSEN, Darlegung der theoretischen Berechnung der in den Mondtafeln angewandten Störungen. Zweite Abhandlung. 1864. 9 ℳ.

G. METTENIUS, Ueber die Hymenophyllaceae. Mit 5 Tafeln. 1864. 3 ℳ 60 ℛ.

P. A. HANSEN, Relationen einestheils zwischen Summen und Differenzen und anderntheils zwischen Integralen und Differentialen. 1865. 2 ℳ.

W. G. HANKEL, Elektrische Untersuchungen. Sechste Abhandlung. 1865. 2 ℳ 80 ℛ.

ACHTER BAND. Mit 3 Tafeln. hoch 4. 1868. Preis 24 ℳ.

P. A. HANSEN, Geodätische Untersuchungen. 1865. 5 ℳ 60 ℛ.

——— Bestimmung des Längenunterschiedes zwischen den Sternwarten zu Gotha und Leipzig unter seiner Mitwirkung ausgeführt von Dr. Auwers und Prof. Bruhns im April des Jahres 1865. Mit 1 Figurentafel. 1866. 2 ℳ 80 ℛ.

W. G. HANKEL, Elektrische Untersuchungen. Siebente Abhandlung. 1866. 2 ℳ 40 ℛ.

P. A. HANSEN, Tafeln der Egeria mit Zugrundelegung der in den Abhandlungen der Königl. Sächs. Gesellschaft der Wissenschaften in Leipzig veröffentlichten Störungen dieses Planeten berechnet und mit einleitenden Aufsätzen versehen. 1867. 6 ℳ 80 ℛ.

——— Von der Methode der kleinsten Quadrate im Allgemeinen und in ihrer Anwendung auf die Geodäsie. 1867. 6 ℳ.

NEUNTER BAND. Mit 6 Tafeln. hoch 4. 1871. Preis 18 ℳ.

P. A. HANSEN, Fortgesetzte geodätische Untersuchungen, bestehend in zehn Supplementen zur Abhandlung von der Methode der kleinsten Quadrate im Allgemeinen und in ihrer Anwendung auf die Geodäsie. 1868. 5 ℳ 40 ℛ.

——— Entwickelung eines neuen veränderten Verfahrens zur Ausgleichung eines Dreiecksnetzes mit besonderer Betrachtung des Falles, in welchem gewisse Winkel voraus bestimmte Werthe bekommen sollen. 1869. 3 ℳ.

——— Supplement zu der geodätische Untersuchungen benannten Abhandlung, die Reduction der Winkel eines sphäroidischen Dreiecks betr. 1869. 2 ℳ.

W. G. HANKEL, Elektrische Untersuchungen. Achte Abhandlung. 1870. 2 ℳ 40 ℛ.

P. A. HANSEN, Bestimmung der Sonnenparallaxe durch Venusvorübergänge vor der Sonnenscheibe mit besonderer Berücksichtigung des im Jahre 1874 eintreffenden Vorüberganges. Mit zwei Planigloben. 1870. 3 ℳ.

G. T. FECHNER, Zur experimentalen Aesthetik. Erster Theil. 1871. 2 ℳ.

ZEHNTER BAND. Mit 7 Tafeln. hoch 4. 1874. Preis 21 ℳ.

W. WEBER, Elektrodynamische Maassbestimmungen, insbesondere über das Princip der Erhaltung der Energie. 1871. 1 ℳ 60 ℛ.

P. A. HANSEN, Untersuchung des Weges eines Lichtstrahls durch eine beliebige Anzahl von brechenden sphärischen Oberflächen. 1871. 3 ℳ 60 ℛ.

C. BRUHNS, Bestimmung der Längendifferenz zwischen Leipzig und Wien. 1872. 2 ℳ.

W. G. HANKEL, Elektrische Untersuchungen. Neunte Abhandlung. 1872. Mit 4 Tafeln. 2 ℳ.

——— Elektrische Untersuchungen. Zehnte Abhandlung. 1872. Mit 3 Tafeln. 2 ℳ.

C. NEUMANN, Ueber die den Kräften elektrodynamischen Ursprungs zuzuschreibenden Elementargesetze. 1873. 3 ℳ 80 ℛ.

P. A. HANSEN, Von der Bestimmung der Theilungsfehler eines gradlinigen Maassstabes. 1874. 4 ℳ.

——— Ueber die Darstellung der graden Aufsteigung und Abweichung des Mondes in Function der Länge in der Bahn und der Knotenlänge. 1874. 1 ℳ.

——— Dioptrische Untersuchungen mit Berücksichtigung der Farbenzerstreuung und der Abweichung wegen Kugelgestalt. Zweite Abhandlung. 1874. 2 ℳ.

ELFTER BAND. Mit 8 Tafeln. hoch 4. 1878. Preis 21 ℳ.

G. T. FECHNER, Ueber den Ausgangswerth der kleinsten Abweichungssumme, dessen Bestimmung, Verwendung und Verallgemeinerung. 1874. 2 ℳ.

C. NEUMANN, Ueber das von Weber für die elektrischen Kräfte aufgestellte Gesetz. 1874. 3 ℳ.

W. G. HANKEL, Elektrische Untersuchungen. Elfte Abhandlung. Mit 3 Tafeln. 1875. 2 ℳ.

P. A. HANSEN, Ueber die Störungen der grossen Planeten, insbesondere des Jupiter. 1875. 6 ℳ.

W. G. HANKEL, Elektrische Untersuchungen. Zwölfte Abhandlung. Mit 4 Tafeln. 1875. 2 ℳ.

W. SCHEIBNER, Dioptrische Untersuchungen, insbes. über das Hansen'sche Objectiv. 1876. 3 ℳ.

C. NEUMANN, Das Webersche Gesetz bei Zugrundelegung d. Unitarischen Anschauungswse. 1876. 1 ℳ.

W. WEBER, Elektrodynamische Maassbestimmungen, insbesondere über die Energie der Wechselwirkung. Mit 1 Tafel. 1878. 2 ℳ.

ZWÖLFTER BAND. hoch 4.

W. G. HANKEL, Elektrische Untersuchungen. Dreizehnte Abhandlung. Mit 3 Tafeln. 1878. 2 ℳ.

Leipzig, April 1878. S. Hirzel.

SITZUNGSBERICHTE
DER
KÖNIGL. SÄCHSISCHEN GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN.
KLEINERE ABHANDLUNGEN.

BERICHTE über die Verhandlungen der Königlich Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig. Erster Band. Aus den Jahren 1846 und 1847. Mit Kupfern. gr. 8. 12 Hefte.

— — Zweiter Band. Aus dem Jahre 1848. Mit Kupfern. gr. 8. 6 Hefte.

Vom Jahre 1849 an sind die Berichte der beiden Classen getrennt erschienen.

— — Mathematisch-physische Classe. 1849 (3) 1850 (3) 1851 (2) 1852 (2) 1853 (3) 1854 (3) 1855 (2) 1856 (2) 1857 (3) 1858 (3) 1859 (4) 1860 (3) 1861 (2) 1862 (1) 1863 (2) 1864 (1) 1865 (1) 1866 (5) 1867 (4) 1868 (3) 1869 (4) 1870 (5) 1871 (7) 1872 (4 mit Beiheft) 1873 (7) 1874 (5) 1875 (4) 1876 (2) 1877 (2).

— — Philologisch-historische Classe. 1849 (5) 1850 (4) 1851 (5) 1852 (4) 1853 (5) 1854 (6) 1855 (4) 1856 (4) 1857 (2) 1858 (2) 1859 (4) 1860 (4) 1861 (4) 1862 (1) 1863 (3) 1864 (3) 1865 (1) 1866 (4) 1867 (2) 1868 (3) 1869 (3) 1870 (3) 1871 (1) 1872 (1) 1873 (1) 1874 (2) 1875 (2) 1876 (1) 1877 (2).

Jedes Heft der Berichte ist einzeln zu dem Preise von 1 Mark zu haben.

SCHRIFTEN
DER FÜRSTLICH-JABLONOWSKI'SCHEN GESELLSCHAFT ZU LEIPZIG.

ABHANDLUNGEN bei Begründung der Königl. Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften am Tage der zweihundertjährigen Geburtsfeier Leibnizens herausgegeben von der Fürstl. Jablonowski'schen Gesellschaft. Mit dem Bildnisse von Leibniz in Medaillon und zahlreichen Holzschnitten und Kupfertafeln. 61 Bogen in hoch 4⁰. 1846. broch. Preis 15 *M*.

PREISSCHRIFTEN gekrönt und herausgegeben von der Fürstlich Jablonowski'schen Gesellschaft.

1. H. GRASSMANN, Geometrische Analyse geknüpft an die von Leibniz erfundene geometrische Charakteristik. Mit einer erläuternden Abhandlung von *A. F. Möbius*. (Nr. I der mathematisch-physischen Section.) hoch 4⁰. 1847. 2 *M*.
2. H. B. GEINITZ, Das Quadergebirge oder d. Kreideformation in Sachsen, mit Berücks. der glaukonitreichen Schichten. Mit 1 color. Tafel. (Nr. II d. math.-phys. Sect.) hoch 4⁰. 1850. 1 *M* 60 *Pf*.
3. J. ZECH, Astronomische Untersuchungen über die Mondfinsternisse des Almagest. (Nr. III d. math.-phys. Sect.) hoch 4⁰. 1851. 1 *M*.
4. J. ZECH, Astron. Untersuchungen üb. die wichtigeren Finsternisse, welche v. d. Schriftstellern des class. Alterthums erwähnt werden. (No. IV d. math.-phys. Sect.) hoch 4⁰. 1853. 2 *M*.
5. H. B. GEINITZ, Darstellung der Flora des Hainichen-Ebersdorfer und des Flöhaer Kohlenbassins. (Nr. V d. math.-phys. Sect.) hoch 4⁰. Mit 14 Kupfertafeln in gr. Folio. 1854. 24 *M*.
6. TH. HIRSCH, Danzigs Handels- und Gewerbsgeschichte unter der Herrschaft des deutschen Ordens. (Nr. I der historisch-nationalökonomischen Section.) hoch 4⁰. 1858. 8 *M*.
7. H. WISKEMANN, Die antike Landwirthschaft und das von Thünensche Gesetz, aus den alten Schriftstellern dargelegt. (Nr. II d. hist.-nat. ök. Sect.) 1859. 2 *M* 40 *Pf*.
8. K. WERNER, Urkundliche Geschichte der Iglauer Tuchmacher-Zunft. (Nr. III d. hist.-nat. ök. Sect.) 1861. 3 *M*.
9. V. BÖHMERT, Beiträge zur Gesch. d Zunftwesens. (Nr. IV d. hist.-nat. ök. Sect.) 1862. 4 *M*.
10. H. WISKEMANN, Darstellung der in Deutschland zur Zeit der Reformation herrschenden nationalökonomischen Ansichten. (Nr. V d. hist.-nat. ök. Sect.) 1862. 4 *M*.
11. E. L. ETIENNE LASPEYRES. Geschichte der volkswirthschaftl. Anschauungen der Niederländer und ihrer Litteratur zur Zeit der Republik. (Nr. VI d. hist.-nat. ök. Sect.) 1863. 8 *M*.
12. J. FIKENSCHER, Untersuchung der metamorphischen Gesteine der Lunzenauer Schieferhalbinsel. (Nr. VI d. math.-phys. Sect.) 1867. 2 *M*.
13. JOH. FALKE, Die Geschichte des Kurfürsten August von Sachsen in volkswirthschaftlicher Beziehung. (Nr. VII d. hist.-nat. ök. Sect.) 1868. 8 *M*.
14. B. BÜCHSENSCHÜTZ, Die Hauptstätten des Gewerbfleisses im classischen Alterthume. (Nr. VIII d. hist.-nat. ök. Sect.) 1869. 2 *M* 80 *Pf*.
15. HUGO BLÜMNER, Die gewerbliche Thätigkeit der Völker des classischen Alterthums. (Nr. IX d. hist.-nat. ök. Sect.) 1869. 4 *M*.
16. HERMANN ENGELHARDT, Flora der Braunkohlenformation im Königreich Sachsen. (Nr. VII d. math -phys. Sect.) Mit 15 Tafeln. 1870. 12 *M*.
17. H. ZEISSBERG, Die polnische Geschichtschreibung des Mittelalters. (Nr. X d. hist.-nat. ök. Sect.) 1873. 12 *M*.
18. ALBERT WANGERIN, Reduction der Potentialgleichung für gewisse Rotationskörper auf eine gewöhnliche Differentialgleichung. (Nr. VIII d. math.-phys. Sect.) 1875. 1 *M* 20 *Pf*.
19. A. LESKIEN, Die Declination im Slavisch-Litauischen und Germanischen. (Nr. XI d. hist.-nat. ök. Sect.) 1876. 5 *M*.
20. R. HASSENCAMP, Ueber den Zusammenhang des lettoslavischen und germanischen Sprachstammes. (Nr. XII d. hist.-nat. ök. Sect.) 1876. 3 *M*.

Leipzig. **S. Hirzel.**

Druck von Breitkopf und Härtel in Leipzig.

W. SCHEIBNER,
MITGLIED DER KÖNIGL. SÄCHS. GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN.

ZUR
REDUCTION ELLIPTISCHER INTEGRALE
IN REELLER FORM.

Des XII. Bandes der Abhandlungen der mathematisch-physischen Classe der Königl. Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften

No II.

LEIPZIG
BEI S. HIRZEL.
1879.

ABHANDLUNGEN

DER

KÖNIGL. SÄCHS. GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN
ZU LEIPZIG.

MATHEMATISCH-PHYSISCHE CLASSE.

ERSTER BAND. Mit 3 Tafeln. hoch 4. 1852. broch. Preis 13 ℳ 60 ₰.
- A. F. MÖBIUS, Ueber die Grundformen der Linien der dritten Ordnung. 2 ℳ 40 ₰.
- P. A. HANSEN, Auflösung eines beliebigen Systems von linearischen Gleichungen. — Ueber die Entwickelung der Grösse $(1-2\alpha H+\alpha\alpha)^{-\frac{1}{2}}$ nach den Potenzen von α. 1 ℳ 20 ₰.
- A. SEEBECK, Ueber die Querschwingungen elastischer Stäbe. 1 ℳ.
- C. F. NAUMANN, Ueber die cyclocentrische Conchospirale und über das Windungsgesetz von Planorbis corneus. 1 ℳ.
- W. WEBER, Elektrodynamische Maassbestimmungen (Widerstandsmessungen). 3 ℳ.
- F. REICH, Neue Versuche mit der Drehwaage. 2 ℳ.
- M. W. DROBISCH, Zusätze zum Florentiner Problem. 1 ℳ 60 ₰.
- W. WEBER, Elektrodynamische Maassbestimmungen (Diamagnetismus). 2 ℳ.

ZWEITER BAND. Mit 19 Tafeln. hoch 4. 1855. br. Preis 20 ℳ.
- M. W. DROBISCH, Ueber musikalische Tonbestimmung und Temperatur. 1852. 3 ℳ.
- W. HOFMEISTER, Beiträge zur Kenntniss der Gefässkryptogamen. Mit 18 Tafeln. 1852. 4 ℳ.
- P. A. HANSEN, Entwickelung des Products einer Potenz des Radius Vectors mit dem Sinus oder Cosinus eines Vielfachen der wahren Anomalie in Reihen, die nach den Sinussen oder Cosinussen der Vielfachen der wahren, excentrischen oder mittleren Anomalie fortschreiten. 1853. 3 ℳ.
- ——— Entwickelung der negativen und ungraden Potenzen der Quadratwurzel der Function $r^2 + r'^2 - 2rr'(\cos U \cos U' + \sin U \sin U' \cos J)$. 1854. 3 ℳ.
- O. SCHLÖMILCH, Ueber die Bestimmung der Massen und der Trägheitsmomente symmetrischer Rotationskörper von ungleichförmiger Dichtigkeit. 1854. 80 ₰.
- ——— Ueber einige allgemeine Reihenentwickelungen und deren Anwendung auf die elliptischen Functionen. 1854. 1 ℳ 60 ₰.
- P. A. HANSEN, Die Theorie des Aequatoreals. 1855. 2 ℳ 40 ₰.
- C. F. NAUMANN, Ueber die Rationalität der Tangenten-Verhältnisse tautozonaler Krystallflächen. 1855. 1 ℳ.
- A. F. MÖBIUS, Die Theorie der Kreisverwandtschaft. 1855. 2 ℳ.

DRITTER BAND. Mit 15 Tafeln. hoch 4. 1857. br. Preis 19 ℳ 20 ₰.
- M. W. DROBISCH, Nachträge zur Theorie der musik. Tonverhältnisse. 1855. 1 ℳ 20 ₰.
- P. A. HANSEN, Auseinandersetzung einer zweckmässigen Methode zur Berechnung der absoluten Störungen der kleinen Planeten. 1856. 5 ℳ.
- R. KOHLRAUSCH und W. WEBER, Elektrodynamische Maassbestimmungen insbesondere Zurückführung der Stromintensitäts-Messungen auf mechanisches Maass. 1856. 1 ℳ 60 ₰.
- H. D'ARREST, Resultate aus Beobachtungen der Nebelflecken und Sternhaufen. Erste Reihe. 1856. 2 ℳ 40 ₰.
- W. G. HANKEL, Elektrische Untersuchungen. Erste Abhandlung: Ueber die Messung der atmosphärischen Elektricität nach absolutem Maasse. Mit 2 Tafeln. 1856. 6 ℳ.
- W. HOFMEISTER, Beiträge zur Kenntniss der Gefässkryptogamen. No. II. Mit 13 Tafeln. 1857. 4 ℳ.

VIERTER BAND. Mit 29 Tafeln. hoch 4. 1859. Preis 22 ℳ 50 ₰.
- P. A. HANSEN, Auseinandersetzung einer zweckmässigen Methode zur Berechnung der absoluten Störungen der kleinen Planeten. Zweite Abhandlung. 1857. 4 ℳ.
- W. G. HANKEL, Elektrische Untersuchungen. Zweite Abhandlung: Ueber die thermo-elektrischen Eigenschaften des Boracites. 1857. 2 ℳ 40 ₰.
- ——— Elektrische Untersuchungen. Dritte Abhandlung: Ueber Elektricitätserregung zwischen Metallen und erhitzten Salzen. 1858. 1 ℳ 60 ₰.
- P. A. HANSEN, Theorie der Sonnenfinsternisse und verwandten Erscheinungen. Mit 2 Tafeln. 1858. 6 ℳ.
- G. T. FECHNER, Ueber ein wichtiges psychophysisches Grundgesetz und dessen Beziehung zur Schätzung der Sterngrössen. 1858. 2 ℳ.
- W. HOFMEISTER, Neue Beiträge zur Kenntniss der Embryobildung der Phanerogamen. I. Dikotyledonen mit ursprünglich einzelligem, nur durch Zellentheilung wachsendem Endosperm. Mit 27 Tafeln. 1859. 8 ℳ.

FÜNFTER BAND. Mit 30 Tafeln. hoch 4. 1861. Preis 24 ℳ.
- W. G. HANKEL, Elektrische Untersuchungen. Vierte Abhandlung. 1859. 2 ℳ.
- P. A. HANSEN, Auseinandersetzung einer zweckmässigen Methode zur Berechnung der absoluten Störungen der kleinen Planeten. Dritte Abhandlung. 1859. 7 ℳ 20 ₰.
- G. T. FECHNER, Ueber einige Verhältnisse des binocularen Sehens. 1860. 5 ℳ 60 ₰.
- G. METTENIUS, Zwei Abhandlungen: I. Beiträge zur Anatomie der Cycadeen. Mit 5 Tafeln. II. Ueber Seitenknospen bei Farnen. 1860. 3 ℳ.
- W. HOFMEISTER, Neue Beiträge zur Kenntniss der Embryobildung der Phanerogamen. II. Monokotyledonen. Mit 25 Tafeln. 1861. 8 ℳ.

ZUR
REDUCTION ELLIPTISCHER INTEGRALE
IN REELLER FORM.

VON

W. SCHEIBNER,

MITGLIED DER KÖNIGL. SÄCHS. GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN.

Des XII. Bandes der Abhandlungen der mathematisch-physischen Classe der Königl. Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften

N° II.

LEIPZIG

BEI S. HIRZEL.

1879.

Vom Verfasser übergeben den 27. Januar 1879.
Der Abdruck vollendet den 15. Juli 1879.

ZUR
REDUCTION ELLIPTISCHER INTEGRALE
IN REELLER FORM

VON

W. SCHEIBNER.

Vorwort.

Wenn die analytische Behandlung einer Aufgabe aus der Geometrie oder Mechanik — Physik, Astronomie — auf elliptische Integrale führt, so bildet häufig die Reduction derselben auf die sogenannte Normalform der drei Gattungen, so wie die Einführung der Thetafunctionen zur Berechnung der Integrale eine nicht unbeschwerliche Arbeit. Obschon es bezüglich der zum Ziele führenden Wege an umfangreicher Literatur nicht gebricht, so schien doch dem Verfasser eine übersichtliche Zusammenstellung der betreffenden Vorschriften nicht überflüssig zu sein, und in dieser Absicht wurde die gegenwärtige Schrift »über die Reduction der elliptischen Integrale in reeller Form« unternommen. Das schliessliche Ergebniss freilich entspricht dem ursprünglichen Plane nur theilweise, denn die Arbeit ist dem Verfasser unter den Händen gewachsen und hat eine grössere Anzahl von Fragen und Entwickelungen in den Kreis der Betrachtung gezogen, als für den unmittelbaren Zweck erforderlich gewesen wäre. Bei dem Versuche, für die beabsichtigte Reduction einheitliche Gesichtspunkte aufzustellen, ergaben sich mancherlei Resultate, die wenigstens dem Verfasser neu waren, und so glaubt er den Wunsch aussprechen zu dürfen, dass für das, was dabei vielleicht an Uebersichtlichkeit verloren gegangen, der Inhalt der Abhandlung an mathematischem Interesse gewonnen haben möge. Allerdings sind die das vorliegende Gebiet behandelnden fundamentalen Untersuchungen von Weierstrass, welche nicht durch den Druck veröffentlicht worden, dem Verfasser unzugänglich geblieben, so dass möglicherweise anderen Mathematikern manche Resultate bereits in vollkommnerer Gestalt bekannt sind, als hier geboten werden konnte.

Wegen der Mittheilung zahlreicher und zum Theil selbst complicirterer Formeln glaube ich mich nicht entschuldigen zu sollen, eher möchten die

infolge der weitläufigen Rechnung oder des schwierigen Druckes, trotz der angewandten Sorgfalt, noch zurückgebliebenen Fehler geneigter Entschuldigung bedürfen. Bezüglich der Darstellung habe ich den Leser auf eine Unvollkommenheit aufmerksam zu machen, die dadurch entstanden ist, dass nicht von vorn herein die Unbestimmtheit des Vorzeichens der im Art. 1 eingeführten elliptischen Wurzelgrössen ξ und η betont worden ist. So selbstverständlich diese Bemerkung und die dadurch gebotene Vorsicht erscheint, so findet sich doch erst im Art. 43 des zweiten Abschnittes das Nöthige darüber hervorgehoben. Der erste Abschnitt (S. 57—117) enthält die Zurückführung der Integralgleichung $\int_{x_0}^{x}\frac{dx}{\xi}\pm\int_{y_0}^{y}\frac{dy}{\eta}=0$, wo die Radicale ξ und η gleiche Invarianten besitzen, auf algebraische Relationen in rationaler und irrationaler Form, die betreffenden Additionssätze, und die Reduction auf die Normalform des elliptischen Differentials $\frac{d\varphi}{\Delta(\varphi\,\varkappa)}$, nebst einigen Betrachtungen über Fälle ungleicher Invarianten; der zweite Abschnitt (S. 118—197) beschäftigt sich mit der Reduction des allgemeinen (reellen) elliptischen Integrals $\int_{x_0}^{x}f(x)\frac{dx}{\xi}$ auf die JACOBI'schen Thetafunctionen, den Transformationen von GAUSS und LANDEN, sowie den einschlagenden Vorschriften für die numerische Berechnung.

Leipzig, Mai 1879.

Berichtigungen und Nachträge siehe am Schlusse.

Erster Abschnitt.

Die Reduction auf die Normalform des elliptischen Differentials.

1.

Es ist merkwürdig genug, dass bereits eine der allerfrühesten unter den zahlreichen Arbeiten EULER's über elliptische Integrale die Grundlagen einer directen und allgemeinen Methode für die Addition, die Transformation und die Reduction der elliptischen Integrale enthält. GUDERMANN, JACOBI und WEIERSTRASS haben sich wiederholt mit dieser Methode beschäftigt und auf ihre Tragweite hingewiesen*).

In der Abhandlung »*De integratione aequationis differentialis* $\frac{m\,dx}{\sqrt{1-x^4}} = \frac{n\,dy}{\sqrt{1-y^4}}$«**) betrachtet EULER S. 54 die in Bezug auf zwei Variable x und y quadratische Gleichung

$$\alpha x^2y^2 + 2\beta x^2y + 2\gamma xy^2 + \delta x^2 + \varepsilon y^2 + 2\zeta xy + 2\eta x + 2\vartheta y + \varkappa = 0$$

welche wir in der Form schreiben wollen

$$f(x,y) = py^2 + 2p_1y + p_2 = qx^2 + 2q_1x + q_2 = 0$$

Setzt man hier mit leichter Buchstabenveränderung

$$p = ax^2 + 2a_1x + a_2\ , \qquad p_1 = bx^2 + 2b_1x + b_2\ , \qquad p_2 = cx^2 + 2c_1x + c_2$$

so wird

$$q = ay^2 + 2by + c\ , \qquad q_1 = a_1y^2 + 2b_1y + c_1\ , \qquad q_2 = a_2y^2 + 2b_2y + c_2$$

---

*) Einem Hefte über eine im Sommer 1845 zu Berlin gehaltene Vorlesung JACOBI's entnehme ich die Worte: »diese Formel (EULER's) ist noch nicht genug »durchgearbeitet; da sie Addition, Transformation und Reduction umfasst, leistet »sie, was alle diese Operationen sonst successive«.

**) *Novi Comment. Petropol. T. VI ad annum* 1756 *et* 1757. Vergl. die *Institutiones Calc. integralis vol. I, lib. 2, cap. VI,* sowie die Abhandlung von LAGRANGE in den *Misc. Taurin. T. IV*, 1766—69, *Sur l'intégration de quelques équations différentielles* (*Oeuvres T. II*, S. 5—33).

Durch Differentiation erhält man

$$(qx+q_1)\,dx+(py+p_1)\,dy=0$$

während die Auflösung der quadratischen Gleichungen die Werthe

$$qx+q_1=\sqrt{q_1^2-qq_2}=\eta\,,\qquad py+p_1=\sqrt{p_1^2-pp_2}=\xi$$

ergibt. Damit folgen die Ausdrücke

$$x=\frac{\eta-q_1}{q}=-\frac{q_2}{\eta+q_1}\,,\qquad y=\frac{\xi-p_1}{p}=-\frac{p_2}{\xi+p_1}$$

$$\xi=\eta\frac{d}{dy}\frac{q_1-\eta}{q}=q\frac{\partial}{\partial y}\frac{q_1x+\frac{1}{2}q_2}{q}\,,\qquad \eta=\xi\frac{d}{dx}\frac{p_1-\xi}{p}=p\frac{\partial}{\partial x}\frac{p_1y+\frac{1}{2}p_2}{p}$$

nebst der Differentialgleichung

$$\frac{dx}{\xi}+\frac{dy}{\eta}=0$$

Durch abermalige Differentiation findet man leicht

$$\xi'+\eta'=-\xi\frac{y''}{y'}=-\eta\frac{x''}{x'}$$

wo

$$\xi'=\frac{d\xi}{dx}\,,\qquad \eta'=\frac{d\eta}{dy}\,,\qquad x'=\frac{dx}{dy}\,,\qquad y'=\frac{dy}{dx}$$

gesetzt ist.

Bezeichnet man durch dz das elliptische Differential $\frac{dx}{\xi}$, so hat man nicht allein

$$\left(\frac{dx}{dz}\right)^2=\xi^2=Ax^4+4Bx^3+6Cx^2+4Dx+E$$

sondern auch

$$\frac{1}{2}\frac{d^2x}{dz^2}=Ax^3+3Bx^2+3Cx+D\,,\qquad \frac{1}{2}\left(\frac{d}{dz}\right)^2\frac{1}{x}=B+\frac{3C}{x}+\frac{3D}{x^2}+\frac{E}{x^3}$$

nebst

$$\left(\frac{d}{dz}\right)^2\log x=Ax^2+2Bx-\frac{2D}{x}-\frac{E}{x^2}$$

welche Gleichung für $x=\frac{p}{q}$ in die beiden

$$\left(\frac{d}{dz}\right)^2\log p+2D\frac{q}{p}+E\frac{q^2}{p^2}=\mu \quad\text{und}\quad \left(\frac{d}{dz}\right)^2\log q+A\frac{p^2}{q^2}+2B\frac{p}{q}=\mu$$

zerfällt werden kann. Wenn p mit z verschwindet, so ist

$$z=\int_0^x\frac{dx}{\xi}\quad\text{und}\quad \mu=\frac{d^2\log q}{dz^2}\quad\text{für}\quad z=0\,.$$

2.

Die Gleichungen

$$\xi\xi = (bx^2 + 2b_1 x + b_2)^2 - (ax^2 + 2a_1 x + a_2)(cx^2 + 2c_1 x + c_2)$$
$$= Ax^4 + 4Bx^3 + 6Cx^2 + 4Dx + E$$
$$\eta\eta = (a_1 y^2 + 2b_1 y + c_1)^2 - (ay^2 + 2by + c)(a_2 y^2 + 2b_2 y + c_2)$$
$$= \mathfrak{A}y^4 + 4\mathfrak{B}y^3 + 6\mathfrak{C}y^2 + 4\mathfrak{D}y + \mathfrak{E}$$

liefern zwischen den Coefficienten die Relationen

$$\begin{aligned} A &= b^2 - ac & \mathfrak{A} &= a_1^2 - aa_2 \\ 2B &= 2bb_1 - ac_1 - a_1 c & 2\mathfrak{B} &= 2a_1 b_1 - ab_2 - a_2 b \\ 6C &= 4b_1^2 + 2bb_2 - 4a_1 c_1 - ac_2 - a_2 c & 6\mathfrak{C} &= 4b_1^2 + 2a_1 c_1 - 4bb_2 - ac_2 - a_2 c \\ 2D &= 2b_1 b_2 - a_1 c_2 - a_2 c_1 & 2\mathfrak{D} &= 2b_1 c_1 - bc_2 - b_2 c \\ E &= b_2^2 - a_2 c_2 & \mathfrak{E} &= c_1^2 - cc_2 \end{aligned}$$
$$C - \mathfrak{C} = bb_2 - a_1 c_1$$

Die zehn Constanten $A\,\mathfrak{A}$.. bestimmen sich durch die neun Coefficienten aa_1.. und sind daher nicht unabhängig von einander. Bei der Homogeneität der Ausdrücke können die acht Verhältnisse der a als unabhängige Argumente eingeführt werden. Ihre Elimination ergibt desshalb zwei Bedingungsgleichungen, nämlich die beiden leicht direct zu verificirenden Invariantenformeln

$$AE - 4BD + 3CC = \mathfrak{A}\mathfrak{E} - 4\mathfrak{B}\mathfrak{D} + 3\mathfrak{C}\mathfrak{C}$$
$$ACE + 2BCD - AD^2 - B^2E - C^3 = \mathfrak{A}\mathfrak{C}\mathfrak{E} + 2\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{D} - \mathfrak{A}\mathfrak{D}^2 - \mathfrak{B}^2\mathfrak{E} - \mathfrak{C}^3$$

wofür wir kürzer schreiben wollen *)

$$G = \mathfrak{G}\,, \qquad H = \mathfrak{H}$$

Daraus folgt aber weiter, dass die Gleichung $f(x,y) = 0$, welche die erwähnten acht unabhängigen Argumente enthält, die voll-

*) Bekanntlich ist die Invariante H durch die Determinante $\begin{vmatrix} A & B & C \\ B & C & D \\ C & D & E \end{vmatrix}$ gegeben und die Discriminante wird durch

$$A^6 \Delta^2 = 256\,(G^3 - 27H^2)$$

ausgedrückt, wo Δ das Product der Wurzeldifferenzen von ξ bedeutet.

ständige Integralgleichung der Differentialgleichung $\frac{dx}{\xi}+\frac{dy}{\eta}=0$ darstellt. Denn letztere hängt nur von sieben Constanten, d. i. von den neun Verhältnissen der A ab, die ausserdem durch die beiden Gleichungen G und H verbunden sind.

Wenn folglich die Radicale ξ und η, wie wir stets voraussetzen wollen, gleiche Invarianten besitzen, so ersetzt die algebraische Gleichung $f(x,y)=0$ die transscendente Relation

$$\int_{x_0}^{x}\frac{dx}{\xi}+\int_{y_0}^{y}\frac{dy}{\eta}=0$$

wo x_0 und y_0 die Rolle der Integrationsconstante vertreten. Man kann dafür auch schreiben

$$\int_{w}^{x}\frac{dx}{\xi}+\int_{w}^{y}\frac{dy}{\eta}=\int_{w}^{x_0}\frac{dx}{\xi}+\int_{w}^{y_0}\frac{dy}{\eta}$$

oder

$$\int_{x_0}^{x}\frac{dx}{\xi}+\int_{x_0}^{y}\frac{dy}{\eta}=\int_{x_0}^{y_0}\frac{dy}{\eta}$$

das Additionstheorem der elliptischen Integrale erster Gattung mit gleichen Invarianten.

3.

Die Function $f(xy)$ enthält die Coefficienten $a\ b\ldots$, durch welche die Coefficienten $A\ B\ldots$ einfach ausgedrückt worden sind, während es umgekehrt wünschenswerth ist, letztere als die gegebenen Grössen in die algebraische Gleichung einzuführen.

Diess kann auf folgendem Wege geschehen. Sei

$$P=(B+R)x^2+2(C+\lambda)x+D+S\,,\qquad R^2=B^2-A(C+\lambda)$$
$$Q=(B-R)x^2+2(C+\lambda)x+D-S\,,\qquad S^2=D^2-E(C+\lambda)$$

so erhält man durch Multiplication

$$PQ=(C+\lambda)\left\{Ax^4+4Bx^3+2\left(\frac{BD-RS}{C+\lambda}+2C+2\lambda\right)x^2+4Dx+E\right\}$$

Bestimmt man nun λ aus der Gleichung

$$\frac{BD-RS}{C+\lambda}+2\lambda=C$$

so folgt

$$\xi\xi = \frac{PQ}{C+\lambda}$$

während λ die Wurzel der cubischen Resolvente*)

$$4\lambda^3 - G\lambda - H = 0$$

wird, wo G und H die beiden Invarianten bedeuten. Die drei Wurzeln λ entsprechen den drei möglichen Zerlegungen von ξ^4 in Factoren zweiten Grades. Die Vorzeichen der Radicale R und S sind der Bedingung

$$RS = BD - (C+\lambda)(C-2\lambda) \qquad \text{oder} \qquad \frac{R}{S} = \frac{B(C-2\lambda) - AD}{BE - D(C-2\lambda)}$$

unterworfen.

Für reelle Werthe von ξ hängt die Realität der trinomischen Factoren P und Q von der Realität der Wurzelgrössen R und S ab. Für $G^3 < 27H^2$ hat die cubische Gleichung eine einzige reelle Wurzel λ, für welche zugleich

$$B^2 - AC > A\lambda\ , \qquad D^2 - CE > E\lambda$$

Da in diesem Falle ξ^4 zwei reelle und zwei complexe Wurzeln besitzt, so muss $(C+\lambda)^2$ zwischen $BD + RS \pm (BS + DR)$ liegen, d. h. es muss

$$(BS + DR)^2 > \{BD + RS - (C+\lambda)^2\}^2$$

sein. Für $G^3 > 27H^2$ dagegen hat man drei reelle Wurzeln λ, und $(C+\lambda)^2$ ist

entweder $>(BD+RS)+(BS+DR)$ oder $<(BD+RS)-(BS+DR)$

Im ersteren Falle besitzt ξ vier reelle Wurzeln und jedes λ entspricht einer reellen Zerlegung; der zweite Fall entspricht vier complexen Wurzeln, für welche nur ein einziges λ eine reelle Zerlegung herbeiführt. Man erkennt letzteres an dem Stattfinden der Ungleichungen $B^2 - AC > A\lambda$ und $D^2 - CE > E\lambda$, welche von selbst gleichzeitig erfüllt sein müssen, so dass die Verification der einen von beiden ausreicht.

---

*) Vergl. STREHLKE in CRELLE's Journal Bd. 12, S. 358 und ARONHOLD das. Bd. 39, S. 158, Bd. 52, S. 95, sowie im Berliner Monatsbericht, 1861, S. 463.

4.

Die analoge Zerlegung des Polynoms η^2 wird durch die nämliche Resolvente geleistet, deren Coefficienten durch die beiden Invarianten gegeben sind. Setzt man daher

$$\eta\eta = \frac{\mathfrak{P}\mathfrak{Q}}{\mathfrak{C}+\lambda}$$

so werden die Zerlegungen PQ und $\mathfrak{P}\mathfrak{Q}$ einander correspondiren, wenn λ die nämliche Wurzel der cubischen Gleichung darstellt. In diesem Falle äquivalirt die Integralgleichung

$$\int_{x_0}^{x}\frac{dx}{\xi} = \int_{y_0}^{y}\frac{dy}{\eta}$$

der algebraischen Relation

$$\frac{\sqrt{PQ_0}+\sqrt{P_0Q}}{(x-x_0)\sqrt{C+\lambda}} = \frac{\sqrt{\mathfrak{P}\mathfrak{Q}_0}+\sqrt{\mathfrak{P}_0\mathfrak{Q}}}{(y-y_0)\sqrt{\mathfrak{C}+\lambda}}$$

wenn in den mit dem Index o versehenen Grössen x resp. y durch x_0 und y_0 ersetzt werden. Wir wollen dafür kürzer schreiben

$$\text{(I)} \quad \ldots\ldots\ldots \quad \frac{\xi_1\xi_2^0+\xi_2\xi_1^0}{x-x_0} = \frac{\eta_1\eta_2^0+\eta_2\eta_1^0}{y-y_0}$$

wo

$$\xi = \xi_1\xi_2\,, \qquad \eta = \eta_1\eta_2\,, \qquad \xi_1^2 = \frac{P}{\sqrt{C+\lambda}} \qquad \text{u. s. w.}$$

Durch Quadrirung der angegebenen irrationalen Relation geht die Gleichung hervor

$$\frac{(\xi_1\xi_2^0)^2+(\xi_2\xi_1^0)^2+2\xi_0\xi}{(x-x_0)^2} = \frac{(\eta_1\eta_2^0)^2+(\eta_2\eta_1^0)^2+2\eta_0\eta}{(y-y_0)^2}$$

Schreibt man nun

$$\begin{aligned}\xi\xi &= Ax^4+4Bx^3+6Cx^2+4Dx+E = Lx^2+2Mx+N\\ &= (lx^2+2mx+n)(l_1x^2+2m_1x+n_1)\end{aligned}$$

wodurch

$$\begin{aligned}
L &= Ax^2+2Bx+C\,, & M &= Bx^2+2Cx+D\\
N &= Cx^2+2Dx+E\,, & A &= ll_1\\
2B &= lm_1+l_1m\,, & 6C &= 4mm_1+ln_1+l_1n\\
2D &= mn_1+m_1n\,, & E &= nn_1
\end{aligned}$$

so wird

$$(\xi_1 \xi_2^0)^2 + (\xi_2 \xi_1^0)^2 =$$
$$= (lx^2 + 2mx + n)(l_1 x_0^2 + 2m_1 x_0 + n_1) + (lx_0^2 + 2mx_0 + n)(l_1 x^2 + 2m_1 x + n_1)$$
$$= 2ll_1 x^2 x_0^2 + 2(lm_1 + l_1 m)(x^2 x_0 + x x_0^2) + (ln_1 + l_1 n)(x^2 + x_0^2) + 8mm_1 x x_0$$
$$+ 2(mn_1 + m_1 n)(x + x_0) + 2nn_1$$
$$= 2Ax^2 x_0^2 + 4Bxx_0(x + x_0) + 2C(x^2 + 4xx_0 + x_0^2) + 4(C - mm_1)(x - x_0)^2$$
$$+ 4D(x + x_0) + 2E$$
$$= 2\{(Ax_0^2 + 2Bx_0 + C)x^2 + 2(Bx_0^2 + 2Cx_0 + D) + (Cx_0^2 + 2Dx_0 + E) +$$
$$+ 2(C - mm_1)(x - x_0)^2\}$$

Vermöge der Werthe P und Q des vorigen Artikels hat man aber

$$mm_1 = C + \lambda$$

folglich

$$(\xi_1 \xi_2^0)^2 + (\xi_2 \xi_1^0)^2 = 2\{L_0 x^2 + 2M_0 x + N_0 - 2\lambda(x - x_0)^2\}$$
$$= 2\{Lx_0^2 + 2Mx_0 + N - 2\lambda(x - x_0)^2\}$$

und wenn man ξ und η vertauscht

$$(\eta_1 \eta_2^0)^2 + (\eta_2 \eta_1^0)^2 = 2\{\mathfrak{L}_0 y^2 + 2\mathfrak{M}_0 y + \mathfrak{N}_0 - 2\lambda(y - y_0)^2\}$$
$$= 2\{\mathfrak{L} y_0^2 + 2\mathfrak{M} y_0 + \mathfrak{N} - 2\lambda(y - y_0)^2\}$$

Somit erhält man, da die λ enthaltenden Glieder sich in Gemässheit der gemachten Voraussetzungen auf beiden Seiten wegheben

$$\frac{\xi_0 \xi + L_0 x^2 + 2M_0 x + N_0}{(x - x_0)^2} = \frac{\eta_0 \eta + \mathfrak{L}_0 y^2 + 2\mathfrak{M}_0 y + \mathfrak{N}_0}{(y - y_0)^2} \quad . \quad . \quad (1^*)$$

wo man offenbar x und x_0 so wie y und y_0 vertauschen darf. Für $x = \infty$ geht die linke Seite über in $\xi_0 \sqrt{A} + L_0$, für $x_0 = 0$ dagegen in $\frac{1}{x^2}(\xi \sqrt{E} + N)$; rational wird derselbe Ausdruck, wenn man für x_0 eine Wurzel der Gleichung $\xi_0 = 0$ einführt.

5.

Durch Differentiation ergibt sich

$$\left\{\xi_0 \xi' + 2\left(L_0 x + M_0 - \frac{\xi_0 \xi + L_0 x^2 + 2M_0 x + N_0}{x - x_0}\right)\right\} \frac{dx}{(x - x_0)^2} =$$
$$\left\{\eta_0 \eta' + 2\left(\mathfrak{L}_0 y + \mathfrak{M}_0 - \frac{\eta_0 \eta + \mathfrak{L}_0 y^2 + 2\mathfrak{M}_0 y + \mathfrak{N}_0}{y - y_0}\right)\right\} \frac{dy}{(y - y_0)^2}$$

wo man für dx und dy die ihnen proportionalen Grössen ξ und $\pm\eta$ setzen darf, je nachdem die Differentialgleichung $\frac{dx}{\xi} = \frac{dy}{\eta}$ oder

$\frac{dx}{\xi} + \frac{dy}{\eta} = 0$ integrirt werden soll. In der durch Quadrirung gefundenen Integralgleichung (I*) ist dieser Unterschied weggefallen.

Zerlegt man in Partialbrüche, so nehmen nach einer leichten Reduction die obigen Integralgleichungen die Form an

$$\frac{\xi_0(\xi + \xi_0)}{2(x-x_0)^2} + \frac{\xi_0 \xi_0'}{2(x-x_0)} + \frac{1}{2} L_0 = \frac{\eta_0(\eta + \eta_0)}{2(y-y_0)^2} + \frac{\eta_0 \eta_0'}{2(y-y_0)} + \frac{1}{2} \mathfrak{L}_0$$

wofür mit abgekürzter Bezeichnung

$$X = Y$$

geschrieben werden soll, ferner

$$X_1 = -\xi \frac{dX}{dx} = \frac{\xi \xi_0}{(x-x_0)^2} \left\{ \frac{\xi + \xi_0}{x - x_0} - \frac{1}{2} (\xi' - \xi_0') \right\} = \pm Y_1$$

Damit diese beiden Gleichungen coexistiren können, muss X_1 als Function von X ausdrückbar sein.

Es mag bei dieser Gelegenheit Erwähnung finden, dass die drei Covarianten der biquadratischen Form sich durch

$$f = \xi\xi \,, \qquad g = \frac{1}{12} \xi^2 (\xi'\xi' - 2\xi\xi'')$$
$$h = \frac{1}{2} (f'g - fg') = \frac{1}{12} \xi^3 \xi'''$$

bequem darstellen lassen, während die Invarianten durch

$$G = \frac{1}{12} \{ \xi^2 (\xi \xi^{IV} + 2\xi'\xi''') + (2\xi\xi'' - \xi'\xi')^2 \}$$
$$H = \frac{1}{216} (2\xi\xi'' - \xi'\xi')^3 + \frac{1}{144} \xi^2 (\xi\xi^{IV} + 2\xi'\xi''') (2\xi\xi'' - \xi'\xi') - \frac{1}{144} \xi^4 \xi'''^2$$

gegeben sind. Der blosse Anblick lehrt hier das Stattfinden der Cayley-Hermite'schen Gleichung

$$h^2 = 4g^3 - Gf^2g - Hf^3 = 4(g - \lambda f)(g - \lambda_1 f)(g - \lambda_2 f)$$

wo $\lambda\ \lambda_1\ \lambda_2$ die Wurzeln der cubischen Resolvente bedeuten. Bekanntlich schliesst man daraus, dass die drei Radicale $\sqrt{g - \lambda f}$ rationale Functionen von x sein müssen. In der That wird

$$\sqrt{g - \lambda f} = Rx^2 + Tx - S \,, \qquad \text{wo} \qquad T^2 = (C - 2\lambda)^2 - AE$$

und die Vorzeichen der Quadratwurzeln $R\ S\ T$ durch

$$RT = B(C - 2\lambda) - AD \,, \qquad ST = BE - D(C - 2\lambda)$$

bedingt sind. Die Berechnung der sechs Wurzeln der Gleichung

$\xi''' = 0$ ist somit, nach der Ermittelung von λ, auf die Auflösung quadratischer Gleichungen zurückgeführt.

Durch Multiplication der vier Aggregate

$$(\lambda_1 - \lambda_2)\sqrt{g - \lambda f} \pm (\lambda_2 - \lambda)\sqrt{g - \lambda_1 f} \pm (\lambda - \lambda_1)\sqrt{g - \lambda_2 f}$$

erhält man identisch, d. h. für beliebige Werthe der Variabeln f und g,

$$\frac{1}{16} ff(G^3 - 27H^2)$$

folglich stellen, wie Cayley bemerkt hat, jene Ausdrücke die Quadrate der linearen Factoren des Polynoms f dar.

Setzt man $\frac{g}{f} = w$, so wird*)

$$w' = \frac{fg' - f'g}{ff} = -\frac{2h}{f^2} = \mp 2\sqrt{\frac{4w^3 - Gw - H}{f}}$$

oder

$$dz = \frac{dx}{\xi} = \frac{dx}{\sqrt{f}} = \mp \frac{dw}{2\sqrt{4w^3 - Gw - H}}$$

nebst

$$\frac{dx}{\sqrt{g}} = \mp \frac{dw}{2\sqrt{4w^4 - Gw^2 - Hw}}$$

Will man den Quotienten $I = \frac{G^3}{H^2}$ als sogenannte **absolute** Invariante einführen, so wird

für $w = \frac{H}{G}v$ $\qquad dz = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{G}{H}}\frac{dv}{\sqrt{4v^3 - I(v+1)}}$

für $w = H^{\frac{1}{3}}v$ $\qquad dz = -\frac{1}{2H^{\frac{1}{3}}}\frac{dv}{\sqrt{4v^3 - I^{\frac{1}{3}}v - 1}}$

für $w = G^{\frac{1}{2}}v$ $\qquad dz = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{G}{H}}\frac{dv}{\sqrt{(4v^3 - v)I^{\frac{1}{2}} - 1}}$

$$= -\frac{1}{2G^{\frac{1}{4}}}\frac{dv}{\sqrt{4v^3 - v - I^{-\frac{1}{2}}}}$$

6.

Da im Folgenden mehrfach von Relationen zwischen den Covarianten und deren Differentialquotienten Gebrauch gemacht werden

*) Vergl. Crelle-Borchardt's Journal Bd. 50, S. 286/7; Bd. 52, S. 4/16; Bd. 55, S. 24.

wird, so mögen in diesem Artikel einige bezügliche Formeln zusammengestellt werden. Man hat bekanntlich für

$$f = Ax^4 + 4Bx^3 + 6Cx^2 + 4Dx + E$$
$$g = A_1x^4 + 4B_1x^3 + 6C_1x^2 + 4D_1x + E_1$$
$$h = i_0x^6 + 6i_1x^5 + 15i_2x^4 + 20i_3x^3 + 15i_4x^2 + 6i_5x + i_6$$

$$A_1 = B^2 - AC \qquad 2B_1 = BC - AD$$
$$6C_1 = 3C^2 - 2BD - AE \qquad 2D_1 = CD - BE$$
$$E_1 = D^2 - CE \qquad i_0 = 2(AB_1 - BA_1)$$
$$i_1 = AC_1 - CA_1 \qquad i_2 = 2(BC_1 - CB_1)$$
$$i_3 = BD_1 - DB_1 \qquad i_4 = 2(CD_1 - DC_1)$$
$$i_5 = CE_1 - EC_1 \qquad i_6 = 2(DE_1 - ED_1)$$

oder

$$i_0 = 3ABC - A^2D - 2B^3$$
$$i_1 = \frac{1}{6}(9AC^2 - A^2E - 2ABD - 6B^2C)$$
$$i_2 = \frac{1}{3}(3ACD - ABE - 2B^2D)$$
$$i_3 = \frac{1}{2}(AD^2 - B^2E)$$
$$i_4 = \frac{1}{3}(ADE - 3BCE + 2BD^2)$$
$$i_5 = \frac{1}{6}(AE^2 + 2BDE + 6CD^2 - 9C^2E)$$
$$i_6 = BE^2 - 3CDE + 2D^3$$

Bezeichnet man die Invarianten und Covarianten des Polynoms $g = A_1x^4 + 4B_1x^3 + 6C_1x^2 + 4D_1x + E_1$ resp. durch $G_1\ H_1\ g_1\ h_1$, so liefert eine leichte Rechnung die Werthe

$$G_1 = \frac{1}{12}G^2, \qquad H_1 = \frac{1}{216}(G^3 - 54H^2)$$
$$g_1 = -\frac{1}{12}(Gg + 3Hf), \qquad h_1 = \frac{1}{4}Hh$$

mithin auch

$$G_1^3 - 27H_1^2 = \frac{1}{16}H^2(G^3 - 27H^2)$$

Die cubische Resolvente für g nimmt die Gestalt an

$$4\mu^3 - G_1\mu - H_1 = 0$$

und man überzeugt sich leicht, dass die Wurzel μ mit den Wurzeln $\lambda\ \lambda_1\ \lambda_2$ der Resolvente für f durch die Gleichung

$$\mu = -\frac{1}{3}(\lambda^2 + \lambda_1 \lambda_2)$$

zusammenhängt. Die Kenntniss der Wurzeln λ führt somit zur Auflösung der Gleichungen $f = 0$, $g = 0$ und $h = 0$.

Durch Differentiation ergeben sich eine grosse Menge von Gleichungen, die geeigneten Falls zur Reduction dienen können, wie z. B.

$$2h = f'g - fg' \qquad 24g = \frac{3}{2}f'f' - 2ff''$$

$$2h' = f''g - fg'' \qquad 24g' = f'f'' - 2ff'''$$

$$\frac{4}{5}h'' = f''g' - f'g'' \qquad 24g'' = f''f'' - f'f''' - 2ff^{IV}$$

$$\frac{6}{5}h'' = f'''g - fg''' \qquad 24(g'' - G) = \frac{1}{2}f''f'' - 3ff^{IV}$$

$$\ldots \qquad \ldots$$

$$8h = \frac{1}{3}f^2f''' - \frac{1}{2}ff'f'' + \frac{1}{4}f'^3$$

$$24G = \frac{1}{2}f''f'' - f'f''' + ff^{IV}$$

$$288H = ff''f^{IV} + \frac{1}{2}f'f''f''' - \frac{3}{4}f'f'f^{IV} - \frac{1}{2}ff'''f''' - \frac{1}{6}f''^3$$

$$Gg + 3Hf = gg'' - \frac{3}{4}g'g'$$

$$2Gf = \frac{3}{2}f'g' - f''g - fg''$$

$$Gf^2 - 12g^2 = fh' - \frac{3}{2}f'h$$

$$f''f'' = 144Af + 48(g'' - G)$$

$$f''g'' = 72(H + A_1 f + Ag) + 4Gf''$$

$$g''g'' = 144A_1 g - 12Hf'' - 4Gg'' - 4G^2$$

Formeln, denen sich viele ähnliche anreihen lassen. Wenn x eine Wurzel der Gleichung $f = 0$ ist, nehmen diese Ausdrücke eine einfachere Gestalt an.

7.

Es ist von Interesse, den directen Nachweis zu führen, dass X_1 als Function von X ausgedrückt werden kann. Diess geschieht mittelst der Formel

$$X_1^2 = 4X^3 - GX - H$$

woraus die Gleichung

$$dz = \frac{dx}{\xi} = -\frac{dX}{X_1} = \mp \frac{dX}{\sqrt{4X^3 - GX - H}}$$

hervorgeht, welche wie es scheint zuerst von Weierstrass gefunden wurde*).

Der Werth von X_1 kann geschrieben werden

$$X_1 = \frac{\xi[f_0 + \frac{1}{2}f_0'(x-x_0)] + \xi_0[f - \frac{1}{2}f'(x-x_0)]}{(x-x_0)^3}$$

$$= \frac{2h_0 + h_0'(x-x_0) + \frac{1}{3}h_0''(x-x_0)^2 + \frac{1}{60}h_0'''(x-x_0)^3}{\xi[f_0 + \frac{1}{2}f_0'(x-x_0)] - \xi_0[f - \frac{1}{2}f'(x-x_0)]}$$

und kehrt durch die Vertauschung von x und x_0 sein Vorzeichen um. Da ferner nach Art. 4

$$\sqrt{X - \lambda} = \frac{\xi_1 \xi_2^0 + \xi_1^0 \xi_2}{2(x - x_0)}$$

so erhält man zugleich

$$X_1 = -\xi \frac{dX}{dx} = \mp \frac{\Pi(\xi_1 \xi_2^0 + \xi_1^0 \xi_2)}{4(x-x_0)^3}$$

wo sich das Productenzeichen Π auf die den drei Wurzeln λ entsprechenden Zerlegungen von ξ bezieht.

Schreibt man X in der Form

$$X = \frac{\sqrt{f_0 f} + f_0 + \frac{1}{2}f_0'(x-x_0) + \frac{1}{12}f_0''(x-x_0)^2}{2(x-x_0)^2}$$

und eliminirt die Wurzelgrösse $\sqrt{f_0 f}$, so ergibt sich die quadratische Gleichung

$$(12X^2 - f_0''X + g_0'' - G)(x-x_0)^2 - 6(f_0'X - g_0')(x-x_0) - 12(f_0 X - g_0) = 0$$

mit der Wurzel

$$x - x_0 = \frac{3(f_0'X - g_0') \pm 6\sqrt{f_0(4X^3 - GX - H)}}{12X^2 - f_0''X + g_0'' - G}$$

$$= \frac{4(f_0 X - g_0)}{\pm 2\sqrt{f_0(4X^3 - GX - H)} - f_0'X + g_0'}$$

also

$$(12X^2 - f_0''X + g_0'' - G)(x - x_0) = 3(f_0'X - g_0' + 2\xi_0 X_1)$$

oder

$$(2\xi_0 X_1 - f_0'X + g_0')(x - x_0) = 4(f_0 X - g_0)$$

*) Vergl. Biermann, *Dissertat. inaugur.*, Berlin 1865, p. 2.

denn man überzeugt sich leicht, dass in dieser identischen Formel das obere Vorzeichen der Quadratwurzel gilt. Uebrigens liefert die obige quadratische Gleichung für X den weiteren Ausdruck

$$X = 2\,\frac{g_0 + \frac{1}{2} g_0' (x - x_0) + \frac{1}{12}(g_0'' - G)(x - x_0)^2}{f_0 + \frac{1}{2} f_0' (x - x_0) + \frac{1}{12} f_0'' (x - x_0)^2 - \sqrt{f_0 f}}$$

wofür man auch schreiben kann

$$X = \frac{2(L_1 x_0^2 + 2 M_1 x_0 + N_1) - \frac{1}{6} G (x - x_0)^2}{L x_0^2 + 2 M x_0 + N - \xi_0 \xi}$$
$$= \frac{2(L_1^0 x^2 + 2 M_1^0 x + N_1^0) - \frac{1}{6} G (x - x_0)^2}{L_0 x^2 + 2 M_0 x + N_0 - \xi_0 \xi}$$

Ersetzt man in der vorstehenden identischen Formel X und X_1 durch die ihnen gleichen Functionen Y und $-Y_1$, so erhält man die Substitution, durch welche $\frac{dx}{\xi}$ in $-\frac{dy}{\eta}$ übergeht, und welche früher in der Form $x = \frac{\eta - q_1}{q}$ aufgestellt worden ist. Wenn man folglich in der Gleichung

$$(12 Y^2 - f_0'' Y + g_0'' - G)(x - x_0) = 3(f_0' Y - g_0' - 2 \xi_0 Y_1)$$

oder

$$(2 \xi_0 Y_1 + f_0' Y - g_0')(x - x_0) + 4 (f_0 Y - g_0) = 0$$

die Wurzelgrösse η eliminirt, so muss man auf die Gleichung $f(xy) = 0$ geführt werden, womit sich die Coefficienten a.. bestimmen*).

8.

Bequemer und directer als die hierzu erforderliche Rechnung, bei welcher noch überflüssige Factoren auszuscheiden bleiben, führt der folgende Weg zum Ziele.

Setzt man die Gleichung $f(x\,y) = 0$ in der Form an

$$[\alpha(y - y_0)^2 + 2\beta(y - y_0) + \gamma](x - x_0)^2 + 2[\alpha_1(y - y_0)^2 + 2\beta_1(y - y_0) + \gamma_1](x - x_0)$$
$$+ [\alpha_2(y - y_0)^2 + 2\beta_2(y - y_0) + \gamma_2] = 0$$

so erhält man sogleich $\gamma_2 = 0$ und durch Differentiation

---

*) Man kann bei dieser Gelegenheit die Formel anmerken:

$$\frac{12 Y^2 - G}{(x - x_0)^3} = \left(\frac{\partial}{\partial x_0}\right)^2 \frac{f_0 Y - g_0}{(x - x_0)^3} = \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^2 \frac{f Y - g}{(x - x_0)^3}$$

$$[\alpha(x-x_0)(y-y_0)^2+2\beta(x-x_0)(y-y_0)+\alpha_1(y-y_0)^2+\gamma(x-x_0)+2\beta_1(y-y_0)+\gamma_1]dx$$
$$+[\alpha(x-x_0)^2(y-y_0)+\beta(x-x_0)^2+2\alpha_1(x-x_0)(y-y_0)+2\beta_1(x-x_0)+\alpha_2(y-y_0)+\beta_2]dy=0$$

folglich

$$\beta_2=\xi_0\,,\qquad\qquad \gamma_1=\eta_0$$

Nach Analogie des Art. 1 kann man dafür schreiben

$$\eta\,dx+\xi\,dy=$$
$$dx\sqrt{[\alpha_1(y-y_0)^2+2\beta_1(y-y_0)+\eta_0]^2-[\alpha(y-y_0)^2+2\beta(y-y_0)+\gamma][\alpha_2(y-y_0)^2+2\xi_0(y-y_0)]}$$
$$+dy\sqrt{[\beta(x-x_0)^2+2\beta_1(x-x_0)+\xi_0]^2-[\alpha(x-x_0)^2+2\alpha_1(x-x_0)+\alpha_2][\gamma(x-x_0)^2+2\eta_0(x-x_0)]}$$

und wenn man in

$$\xi=\sqrt{f_0+f_0'(x-x_0)+\tfrac{1}{2}f_0''(x-x_0)^2+\tfrac{1}{6}f_0'''(x-x_0)^3+\tfrac{1}{24}f_0^{IV}(x-x_0)^4}$$
$$\eta=\sqrt{\mathfrak{f}_0+\mathfrak{f}_0'(y-y_0)+\tfrac{1}{2}\mathfrak{f}_0''(y-y_0)^2+\tfrac{1}{6}\mathfrak{f}_0'''(y-y_0)^3+\tfrac{1}{24}\mathfrak{f}_0^{IV}(y-y_0)^4}$$

die Coefficienten vergleicht, so ergibt sich

$$\tfrac{1}{2}f_0'=\xi_0\xi_0'=2\beta_1\xi_0-\alpha_2\eta_0$$
$$\tfrac{1}{2}f_0''=\xi_0\xi_0''+\xi_0'\xi_0'=4\beta_1^2-\alpha_2\gamma+2\beta\xi_0-4\alpha_1\eta_0$$
$$\tfrac{1}{12}f_0'''=\tfrac{1}{6}(\xi_0\xi_0'''+3\xi_0'\xi_0'')=2\beta\beta_1-\alpha_1\gamma-\alpha\eta_0$$
$$\tfrac{1}{24}f_0^{IV}=A=\beta^2-\alpha\gamma$$
$$\tfrac{1}{2}\mathfrak{f}_0'=\eta_0\eta_0'=2\beta_1\eta_0-\gamma\xi_0$$
$$\tfrac{1}{2}\mathfrak{f}_0''=\eta_0\eta_0''+\eta_0'\eta_0'=4\beta_1^2-\alpha_2\gamma+2\alpha_1\eta_0-4\beta\xi_0$$
$$\tfrac{1}{12}\mathfrak{f}_0'''=\tfrac{1}{6}(\eta_0\eta_0'''+3\eta_0'\eta_0'')=2\alpha_1\beta_1-\alpha_2\beta-\alpha\xi_0$$
$$\tfrac{1}{24}\mathfrak{f}_0^{IV}=\mathfrak{A}=\alpha_1^2-\alpha\alpha_2$$

Lässt man bei der folgenden Rechnung den Index 0 der Bequemlichkeit halber überall weg, so erhält man zunächst durch Elimination von β_1

$$\xi\eta(\xi'-\eta')=\gamma\xi^2-\alpha_2\eta^2$$

Setzt man folglich

$$\gamma\xi=\eta(\xi'+\delta)\,,\qquad\qquad \alpha_2\eta=\xi(\eta'+\delta)$$

so wird

$$2\beta_1=\xi'+\eta'+\delta\,,\qquad 4\beta_1^2-\alpha_2\gamma=\xi'^2+\xi'\eta'+\eta'^2+(\xi'+\eta')\delta$$

ferner

$$\xi\xi'' = (\xi'+\eta')(\eta'+\delta) + 2\beta\xi - 4\alpha_1\eta$$
$$\eta\eta'' = (\xi'+\eta')(\xi'+\delta) + 2\alpha_1\eta - 4\beta\xi$$

und durch Auflösung dieser beiden Gleichungen

$$6\alpha\eta = (\xi'+\eta')(\xi'+2\eta'+3\delta) - 2\xi\xi'' - \eta\eta''$$
$$6\beta\xi = (\xi'+\eta')(2\xi'+\eta'+3\delta) - \xi\xi'' - 2\eta\eta''$$

Damit folgt

$$\xi\xi''' + 2\xi'\xi'' + 6\alpha\eta = \frac{\xi'+\eta'+\delta}{\xi}[(\xi'+\eta')(2\xi'+\eta'+3\delta) - \xi\xi'' - 2\eta\eta'']$$
$$- \frac{\xi'+\delta}{\xi}[(\xi'+\eta')(\xi'+2\eta'+3\delta) - 2\xi\xi'' - \eta\eta'']$$

oder

$$\xi^2\xi''' + 6\alpha\xi\eta = \xi'(\xi'^2 - 2\xi\xi'' + 2\eta'^2 - \eta\eta'') + \eta'(2\xi'^2 - \xi\xi'' + \eta'^2 - 2\eta\eta'')$$
$$+ \delta(\xi'^2 + \xi\xi'' + 3\xi'\eta' + 2\eta'^2 - \eta\eta'')$$

nebst

$$\eta^2\eta''' + 6\alpha\xi\eta = \xi'(\xi'^2 - 2\xi\xi'' + 2\eta'^2 - \eta\eta'') + \eta'(2\xi'^2 - \xi\xi'' + \eta'^2 - 2\eta\eta'')$$
$$+ \delta(2\xi'^2 - \xi\xi'' + 3\xi'\eta' + \eta'^2 + \eta\eta'')$$

woraus sich die Werthe von α und δ bestimmen.

9.

Die Subtraction der zuletzt gefundenen Gleichungen ergibt

$$\xi^2\xi''' - \eta^2\eta''' = \delta(2\xi\xi'' - \xi'^2 + \eta'^2 - 2\eta\eta'')$$

oder mit Einführung der Covarianten $f\,g$ und h

$$\frac{h}{f\xi} - \frac{\mathfrak{h}}{\mathfrak{f}\eta} = \delta\left(\frac{\mathfrak{g}}{\mathfrak{f}} - \frac{g}{f}\right)$$

mithin

$$\delta = \frac{\xi f\mathfrak{h} - \eta\mathfrak{f}h}{\xi\eta(\mathfrak{f}g - f\mathfrak{g})}$$

Durch Substitution dieses Ausdruckes gehen nunmehr nach einigen leichten Reductionen die gesuchten Werthe hervor:

$$\alpha_1 = \frac{\xi(\mathfrak{f}'g - f\mathfrak{g}') - 2\eta h}{2(\mathfrak{f}g - f\mathfrak{g})}$$
$$\beta_1 = \frac{\xi(\mathfrak{f}g' - f'\mathfrak{g}) + \eta(\mathfrak{f}'g - f\mathfrak{g}')}{4(\mathfrak{f}g - f\mathfrak{g})}$$

$$\gamma = \frac{2\xi\mathfrak{h} + \eta(\mathfrak{f}g' - f'\mathfrak{g})}{2(\mathfrak{f}g - f\mathfrak{g})}$$

$$\alpha_1 = \frac{3\xi(\mathfrak{f}'g' - f'\mathfrak{g}') - 4\eta h' + 2\eta(\mathfrak{f}''g - f\mathfrak{g}'') + 4\eta(G - \mathfrak{G})}{24(\mathfrak{f}g - f\mathfrak{g})}$$

$$\beta = \frac{4\xi(G - \mathfrak{G}) + 2\xi(\mathfrak{f}g'' - f''\mathfrak{g}) + 4\xi\mathfrak{h}' + 3\eta(\mathfrak{f}'g' - f'\mathfrak{g}')}{24(\mathfrak{f}g - f\mathfrak{g})}$$

$$\alpha = \frac{\xi(\mathfrak{f}'g'' - f''\mathfrak{g}') + \frac{4}{5}\xi\mathfrak{h}'' - \frac{4}{5}\eta h'' + \eta(\mathfrak{f}''g' - f'\mathfrak{g}'') + 2(\xi\mathfrak{f} - \eta f)(G - \mathfrak{G})}{24(\mathfrak{f}g - f\mathfrak{g})}$$

Die beiden noch nicht benutzten Gleichungen

$$\beta^2 - \alpha\gamma = A \qquad \text{und} \qquad \alpha_1^2 - \alpha\alpha_2 = \mathfrak{A}$$

müssen die Invariantengleichungen $G = \mathfrak{G}$ und $H = \mathfrak{H}$ liefern. Setzt man daher

$$G - \mathfrak{G} = 0\,, \qquad k = \mathfrak{f}g - f\mathfrak{g}$$

so folgt schliesslich

$$\alpha = \frac{1}{24k}\left(\xi\frac{\partial^3 k}{\partial x^2 \partial y} + \frac{4}{5}\xi\frac{\partial^2 \mathfrak{h}}{\partial y^2} - \frac{4}{5}\eta\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \eta\frac{\partial^3 x}{\partial x \partial y^2}\right)$$

$$\beta = \frac{1}{24k}\left(2\xi\frac{\partial^2 k}{\partial x^2} + 4\xi\frac{\partial \mathfrak{h}}{\partial y} + 3\eta\frac{\partial^2 k}{\partial x \partial y}\right)$$

$$\gamma = \frac{1}{2k}\left(2\xi\mathfrak{h} + \eta\frac{\partial k}{\partial x}\right)$$

$$\alpha_1 = \frac{1}{24k}\left(3\xi\frac{\partial^2 k}{\partial x \partial y} - 4\eta\frac{\partial h}{\partial x} + 2\eta\frac{\partial^2 k}{\partial y^2}\right)$$

$$\beta_1 = \frac{1}{4k}\left(\xi\frac{\partial k}{\partial x} + \eta\frac{\partial k}{\partial y}\right)$$

$$\gamma_1 = \eta$$

$$\alpha_2 = \frac{1}{2k}\left(\xi\frac{\partial k}{\partial y} - 2\eta h\right)$$

$$\beta_2 = \xi$$

$$\gamma_2 = 0$$

wo rechts allenthalben die Indices 0 hinzugefügt, mit anderen Worten x und y durch x_0 und y_0 ersetzt werden müssen.

Die Gleichung $f(xy) = 0$ nimmt jetzt nach Multiplication mit k_0 die Gestalt an

$$k_0 f(xy) = \xi_0 \Xi + \eta_0 \Upsilon = 0$$

wo

$$\Xi = 2k_0(y-y_0) + \frac{1}{2}\frac{\partial k_0}{\partial y_0}(y-y_0)^2 + \frac{\partial k_0}{\partial x_0}(x-x_0)(y-y_0) + \mathfrak{h}_0(x-x_0)^2$$
$$+ \frac{1}{4}\frac{\partial^2 k_0}{\partial x_0 \partial y_0}(x-x_0)(y-y_0)^2 + \left(\frac{1}{6}\frac{\partial^2 k_0}{\partial x_0^2} + \frac{1}{3}\frac{\partial \mathfrak{h}_0}{\partial y_0}\right)(x-x_0)^2(y-y_0)$$
$$+ \left(\frac{1}{24}\frac{\partial^3 k_0}{\partial x_0^2 \partial y_0} + \frac{1}{30}\frac{\partial^2 \mathfrak{h}_0}{\partial y_0^2}\right)(x-x_0)^2(y-y_0)^2$$

$$\Upsilon = 2k_0(x-x_0) + \frac{1}{2}\frac{\partial k_0}{\partial x_0}(x-x_0)^2 + \frac{\partial k_0}{\partial y_0}(x-x_0)(y-y_0) - h_0(y-y_0)^2$$
$$+ \frac{1}{4}\frac{\partial^2 k_0}{\partial x_0 \partial y_0}(x-x_0)^2(y-y_0) + \left(\frac{1}{6}\frac{\partial^2 k_0}{\partial y_0^2} - \frac{1}{3}\frac{\partial h_0}{\partial x_0}\right)(x-x_0)(y-y_0)^2$$
$$+ \left(\frac{1}{24}\frac{\partial^3 k_0}{\partial x_0 \partial y_0^2} - \frac{1}{30}\frac{\partial^2 h_0}{\partial x_0^2}\right)(x-x_0)^2(y-y_0)^2$$

Ξ und Υ gehen durch Vertauschung von x und x_0 mit y und y_0 in $-\Upsilon$ und $-\Xi$ über. Da auch die Vertauschung von x und y mit x_0 und y_0 gestattet ist, wodurch die Gleichung

$$\xi \Xi_1 + \eta \Upsilon_1 = 0$$

hervorgehen mag, so ergeben sich gewisse Folgerungen in Bezug auf die Zusammensetzung der Werthe von Ξ^2 resp. Υ^2, auf welche wir hier nicht näher eingehen wollen.

10.

Die Substitution des Art. 7

$$x - x_0 = 3\,\frac{f_0'Y - g_0' - 2\xi_0 Y_1}{12\,Y^2 - f_0''Y + g_0'' - G} = 4\,\frac{g_0 - f_0 Y}{2\xi_0 Y_1 + f_0'Y - g_0'}$$

wo

$$Y = \frac{\eta_0\eta + \mathfrak{f}_0}{2(y-y_0)^2} + \frac{\mathfrak{f}_0'}{4(y-y_0)} + \frac{\mathfrak{f}_0''}{24}$$
$$Y_1 = \frac{\eta\mathfrak{f}_0 + \eta_0\mathfrak{f}}{(y-y_0)^3} + \frac{\eta\mathfrak{f}_0' - \eta_0\mathfrak{f}'}{4(y-y_0)^2}$$

erscheint nunmehr unter der Form

$x - x_0 =$

$$\frac{24k_0(\eta-\eta_0) - \left(3\xi_0\frac{\partial^2 k_0}{\partial x_0 \partial y_0} - 4\eta_0\frac{\partial h_0}{\partial x_0} + 2\eta_0\frac{\partial^2 k_0}{\partial y_0^2}\right)(y-y_0)^2 - 12\left(\xi_0\frac{\partial k_0}{\partial x_0} + \eta_0\frac{\partial k_0}{\partial y_0}\right)(y-y_0)}{\left(\xi_0\frac{\partial^3 k_0}{\partial x_0^2 \partial y_0} + \frac{4}{5}\xi_0\frac{\partial^2 \mathfrak{h}_0}{\partial y_0^2} - \frac{4}{5}\eta_0\frac{\partial^2 h_0}{\partial x_0^2} + \eta_0\frac{\partial^3 k_0}{\partial x_0 \partial y_0^2}\right)(y-y_0)^2 + 2\left(4\xi_0\frac{\partial \mathfrak{h}_0}{\partial y_0} + 2\xi_0\frac{\partial^2 k_0}{\partial x_0^2} + 3\eta_0\frac{\partial^2 k_0}{\partial x_0 \partial y_0}\right)(y-y_0) + 12\left(2\xi_0\mathfrak{h}_0 + \eta_0\frac{\partial k_0}{\partial x_0}\right)}$$

wofür auch geschrieben werden kann

$$x - x_0 =$$

$$= \frac{\left(2\eta_0 h_0 - \xi_0 \frac{\partial k_0}{\partial y_0}\right)(y-y_0)^2 - 4\xi_0 k_0 (y-y_0)}{2k_0(\eta+\eta_0) + \frac{1}{12}\left(3\xi_0 \frac{\partial^2 k_0}{\partial x_0 \partial y_0} - 4\eta_0 \frac{\partial h_0}{\partial x_0} + 2\eta_0 \frac{\partial^2 k_0}{\partial y_0^2}\right)(y-y_0)^2 + \left(\xi_0 \frac{\partial k_0}{\partial x_0} + \eta_0 \frac{\partial k_0}{\partial y_0}\right)(y-y_0)}$$

Um endlich das Radical ξ als rationale Function von y und η zu berechnen, kann man sich der Ausdrücke

$$\xi = [\alpha(y-y_0)+\beta](x-x_0)^2 + 2[\alpha_1(y-y_0)+\beta_1](x-x_0) + \alpha_2(y-y_0) + \xi_0$$

oder

$$\frac{\xi-\xi_0}{x-x_0} =$$

$$= \frac{[(2\alpha\xi_0 - \alpha_2\beta)(y-y_0) + 2\beta\xi_0 - \alpha_2\gamma](x-x_0) + 2[(2\alpha_1\xi_0 - \alpha_2\beta_1)(y-y_0) + 2\beta_1\xi_0 - \alpha_2\gamma_1]}{\alpha_2(y-y_0) + 2\xi_0}$$

$$= 2\,\frac{(2\alpha_1\xi_0 - \alpha_2\beta_1)(y-y_0) + 2\beta_1\xi_0 - \alpha_2\eta_0}{\alpha_2(y-y_0) + 2\xi_0} - \frac{(2\alpha\xi_0 - \alpha_2\beta)(y-y_0)^2 + (2\beta\xi_0 - \alpha_2\gamma)(y-y_0)}{\eta + \eta_0 + \alpha_1(y-y_0)^2 + 2\beta_1(y-y_0)}$$

bedienen und die für $x - x_0$ so wie für die Coefficienten $\alpha\ \beta\ \gamma$ gefundenen Werthe darin substituiren. In der Regel wird es indessen bequemer sein, die Ausdrücke für ξ und η vermittelst der Gleichungen

$$\xi = -\eta\frac{dx}{dy}\,, \qquad \eta = -\xi\frac{dy}{dx}$$

also durch directe Differentiation abzuleiten.

Für den Fall, dass y_0 eine Wurzel der Gleichung $\mathfrak{f} = 0$ ist, verschwindet η_0 und den Formeln kann eine einfachere Gestalt gegeben werden. Mittelst

$$Y = \frac{1}{4}\frac{\mathfrak{f}_0'}{y-y_0} + \frac{1}{24}\mathfrak{f}_0''\,, \qquad Y_1 = \frac{\mathfrak{f}_0'\eta}{4(y-y_0)^2}$$

gehen alsdann die Ausdrücke hervor

$$x - x_0 = \frac{3}{4}\,\frac{(\frac{1}{6}f_0'\mathfrak{f}_0'' - 4g_0')(y-y_0)^2 + f_0'\mathfrak{f}_0'(y-y_0) - 2\mathfrak{f}_0'\xi_0\eta}{(g_0'' + \mathfrak{g}_0'' - 2G - \frac{1}{24}f_0''\mathfrak{f}_0'')(y-y_0)^2 + (6\mathfrak{g}_0' - \frac{1}{4}f_0''\mathfrak{f}_0')(y-y_0) + 12\mathfrak{g}_0}$$

$$= 4\,\frac{(4g_0 - \frac{1}{6}f_0\mathfrak{f}_0'')(y-y_0)^2 - f_0\mathfrak{f}_0'(y-y_0)}{(\frac{1}{6}f_0'\mathfrak{f}_0'' - 4g_0')(y-y_0)^2 + f_0'\mathfrak{f}_0'(y-y_0) + 2\mathfrak{f}_0'\xi_0\eta}$$

Führt man hier die Functionen $L\ M\ N$ des Art. 4 ein und setzt

$$f = Lx^2 + 2Mx + N\,, \qquad f' = 4(Lx+M)\,, \qquad f'' = 12L$$

sowie analog

$$g = L_1x^2 + 2M_1x + N_1\,, \qquad \mathfrak{f}_0 = \mathfrak{L}_0y_0^2 + 2\mathfrak{M}_0y_0 + \mathfrak{N}_0 = 0 \qquad \text{u. s. w.}$$

so kann man die vorstehenden Gleichungen schreiben

$$x - x_0 = \frac{(L_0 x_0 + M_0)(\mathfrak{L}_0 y^2 + 2\mathfrak{M}_0 y + \mathfrak{N}_0) - 2(L_1^0 x_0 + M_1^0)(y - y_0)^2 - (\mathfrak{L}_0 y_0 + \mathfrak{M}_0)\xi_0 \eta}{(2L_1^0 - \frac{1}{3}G)(y - y_0)^2 + 2(\mathfrak{L}_1^0 y^2 + 2\mathfrak{M}_1^0 y + \mathfrak{N}_1^0) - L_0(\mathfrak{L}_0 y^2 + 2\mathfrak{M}_0 y + \mathfrak{N}_0)}$$

$$= \frac{2 g_0 (y - y_0)^2 - f_0(\mathfrak{L}_0 y^2 + 2\mathfrak{M}_0 y + \mathfrak{N}_0)}{(L_0 x_0 + M_0)(\mathfrak{L}_0 y^2 + 2\mathfrak{M}_0 y + \mathfrak{N}_0) - 2(L_1^0 x_0 + M_1^0)(y - y_0)^2 + (\mathfrak{L}_0 y_0 + \mathfrak{M}_0)\xi_0 \eta}$$

Differentiirt man die zuletzt gefundene Formel, so ergibt sich mit Hülfe der geeigneten Reductionen der Werth des Radicals

$$\xi = -\eta \frac{dx}{dy} = 2(y - y_0) \times$$

$$\times \frac{2\xi_0(\mathfrak{L}_0 y_0 + \mathfrak{M}_0)[f_0(\mathfrak{L}_1 y y_0 + \mathfrak{M}_1(y + y_0) + \mathfrak{N}_1) - g_0(\mathfrak{L} y y_0 + \mathfrak{M}(y + y_0) + \mathfrak{N})] - \eta h_0(\mathfrak{L}_0 y y_0 + \mathfrak{M}_0(y + y_0) + \mathfrak{N}_0)}{[(L_0 x_0 + M_0)(\mathfrak{L}_0 y^2 + 2\mathfrak{M}_0 y + \mathfrak{N}_0) - 2(L_1^0 x_0 + M_1^0)(y - y_0)^2 + (\mathfrak{L}_0 y_0 + \mathfrak{M}_0)\xi_0 \eta]^2}.$$

Die umgekehrte Substitution dagegen liefert die Formeln

$$y - y_0 =$$

$$= \frac{3}{4}\mathfrak{f}_0' \frac{\frac{1}{6}(f_0'' - \mathfrak{f}_0'')(x - x_0)^2 + f_0'(x - x_0) + 2(f_0 - \xi_0 \xi)}{(g_0'' - \mathfrak{g}_0'' - 2G - \frac{1}{24} f_0'' \mathfrak{f}_0'')(x - x_0)^2 + (6 g_0' - \frac{1}{4} f_0' \mathfrak{f}_0'')(x - x_0) + 12 g_0 - \frac{1}{2} f_0 \mathfrak{f}_0''}$$

$$= (\mathfrak{L}_0 y_0 + \mathfrak{M}_0) \frac{L_0 x^2 + 2 M_0 x + N_0 - \mathfrak{L}_0 (x - x_0)^2 - \xi_0 \xi}{(2\mathfrak{L}_1^0 - \frac{1}{3}G)(x - x_0)^2 + 2(L_1^0 x^2 + 2M_1^0 x + N_1^0) - \mathfrak{L}_0(L_0 x^2 + 2M_0 x + N_0)}$$

oder einfacher

$$y - y_0 = \frac{\mathfrak{f}_0'(x - x_0)^2}{\frac{1}{6}(f_0'' - \mathfrak{f}_0'')(x - x_0)^2 + f_0'(x - x_0) + 2(f_0 + \xi_0 \xi)}$$

$$= \frac{2(\mathfrak{L}_0 y_0 + \mathfrak{M}_0)(x - x_0)^2}{L_0 x^2 + 2 M_0 x + N_0 - \mathfrak{L}_0 (x - x_0)^2 + \xi_0 \xi} = \frac{\mathfrak{L}_0 y_0 + \mathfrak{M}_0}{X - \frac{1}{2}\mathfrak{L}_0}$$

Durch Differentiation erhält man aus letzterem Ausdrucke

$$\eta = -\xi \frac{dy}{dx} =$$

$$= -4(\mathfrak{L}_0 y_0 + \mathfrak{M}_0)(x - x_0) \frac{(L_0 x x_0 + M_0 \overline{x + x_0} + N_0)\xi + (L x x_0 + M \overline{x + x_0} + N)\xi_0}{(L_0 x^2 + 2M_0 x + N_0 - \mathfrak{L}_0 (x - x_0)^2 + \xi_0 \xi)^2}$$

11.

Man beweist für $\mathfrak{f} = 0$ leicht die Relationen

$$\mathfrak{g} = \frac{1}{16}\mathfrak{f}'\mathfrak{f}', \qquad \mathfrak{g}' = \frac{1}{24}\mathfrak{f}'\mathfrak{f}'', \qquad \mathfrak{g}'' = G + \frac{1}{48}\mathfrak{f}''\mathfrak{f}''$$

$$\mathfrak{h} = \frac{1}{2}\mathfrak{f}'\mathfrak{g}, \qquad \mathfrak{h}' = \frac{3}{4}\mathfrak{f}'\mathfrak{g}', \qquad \mathfrak{h}'' = \frac{5}{4}\mathfrak{f}'\mathfrak{g}'' - 2G.$$

und damit

$$k = -\tfrac{1}{16} f \mathfrak{f}'^2 , \qquad \frac{\partial k}{\partial x} = -\tfrac{1}{16} f' \mathfrak{f}'^2 , \qquad \frac{\partial k}{\partial y} = \mathfrak{f}'\left(g - \tfrac{1}{24} f \mathfrak{f}''\right)$$

$$\frac{\partial^2 k}{\partial x^2} = -\tfrac{1}{16} f'' \mathfrak{f}'^2 , \qquad \frac{\partial^2 k}{\partial x \partial y} = \mathfrak{f}'\left(g' - \tfrac{1}{24} f' \mathfrak{f}''\right) , \qquad \frac{\partial^3 k}{\partial x^2 \partial y} = \mathfrak{f}'\left(g'' - \tfrac{1}{24} f'' \mathfrak{f}''\right)$$

Die Substitution dieser Werthe ergibt ohne Mühe

$$\begin{aligned} \xi_0 \mathfrak{f}_0' \cdot f(x y) = {} & 2 f_0 \mathfrak{f}_0' (y - y_0) + \left(\tfrac{1}{3} f_0 \mathfrak{f}_0'' - 8 g_0\right)(y - y_0)^2 + f_0' \mathfrak{f}_0' (x - x_0)(y - y_0) \\ & - 8 \mathfrak{g}_0 (x - x_0)^2 + \left(\tfrac{1}{6} f_0' \mathfrak{f}_0'' - 4 g_0'\right)(x - x_0)(y - y_0)^2 \\ & + \left(\tfrac{1}{6} f_0'' \mathfrak{f}_0' - 4 \mathfrak{g}_0'\right)(x - x_0)^2 (y - y_0) + \tfrac{2}{3}\left(\tfrac{1}{24} f_0'' \mathfrak{f}_0'' - g_0'' - \mathfrak{g}_0'' + 2 G\right)(x - x_0)^2 (y - y_0)^2 \end{aligned}$$

Wendet man die Umformung des vorigen Artikels an, so geht wegen $k_0 f(x y) = \xi_0 \Xi$ die vorstehende Gleichung über in

$$\begin{aligned} - \frac{\Xi}{\mathfrak{L}_0 y_0 + \mathfrak{M}_0} = {} & \tfrac{1}{3} G (x - x_0)^2 (y - y_0)^2 - 2 (\mathfrak{L}_1^0 y^2 + 2 \mathfrak{M}_1^0 y + \mathfrak{N}_1^0)(x - x_0)^2 \\ & - 2 (L_1^0 x^2 + 2 M_1^0 x + N_1^0)(y - y_0)^2 + (L_0 x^2 + 2 M_0 x + N_0)(\mathfrak{L}_0 y^2 + 2 \mathfrak{M}_0 y + \mathfrak{N}_0) \end{aligned}$$

wo die rechte Seite durch Vertauschung von x und x_0 sowie von y und y_0 ungeändert bleibt.

Dieser Gleichung sind die Werthe der Coefficienten $a\, b\, c \ldots$ zu entnehmen, und zwar erhält man

$$\begin{aligned} a w_0 \xi_0 &= L_0 \mathfrak{L}_0 - 2 L_1^0 - 2 \mathfrak{L}_1^0 + \tfrac{1}{3} G \\ b w_0 \xi_0 &= L_0 \mathfrak{M}_0 - 2 \mathfrak{M}_1^0 + 2 L_1^0 y_0 - \tfrac{1}{3} G y_0 \\ a_1 w_0 \xi_0 &= \mathfrak{L}_0 M_0 - 2 M_1^0 + 2 \mathfrak{L}_1^0 x_0 - \tfrac{1}{3} G x_0 \\ c w_0 \xi_0 &= L_0 \mathfrak{N}_0 - 2 \mathfrak{N}_1^0 - 2 L_1^0 y_0^2 + \tfrac{1}{3} G y_0^2 \\ a_2 w_0 \xi_0 &= \mathfrak{L}_0 N_0 - 2 N_1^0 - 2 \mathfrak{L}_1^0 x_0^2 + \tfrac{1}{3} G x_0^2 \\ b_1 w_0 \xi_0 &= M_0 \mathfrak{M}_0 + 2 \mathfrak{M}_1^0 x_0 + 2 M_1^0 y_0 + \tfrac{1}{3} G x_0 y_0 \\ c_1 w_0 \xi_0 &= M_0 \mathfrak{N}_0 + 2 \mathfrak{N}_1^0 x_0 - 2 M_1^0 y_0^2 - \tfrac{1}{3} G x_0 y_0^2 \\ b_2 w_0 \xi_0 &= \mathfrak{M}_0 N_0 + 2 N_1^0 y_0 - 2 \mathfrak{M}_1^0 x_0^2 - \tfrac{1}{3} G x_0^2 y_0 \\ c_2 w_0 \xi_0 &= N_0 \mathfrak{N}_0 - 2 \mathfrak{N}_1^0 x_0^2 - 2 N_1^0 y_0^2 + \tfrac{1}{3} G x_0^2 y_0^2 \\ w_0 &= \mathfrak{L}_0 y_0 + \mathfrak{M}_0 = \mathfrak{A} y_0^3 + 3 \mathfrak{B} y_0^2 + 3 \mathfrak{C} y_0 + \mathfrak{D} \end{aligned}$$

Hieraus berechnet man sogleich

$$
\begin{aligned}
p w_0 \xi_0 &= \mathfrak{L}_0 W(xx_0) - 2 W_1(xx_0) - \left(2\mathfrak{L}_1^0 - \tfrac{1}{3} G\right)(x-x_0)^2 \\
p_1 w_0 \xi_0 &= \mathfrak{M}_0 W(xx_0) + 2 y_0 W_1(xx_0) - \left(2\mathfrak{M}_1^0 + \tfrac{1}{3} G y_0\right)(x-x_0)^2 \\
p_2 w_0 \xi_0 &= \mathfrak{N}_0 W(xx_0) - 2 y_0^2 W_1(xx_0) - \left(2\mathfrak{N}_1^0 - \tfrac{1}{3} G y_0^2\right)(x-x_0)^2 \\
q w_0 \xi_0 &= L_0 \mathfrak{W}(yy_0) - 2 \mathfrak{W}_1(yy_0) - \left(2 L_1^0 - \tfrac{1}{3} G\right)(y-y_0)^2 \\
q_1 w_0 \xi_0 &= M_0 \mathfrak{W}(yy_0) + 2 x_0 \mathfrak{W}_1(yy_0) - \left(2 M_1^0 + \tfrac{1}{3} G x_0\right)(y-y_0)^2 \\
q_2 w_0 \xi_0 &= N_0 \mathfrak{W}(yy_0) - 2 x_0^2 \mathfrak{W}_1(yy_0) - \left(2 N_1^0 - \tfrac{1}{3} G x_0^2\right)(y-y_0)^2 \\
W(xy) &= Ly^2 + 2My + N = \mathfrak{L}x^2 + 2\mathfrak{M}x + \mathfrak{N} \\
&= Ax^2y^2 + 2Bxy(x+y) + C(x^2 + 4xy + y^2) + 2D(x+y) + E
\end{aligned}
$$

sowie analog

$$
W_1(xy) = A_1 x^2 y^2 + \ldots, \qquad \mathfrak{W}(xy) = \mathfrak{A} x^2 y^2 + \ldots, \qquad \mathfrak{W}_1(xy) = \mathfrak{A}_1 x^2 y^2 + \ldots
$$

und überzeugt sich ohne Schwierigkeit, dass die hieraus entspringenden Werthe von

$$
\begin{aligned}
x &= \frac{(\mathfrak{L}_0 y_0 + \mathfrak{M}_0)\xi_0 \eta - M_0 \mathfrak{W}(yy_0) - 2x_0 \mathfrak{W}_1(yy_0) + (2M_1^0 + \frac{1}{3} G x_0)(y-y_0)^2}{L_0 \mathfrak{W}(yy_0) - 2\mathfrak{W}_1(yy_0) - (2L_1^0 - \frac{1}{3} G)(y-y_0)^2} \\
&= \frac{-N_0 \mathfrak{W}(yy_0) + 2x_0^2 \mathfrak{W}_1(yy_0) + (2N_1^0 - \frac{1}{3} G x_0^2)(y-y_0)^2}{(\mathfrak{L}_0 y_0 + \mathfrak{M}_0)\xi_0 \eta + M_0 \mathfrak{W}(yy_0) + 2x_0 \mathfrak{W}_1(yy_0) - (2M_1^0 + \frac{1}{3} G x_0)(y-y_0)^2} \\
y &= \frac{(\mathfrak{L}_0 y_0 + \mathfrak{M}_0)\xi_0 \xi - \mathfrak{M}_0 W(xx_0) - 2y_0 W_1(xx_0) + (2\mathfrak{M}_1^0 + \frac{1}{3} G y_0)(x-x_0)^2}{\mathfrak{L}_0 W(xx_0) - 2W_1(xx_0) - (2\mathfrak{L}_1^0 - \frac{1}{3} G)(x-x_0)^2} \\
&= \frac{-\mathfrak{N}_0 W(xx_0) + 2y_0^2 W_1(xx_0) + (2\mathfrak{N}_1^0 - \frac{1}{3} G y_0^2)(x-x_0)^2}{(\mathfrak{L}_0 y_0 + \mathfrak{M}_0)\xi_0 \xi + \mathfrak{M}_0 W(xx_0) + 2y_0 W_1(xx_0) - (2\mathfrak{M}_1^0 + \frac{1}{3} G y_0)(x-x_0)^2}
\end{aligned}
$$

mit den Resultaten des vorigen Artikels in Einklang stehen.

12.

Es würde noch übrig bleiben, auch im Falle η_0 nicht verschwindet, von den Coefficienten $\alpha\beta\gamma\ldots$ zu den Coefficienten $a\,b\,c\ldots$ überzugehen, mit anderen Worten, statt nach den Potenzen von $x-x_0$ und $y-y_0$ die Entwickelung nach x und y vorzunehmen. Hierzu führen die Gleichungen

$$\alpha = a\,, \qquad \beta = a y_0 + b\,, \qquad \alpha_1 = a x_0 + a_1$$
$$\gamma = a y_0^2 + 2 b y_0 + c\,, \qquad \alpha_2 = a x_0^2 + 2 a_1 x_0 + a_2$$
$$\beta_1 - \beta x_0 = a_1 y_0 + b_1\,, \qquad \beta_1 - \alpha_1 y_0 = b x_0 + b_1$$
$$\eta_0 - \gamma x_0 = a_1 y_0^2 + 2 b_1 y_0 + c_1\,, \qquad \xi_0 - \alpha_2 y_0 = b x_0^2 + 2 b_1 x_0 + b_2$$
$$(\gamma x_0 - 2\eta_0) x_0 = a_2 y_0^2 + 2 b_2 y_0 + c_2\,, \qquad (\alpha_2 y_0 - 2\xi_0) y_0 = c x_0^2 + 2 c_1 x_0 + c_2$$

Indessen wollen wir uns der Ableitung der resultirenden Ausdrücke für den allgemeinen Fall überheben. In der That sind schon die Formeln der letzten Artikel ihrer grossen Allgemeinheit wegen ziemlich complicirter Natur: eine wesentliche Vereinfachung dagegen tritt bei der Anwendung auf specielle Fälle ein. Es sollen desshalb die gefundenen Resultate an einigen hervorstechenden Beispielen erläutert werden.

Als erstes Beispiel behandeln wir den Fall, in welchem die Coefficienten $a\ b\ c$.. den drei Bedingungsgleichungen

$$a_1 = b\,, \qquad a_2 = c\,, \qquad b_2 = c_1$$

unterworfen sind. Alsdann fallen die $A\ B$.. mit den $\mathfrak{A}\ \mathfrak{B}$.. zusammen, so dass sich neben

$$f = \xi^2 = \xi_1^2 \xi_2^2 = A x^4 + 4 B x^3 + 6 C x^2 + 4 D x + E$$
$$g = A_1 x^4 + 4 B_1 x^3 + 6 C_1 x^2 + 4 D_1 x + E_1$$
$$h = i_0 x^6 + 6 i_1 x^5 + 15 i_2 x^4 + 20 i_3 x^3 + 15 i_4 x^2 + 6 i_5 x + i_6$$

die Ausdrücke *)

$$\mathfrak{f} = \eta^2 = \eta_1^2 \eta_2^2 = A y^4 + 4 B y^3 + 6 C y^2 + 4 D y + E$$
$$\mathfrak{g} = A_1 y^4 + 4 B_1 y^3 + 6 C_1 y^2 + 4 D_1 y + E_1$$
$$\mathfrak{h} = i_0 y^6 + 6 i_1 y^5 + 15 i_2 y^4 + 20 i_3 y^3 + 15 i_4 y^2 + 6 i_5 y + i_6$$

ergeben. Um die rationale Gleichung $f(x y) = 0$ abzuleiten und die Coefficienten $\alpha\ \beta\ \gamma$.. zu berechnen, hat man zuvörderst die Grösse $k = \mathfrak{f} g - f \mathfrak{g}$ zu bilden. Man erhält im jetzigen Falle

$$k = 2(y-x)\big[i_0 x^3 y^3 + 3 i_1 x^2 y^2 (x+y) + 3 i_2 x y (x^2 + 3xy + y^2) + i_3 (x+y)(x^2 + 8xy + y^2) + 3 i_4 (x^2 + 3xy + y^2) + 3 i_5 (x+y) + i_6\big]$$
$$= (y-x)(h+\mathfrak{h}) - (y-x)^3 \big[i_0 (x^2 + xy + y^2)^2 + 6 i_1 (x+y)(x^2 + xy + y^2) + 3 i_2 (5x^2 + 8xy + 5y^2) + 18 i_3 (x+y) + 9 i_4\big]$$

---

*) Wegen der Bedeutung der Coefficienten siehe Art. 6.

Damit wird

$$\begin{aligned}\Xi = {} & 4(y-y_0)(y_0-x_0)[i_0 x_0^3 y_0^3 + 3 i_1 x_0^2 y_0^2 (x_0+y_0) + 3 i_2 x_0 y_0 (x_0^2 + 3 x_0 y_0 + y_0^2) + \\ & + i_3 (x_0+y_0)(x_0^2 + 8 x_0 y_0 + y_0^2) + 3 i_4 (x_0^2 + 3 x_0 y_0 + y_0^2) + \\ & \qquad + 3 i_5 (x_0 + y_0) + i_6] \\ & + (y-y_0)^2 [i_0 x_0^3 y_0^2 (4 y_0 - 3 x_0) + 6 i_1 x_0^2 y_0 (2 y_0^2 - x_0^2) + \\ & + 3 i_2 x_0 (4 y_0^3 + 6 x_0 y_0^2 - 4 x_0^2 y_0 - x_0^3) + 4 i_3 (y_0^3 + 6 x_0 y_0 - 2 x_0^3) + \\ & \qquad + 3 i_4 (3 y_0^2 + 4 x_0 y_0 - 2 x_0^2) + 6 i_5 y_0 + i_6] \\ & + 2 (x-x_0)(y-y_0)[i_0 x_0^2 y_0^3 (3 y_0 - 4 x_0) + 6 i_1 x_0 y_0^2 (y_0^2 - 2 x_0^2) + \\ & + 3 i_2 y_0 (y_0^3 + 4 x_0 y_0^2 - 6 x_0^2 y_0 - 4 x_0^3) + 4 i_3 (2 y_0^3 - 6 x_0^2 y_0 - x_0^3) + \\ & \qquad + 3 i_4 (2 y_0^2 - 4 x_0 y_0 - 3 x_0^2) - 6 i_5 x_0 - i_6] \\ & + (x-x_0)^2 [i_0 y_0^6 + 6 i_1 y_0^5 + 15 i_2 y_0^4 + 20 i_3 y_0^3 + 15 i_4 y_0^2 + 6 i_5 y_0 + i_6] \\ & + 6 (x-x_0)(y-y_0)^2 (y_0-x_0)[i_0 x_0^2 y_0^2 + 2 i_1 x_0 y_0 (x_0 + y_0) + \\ & \qquad + i_2 (x_0^2 + 4 x_0 y_0 + y_0^2) + 2 i_3 (x_0 + y_0) + i_4] \\ & + 2 (x-x_0)^2 (y-y_0)(y_0-x_0)[i_0 y_0^3 (2 x_0 + y_0) + 6 i_1 y_0^2 (x_0 + y_0) + \\ & \qquad + 6 i_2 y_0 (x_0 + 2 y_0) + 2 i_3 (x_0 + 5 y_0) + 3 i_4] \\ & + (x-x_0)^2 (y-y_0)^2 (y_0-x_0)[i_0 y_0^2 (3 x_0 + y_0) + 6 i_1 y_0 (x_0 + y_0) + \\ & \qquad + 3 i_2 (x_0 + 3 y_0) + 4 i_3]\end{aligned}$$

und durch Buchstabenvertauschung

$$T = 2 k_0 (x - x_0) - h_0 (y - y_0)^2 + \text{etc.}$$

woraus die Werthe der Coefficienten $\alpha\, \beta\, \gamma \ldots$ entnommen werden können*).

13.

Da in der Integralgleichung

$$\int_{x_0}^{x} + \int_{y_0}^{y} \frac{dx}{\xi} = 0$$

x und y vertauscht werden dürfen, so muss diese Eigenschaft jetzt

*) Die Coefficienten $\alpha\, \beta\, \gamma \ldots$ in $\frac{\xi_0 \Xi + \eta_0 T}{k_0}$ erfüllen die Bedingungsgleichungen

$$\alpha_1 - \beta = \alpha (x_0 - y_0), \qquad \alpha_2 - \gamma = (\alpha_1 + \beta)(x_0 - y_0)$$

$$\begin{aligned}\beta_1 - \gamma_1 = \xi_0 - \eta_0 & = \tfrac{1}{2}(x_0 - y_0)\{2\beta_1 - \gamma - \beta (x_0 - y_0)\} \\ & = \tfrac{1}{2}(x_0 - y_0)\{2\beta_1 - \alpha_2 + \alpha_1 (x_0 - y_0)\}\end{aligned}$$

auch der äquivalenten Gleichung $\xi_0 \Xi + \eta_0 \Upsilon = 0$, mithin den Functionen Ξ und Υ zukommen. In der That lassen sich dieselben auf die Form bringen:

$$\begin{aligned}
\Xi = {} & x^2y^2(y_0 - x_0)[i_0y_0^2(3x_0 + y_0) + 6i_1y_0(x_0 + y_0) + 3i_2(x_0 + 3y_0) + 4i_3] \\
& + 2xy(x + y)(y_0 - x_0)[-i_0x_0y_0^3 + 3i_2y_0(x_0 + y_0) + 2i_3(x_0 + 3y_0) + 3i_4] \\
& + (x^2 + y^2)[i_0x_0^2y_0^4 + 6i_1x_0^2y_0^3 + 3i_2x_0y_0^2(3x_0 + 2y_0) + \\
& \qquad + 4i_3y_0(x_0^2 + 3x_0y_0 + y_0^2) + 3i_4y_0(2x_0 + 3y_0) + 6i_5y_0 + i_6] \\
& - 2xy[i_0x_0^2y_0^4 + 6i_1x_0y_0^4 + 3i_2y_0^3(4x_0 + y_0) + 4i_3y_0(x_0^2 + 3x_0y_0 + y_0^2) + \\
& \qquad + 3i_4x_0(x_0 + 4y_0) + 6i_5x_0 + i_6] \\
& - 2(x + y)(y_0 - x_0)[3i_2x_0y_0^3 + 2i_3y_0^2(3x_0 + y_0) + 3i_4y_0(x_0 + y_0) - i_6] \\
& - (y_0 - x_0)[4i_3x_0y_0^3 + 3i_4y_0^2(3x_0 + y_0) + 6i_5y_0(x_0 + y_0) + i_6(x_0 + 3y_0)]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Upsilon = {} & x^2y^2(y_0 - x_0)[i_0x_0^2(x_0 + 3y_0) + 6i_1x_0(x_0 + y_0) + 3i_2(3x_0 + y_0) + 4i_3] \\
& + 2xy(x + y)(y_0 - x_0)[-i_0x_0^3y_0 + 3i_2x_0(x_0 + y_0) + 2i_3(3x_0 + y_0) + 3i_4] \\
& - (x^2 + y^2)[i_0x_0^4y_0^2 + 6i_1x_0^3y_0^2 + 3i_2x_0^2y_0(2x_0 + 3y_0) + \\
& \qquad + 4i_3x_0(x_0^2 + 3x_0y_0 + y_0^2) + 3i_4x_0(3x_0 + 2y_0) + 6i_5x_0 + i_6] \\
& + 2xy[i_0x_0^4y_0^2 + 6i_1x_0^4y_0 + 3i_2x_0^3(x_0 + 4y_0) + 4i_3x_0(x_0^2 + 3x_0y_0 + y_0^2) + \\
& \qquad + 3i_4y_0(4x_0 + y_0) + 6i_5y_0 + i_6] \\
& - 2(x + y)(y_0 - x_0)[3i_2x_0^3y_0 + 2i_3x_0^2(x_0 + 3y_0) + 3i_4x_0(x_0 + y_0) - i_6] \\
& - (y_0 - x_0)[4i_3x_0^3y_0 + 3i_4x_0^2(x_0 + 3y_0) + 6i_5x_0(x_0 + y_0) + i_6(3x_0 + y_0)]
\end{aligned}$$

Hierbei sind $a_1 = b$, $a_2 = c$, $b_2 = c_1$ geworden und

$$\begin{aligned}
f(xy) & = ax^2y^2 + 2bxy(x + y) + c(x^2 + y^2) + 4b_1xy + 2c_1(x + y) + c_2 \\
& = ax^2y^2 + 2bxy(x + y) + c(x - y)^2 + 2(2b_1 + c)xy + 2c_1(x + y) + c_2
\end{aligned}$$

wo man schreiben kann

$$\begin{aligned}
k_0c = {} & \xi_0[h_0 + (x_0 - y_0)y_0(i_0y_0^3(x_0 + y_0) + 6i_1(x_0 + y_0)y_0^2 + \\
& \qquad + 3i_2y_0(3x_0 + 5y_0) + 4i_3(x_0 + 4y_0) + 6i_4)] \\
& - \eta_0[\mathfrak{h}_0 - (x_0 - y_0)x_0(i_0x_0^3(x_0 + y_0) + 6i_1x_0^2(x_0 + y_0) + \\
& \qquad + 3i_2x_0(5x_0 + 3y_0) + 4i_3(4x_0 + y_0) + 6i_4)]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
k_0(2b_1 + c) = {} & 3(x_0 - y_0)[\xi_0(2i_1x_0y_0^3 + i_2y_0^2(3x_0 + y_0) - i_4(x_0 + 3y_0) - 2i_5) + \\
& + \eta_0(2i_1x_0^3y_0 + i_2x_0^2(x_0 + 3y_0) - i_4(3x_0 + y_0) - 2i_5)]
\end{aligned}$$

während die Werthe der übrigen Coefficienten $a\,b\,c\,..$ ohne Mühe aus den vorstehenden Ausdrücken für Ξ und Υ abgelesen werden können.

Man hat nunmehr die Ausdrücke zu bilden

$$x = \frac{\eta - by^2 - 2b_1 y - c_1}{ay^2 + 2by + c} = -\frac{cy^2 + 2c_1 y + c_2}{\eta + by^2 + 2b_1 y + c_1}$$

$$y = \frac{\xi - bx^2 - 2b_1 x - c_1}{ax^2 + 2bx + c} = -\frac{cx^2 + 2c_1 x + c_2}{\xi + bx^2 + 2b_1 x + c_1}$$

$$\begin{aligned}\xi &= -\eta\frac{dx}{dy} = \frac{2}{(ay^2 + 2by + c)^2}[(a\mathfrak{M} - b\mathfrak{L})y^2 + (a\mathfrak{N} - c\mathfrak{L})y + (b\mathfrak{N} - c\mathfrak{M}) + \\ &\qquad + \eta((b^2 - ab_1)y^2 + (bc - ac_1)y + b_1 c - bc_1)] \\ &= \frac{2}{(\eta + by^2 + 2b_1 y + c_1)^2}[(c\mathfrak{M} - c_1\mathfrak{L})y^2 + (c\mathfrak{N} - c_2\mathfrak{L})y + (c_1\mathfrak{N} - c_2\mathfrak{M}) + \\ &\qquad + \eta((b_1 c - bc_1)y^2 + (cc_1 - bc_2)y + c_1^2 - b_1 c_2)]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\eta &= -\xi\frac{dy}{dx} = \frac{2}{(ax^2 + 2bx + c)^2}[(aM - bL)x^2 + (aN - cL)x + (bN - cM) + \\ &\qquad + \xi((b^2 - ab_1)x^2 + (bc - ac_1)x + b_1 c - bc_1)] \\ &= \frac{2}{(\xi + bx^2 + 2b_1 + c_1)^2}[(cM - c_1 L)x^2 + (cN - c_2 L)x + (c_1 N - c_2 M) + \\ &\qquad + \xi((b_1 c - bc_1)x^2 + (cc_1 - bc_2)x + c_1^2 - b_1 c_2)]\end{aligned}$$

um die Transformationsformeln für das jetzige Beispiel vollständig zu haben. Indessen wollen wir uns damit begnügen, ein paar specielle Fälle näher ins Auge zu fassen, in denen y_0 verschwindet, oder unendlich wird, oder eine Wurzel der Gleichung $\eta_0 = 0$ darstellt.

14.

Für $y_0 = 0$ wird

$$\begin{aligned}\eta_0 &= \sqrt{E} \\ k_0 &= -2x_0(i_3 x_0^3 + 3i_4 x_0^2 + 3i_5 x_0 + i_6) \\ k_0 a &= -\xi_0 x_0(3i_2 x_0 + 4i_3) - \sqrt{E}x_0(i_0 x_0^3 + 6i_1 x_0^2 + 9i_2 x_0 + 4i_3) \\ k_0 b &= -\xi_0 x_0(2i_3 x_0 + 3i_4) - 3\sqrt{E}x_0(i_2 x_0^2 + 2i_3 x_0 + i_4) \\ k_0 c &= i_6\xi_0 - \sqrt{E}(4i_3 x_0^3 + 9i_4 x_0^2 + 6i_5 x_0 + i_6) \\ 2k_0 b_1 &= -\xi_0(3i_4 x_0^2 + 6i_5 x_0 + i_6) + \sqrt{E}(3i_2 x_0^4 + 4i_3 x_0^3 + i_6) \\ k_0 c_1 &= -i_6\xi_0 x_0 + \sqrt{E}x_0(2i_3 x_0^3 + 3i_4 x_0^2 - i_6) \\ k_0 c_2 &= i_6\xi_0 x_0^2 + 3\sqrt{E}x_0^2(i_4 x_0^2 + 2i_5 x_0 + i_6)\end{aligned}$$

Für $y_0 = \infty$ dagegen hat man zu setzen, da sich die höchste Potenz von y_0 als Factor überall weghebt:

$$\begin{aligned}
\eta_0 &= \sqrt{A} \\
k_0 &= 2(i_0 x_0^3 + 3 i_1 x_0^2 + 3 i_2 x_0 + i_3) \\
k_0 a &= i_0 \xi_0 + 3\sqrt{A}(i_0 x_0^2 + 2 i_1 x_0 + i_2) \\
k_0 b &= - i_0 \xi_0 x_0 + \sqrt{A}(- i_0 x_0^3 + 3 i_2 x_0 + 2 i_3) \\
k_0 c &= i_0 \xi_0 x_0^2 - \sqrt{A} x_0 (i_0 x_0^3 + 6 i_1 x_0^2 + 9 i_2 x_0 + 4 i_3) \\
2 k_0 b_1 &= - \xi_0 (i_0 x_0^2 + 6 i_1 x_0 + 3 i_2) + \sqrt{A}(i_0 x_0^4 + 4 i_3 x_0 + 3 i_4) \\
k_0 c_1 &= - \xi_0 (3 i_2 x_0 + 2 i_3) - 3\sqrt{A} x_0 (i_2 x_0^2 + 2 i_3 x_0 + i_4) \\
k_0 c_2 &= - \xi_0 (4 i_3 x_0 + 3 i_4) - \sqrt{A}(4 i_3 x_0^3 + 9 i_4 x_0^2 + 6 i_5 x_0 + i_6)
\end{aligned}$$

Von besonderem Interesse ist der Fall $\eta_0 = 0$. Zufolge der Formeln des Art. 11 hat man alsdann

$$\begin{aligned}
-\frac{\Xi}{w_0} = \frac{1}{3} G (x - x_0)^2 (y - y_0)^2 - 2 W_1 (y y_0)(x - x_0)^2 - 2 W_1 (x x_0)(y - y_0)^2 \\
+ W(x x_0) W(y y_0) = 0
\end{aligned}$$

In diesem Ausdrucke darf man jetzt nicht allein x oder y_0 mit x_0 oder y beliebig vertauschen, sondern auch x mit y_0, sowie x_0 mit y. Dadurch erhält man

$$\begin{aligned}
-\frac{\Xi}{w_0} = \frac{1}{3} G (x_0 - y_0)^2 (x - y)^2 - 2 W_1 (x_0 y_0)(x - y)^2 - 2 W_1 (x y)(x_0 - y_0)^2 \\
+ W(x_0 y_0) W(x y) = 0
\end{aligned}$$

so dass neben den Formeln des Art. 11 die folgenden gelten

$$\begin{aligned}
a w_0 \xi_0 &= A W(x_0 y_0) - 2 A_1 (x_0 - y_0)^2 \\
b w_0 \xi_0 &= B W(x_0 y_0) - 2 B_1 (x_0 - y_0)^2 \\
c w_0 \xi_0 &= C W(x_0 y_0) - 2 C_1 (x_0 - y_0)^2 - 2 W_1 (x_0 y_0) + \frac{1}{3} G (x_0 - y_0)^2 \\
b_1 w_0 \xi_0 &= C W(x_0 y_0) - 2 C_1 (x_0 - y_0)^2 + W_1 (x_0 y_0) - \frac{1}{6} G (x_0 - y_0)^2 \\
c_1 w_0 \xi_0 &= D W(x_0 y_0) - 2 D_1 (x_0 - y_0)^2 \\
c_2 w_0 \xi_0 &= E W(x_0 y_0) - 2 E_1 (x_0 - y_0)^2 \\
w_0 &= A y_0^3 + 3 B y_0^2 + 3 C y_0 + D
\end{aligned}$$

Weiter ergeben sich die Werthe

$$\begin{aligned}
p w_0 \xi_0 &= L W(x_0 y_0) - 2 W_1 (x_0 y_0) - \left(2 L_1 - \frac{1}{3} G\right)(x_0 - y_0)^2 \\
p_1 w_0 \xi_0 &= M W(x_0 y_0) + 2 x W_1 (x_0 y_0) - \left(2 M_1 + \frac{1}{3} G x\right)(x_0 - y_0)^2 \\
p_2 w_0 \xi_0 &= N W(x_0 y_0) - 2 x^2 W_1 (x_0 y_0) - \left(2 N_1 - \frac{1}{3} G x^2\right)(x_0 - y_0)^2
\end{aligned}$$

$$q w_0 \xi_0 = \mathfrak{L} W(x_0 y_0) - 2 W_1(x_0 y_0) - \left(2\mathfrak{L}_1 - \tfrac{1}{3} G\right)(x_0 - y_0)^2$$
$$q_1 w_0 \xi_0 = \mathfrak{M} W(x_0 y_0) + 2y W_1(x_0 y_0) - \left(2\mathfrak{M}_1 + \tfrac{1}{3} G y\right)(x_0 - y_0)^2$$
$$q_2 w_0 \xi_0 = \mathfrak{N} W(x_0 y_0) - 2y^2 W_1(x_0 y_0) - \left(2\mathfrak{N}_1 - \tfrac{1}{3} G y^2\right)(x_0 - y_0)^2$$

welche zufolge der Entwickelungen des Art. 11 durch Vertauschung von x und x_0 resp. von y und y_0 ungeändert bleiben müssen und desshalb auch auf die Form gebracht werden können

$$p w_0 \xi_0 = L_0 W(x y_0) - 2 W_1(x y_0) - \left(2L_1^0 - \tfrac{1}{3} G\right)(x - y_0)^2$$
$$p_1 w_0 \xi_0 = M_0 W(x y_0) + 2x_0 W_1(x y_0) - \left(2M_1^0 + \tfrac{1}{3} G x_0\right)(x - y_0)^2$$
$$p_2 w_0 \xi_0 = N_0 W(x y_0) - 2x_0^2 W_1(x y_0) - \left(2N_1^0 - \tfrac{1}{3} G x_0^2\right)(x - y_0)^2$$
$$q w_0 \xi_0 = \mathfrak{L}_0 W(x_0 y) - 2 W_1(x_0 y) - \left(2\mathfrak{L}_1^0 - \tfrac{1}{3} G\right)(x_0 - y)^2$$
$$q_1 w_0 \xi_0 = \mathfrak{M}_0 W(x_0 y) + 2y_0 W_1(x_0 y) - \left(2\mathfrak{M}_1^0 + \tfrac{1}{3} G y_0\right)(x_0 - y)^2$$
$$q_2 w_0 \xi_0 = \mathfrak{N}_0 W(x_0 y) - 2y_0^2 W_1(x_0 y) - \left(2\mathfrak{N}_1^0 - \tfrac{1}{3} G y_0^2\right)(x_0 - y)^2$$

Hieraus entspringen eine Menge verschiedener Formen für die Substitution

$$x = \frac{\eta - q_1}{q}, \qquad y = \frac{\xi - p_1}{p} \qquad \text{u. s. w.}$$

welche einzeln anzuführen nicht nöthig sein wird. Die letzten der vorstehenden Ausdrücke liefern

$$x = \frac{w_0 \xi_0 \eta - \mathfrak{M}_0 W(x_0 y) - 2y_0 W_1(x_0 y) + (2\mathfrak{M}_1^0 + \frac{1}{3} G y_0)(x_0 - y)^2}{\mathfrak{L}_0 W(x_0 y) - 2 W_1(x_0 y) - (2\mathfrak{L}_1^0 - \frac{1}{3} G)(x_0 - y)^2}$$
$$= \frac{-\mathfrak{N}_0 W(x_0 y) + 2y_0^2 W(x_0 y) + (2\mathfrak{N}_1^0 - \frac{1}{3} G y_0^2)(x_0 - y)^2}{w_0 \xi_0 \eta + \mathfrak{M}_0 W(x_0 y) + 2y_0 W_1(x_0 y) - (2\mathfrak{M}_1^0 + \frac{1}{3} G y_0)(x_0 - y)^2}$$

mithin wegen

$$\mathfrak{L}_0 y_0 + \mathfrak{M}_0 = w_0, \qquad \mathfrak{L}_1^0 y_0 + \mathfrak{M}_1^0 = \tfrac{1}{2} \mathfrak{L}_0 w_0$$
$$\mathfrak{M}_0 y_0 + \mathfrak{N}_0 = - w_0 y_0; \qquad \mathfrak{M}_1^0 y_0 + \mathfrak{N}_1^0 = \tfrac{1}{2} w_0 (w_0 + \mathfrak{M}_0)$$

$$x - y_0 = w_0 \frac{W(x_0 y) - \mathfrak{L}_0 (x_0 - y)^2 - \xi_0 \eta}{(2\mathfrak{L}_1^0 - \frac{1}{3} G)(x_0 - y)^2 + 2 W_1(x_0 y) - \mathfrak{L}_0 W(x_0 y)}$$
$$= w_0 \frac{y_0 W(x_0 y) + (w_0 + \mathfrak{M}_0)(x_0 - y)^2 - y_0 \xi_0 \eta}{\mathfrak{M}_0 W(x_0 y) + 2y_0 W_1(x_0 y) - (2\mathfrak{M}_1^0 + \frac{1}{3} G y_0)(x_0 - y)^2 + w_0 \xi_0 \eta}$$
$$= \frac{2 w_0 (x_0 - y)^2}{W(x_0 y) - \mathfrak{L}_0 (x_0 - y)^2 + \xi_0 \eta}$$

Vertauscht man hier x und y, so gehen die Gleichungen der umgekehrten Substitution

$$y - y_0 = w_0 \frac{W(x_0 x) - \mathfrak{L}_0 (x - x_0)^2 - \xi_0 \xi}{(2\mathfrak{L}_1^0 - \frac{1}{8} G)(x - x_0)^2 + 2 W_1 (x_0 x) - \mathfrak{L}_0 W(x_0 x)}$$

$$= \frac{2 w_0 (x - x_0)^2}{W(x_0 x) - \mathfrak{L}_0 (x - x_0)^2 + \xi_0 \xi}$$

hervor, welche bereits Art. 10 in der nämlichen Form gefunden worden sind.

15.

Man kann die Function $f(xy)$ im gegenwärtigen Falle auch direct ableiten. Im Artikel 4 wurde gezeigt, dass die Integralgleichung (I*)

$$\frac{\xi_0 \xi + L_0 x^2 + 2 M_0 x + N_0}{(x - x_0)^2} = \frac{\eta_0 \eta + \mathfrak{L}_0 y^2 + 2 \mathfrak{M}_0 y + \mathfrak{N}_0}{(y - y_0)^2}$$

sowohl der Gleichung $\int_{x_0}^{x} \frac{dx}{\xi} = \int_{y_0}^{y} \frac{dy}{\eta}$ wie der Gleichung $\int_{x_0}^{x} \frac{dx}{\xi} + \int_{y_0}^{y} \frac{dy}{\eta} = 0$ entspricht, weil bei der Quadrirung von (I)

$$\frac{\xi_1 \xi_2^0 + \xi_1^0 \xi_2}{x - x_0} = \pm \frac{\eta_1 \eta_2^0 + \eta_1^0 \eta_2}{y - y_0}$$

der Unterschied des Vorzeichens wegfällt. In der Formel

$$\int_{x_0}^{x} \frac{dx}{\xi} = \int_{y_0}^{y} \frac{dy}{\eta} = \int_{y_0}^{y} \frac{dx}{\xi}$$

aber dürfen offenbar x und y_0 vertauscht werden, so dass diese Gleichung auch durch

$$\frac{\xi_1 \eta_2 + \xi_2 \eta_1}{x - y} = \frac{\xi_1^0 \eta_2^0 + \xi_2^0 \eta_1^0}{x_0 - y_0}$$

oder

$$\frac{L y^2 + 2 M y + N + \xi \eta}{(x - y)^2} = \frac{L_0 y_0^2 + 2 M_0 y_0 + N_0 + \xi_0 \eta_0}{(x_0 - y_0)^2}$$

ersetzt werden kann. Diese Relationen gelten jedoch **nicht** für $\int_{x_0}^{x} + \int_{y_0}^{y} = 0$, vielmehr erhält man in diesem Falle durch Umkehr des Vorzeichens von η

$$\frac{L y^2 + 2 M y + N - \xi \eta}{(x - y)^2} = \frac{L_0 y_0^2 + 2 M_0 y_0 + N_0 - \xi_0 \eta_0}{(x_0 - y_0)^2}$$

und folglich

$$\frac{\xi_1\eta_2 - \xi_2\eta_1}{x-y} = \frac{\xi_1^0\eta_2^0 - \xi_2^0\eta_1^0}{x_0 - y_0}$$

als äquivalente Integralgleichungen*).

Schreibt man

$$\varepsilon = \frac{L_0 y_0^2 + 2M_0 y_0 + N_0 - \xi_0\eta_0}{2(x_0-y_0)^2}$$

so wird

$$\xi\eta = Ly^2 + 2My + N - 2\varepsilon(x-y)^2$$

folglich

$$\varepsilon\{Ly^2 + 2My + N - \varepsilon(x-y)^2\} = \frac{(Ly^2+2My+N)^2 - \xi^2\eta^2}{4(x-y)^2}$$

$$= A_1 x^2 y^2 + 2B_1 xy(x+y) + \frac{1}{4}(C^2 - AE)(x-y)^2 + 6C_1 xy + 2D_1(x+y) + E_1$$

Hieraus bestimmen sich die Verhältnisse der Coefficienten $a\ b\ c\,..$ mittelst der Gleichungen

$$a\varepsilon_1 = A_1 - A\varepsilon\ , \qquad b\varepsilon_1 = a_1\varepsilon_1 = B_1 - B\varepsilon$$

$$c\varepsilon_1 = a_2\varepsilon_1 = \frac{1}{4}(C^2 - AE) - C\varepsilon + \varepsilon^2$$

$$b_1\varepsilon_1 = \frac{3}{2}C_1 - \frac{1}{8}(C^2 - AE) - C\varepsilon - \frac{1}{2}\varepsilon^2$$

$$e\varepsilon_1 = E_1 - E\varepsilon\ , \qquad c_1\varepsilon_1 = b_2\varepsilon_1 = D_1 - D\varepsilon$$

und die Substitution $x = \frac{\eta - q_1}{q}$ geht über in

$$x = \frac{\varepsilon_1\eta - (B_1 - B\varepsilon)y^2 - \left[3C_1 - \frac{1}{4}(C^2 - AE) - 2C\varepsilon - \varepsilon^2\right]y - (D_1 - D\varepsilon)}{(A_1 - A\varepsilon)y^2 + 2(B_1 - B\varepsilon)y + \frac{1}{4}(C^2 - AE) - C\varepsilon + \varepsilon^2}$$

---

*) Durch Vertauschung von y und y_0 gehen auch die ferneren Gleichungen

$$\frac{\xi_1\eta_2^0 \pm \xi_2\eta_1^0}{x - y_0} = \frac{\xi_1^0\eta_2 \pm \xi_2^0\eta_1}{x_0 - y}$$

für $\int_{x_0}^{x} \pm \int_{y_0}^{y} = 0$ hervor. EULER und LAGRANGE haben bekanntlich das vollständige Integral der Differentialgleichung $\frac{dx}{\xi} + \frac{dy}{\eta} = 0$ auf die Form gebracht

$$\left(\frac{\xi - \eta}{x - y}\right)^2 = A(x+y)^2 + 4B(x+y) + \text{const.}$$

wo die Integrationsconstante $= (2b_1 - c)^2 - ac_1$, wenn

$$f(xy) = ax^2y^2 + 2bxy(x+y) + c(x^2+y^2) + 4b_1xy + 2c_1(x+y) + c_2 = 0$$

Zur Berechnung des Factors ε_1 kann man $x = x_0$, $y = y_0$ setzen, wodurch

$$\varepsilon_1 \eta_0 = \left[(A_1 - A\varepsilon) x_0 + B_1 - B\varepsilon\right] y_0^2 + \left[2(B_1 - B\varepsilon) x_0 + 3C_1 - \frac{1}{4}(C^2 - AE) - 2E\varepsilon - \varepsilon^2\right] y_0$$
$$+ \left[\frac{1}{4}(C^2 - AE) - C\varepsilon + \varepsilon^2\right] x_0 + D_1 - D\varepsilon$$

Ferner führt die Gleichung $A = b^2 - ac$ auf die Formel

$$4\varepsilon^3 - G\varepsilon - H = 4\varepsilon_1^2$$

Vergleicht man hiermit die Formel des Art. 7

$$4X^3 - GX - H = X_1^2$$

und beachtet, dass X in ε übergeht, wenn man y_0 statt x und $-\eta_0$ statt ξ schreibt, so erhält man

$$\varepsilon_1 = \pm \frac{\xi_0 \eta_0}{2(x_0 - y_0)^2} \left\{ \frac{\xi_0 - \eta_0}{x_0 - y_0} - \frac{1}{2}(\xi_0' + \eta_0') \right\} = \pm \left\{ \frac{f_0 \eta_0 - \mathfrak{f}_0 \xi_0}{2(x_0 - y_0)^3} - \frac{f_0' \eta_0 - \mathfrak{f}_0' \xi_0}{8(x_0 - y_0)^2} \right\}$$

wo das obere Vorzeichen zu nehmen ist.

16.

Die Gleichungen

$$\frac{\xi_1 \xi_2^0 + \xi_1^0 \xi_2}{x - x_0} = \frac{\eta_1 \eta_2^0 + \eta_1^0 \eta_2}{y - y_0}, \qquad \frac{\xi_1 \eta_2 + \xi_2 \eta_1}{x - y} = \frac{\xi_1^0 \eta_2^0 + \xi_2^0 \eta_1^0}{x_0 - y_0}$$

$$\frac{\xi_1 \eta_2^0 - \xi_2 \eta_1^0}{x - y_0} = \frac{\eta_1 \xi_2^0 - \eta_2 \xi_1^0}{y - x_0}$$

*) sind als äquivalente Integralgleichungen für

$$\int_{x_0}^{x} \frac{dx}{\xi} = \int_{y_0}^{y} \frac{dx}{\xi} \qquad \text{oder} \qquad \int_{x}^{y} \frac{dx}{\xi} = \int_{x_0}^{y_0} \frac{dx}{\xi}$$

gefunden worden. Für die Normalform mit dem Modul $\varkappa$

$$\xi\xi = (1 - x^2)(1 - \varkappa^2 x^2)$$

erhält man

$$\frac{\sqrt{1 - x^2 \cdot 1 - \varkappa^2 x_0^2} + \sqrt{1 - x_0^2 \cdot 1 - \varkappa^2 x^2}}{x - x_0} = \frac{\sqrt{1 - y^2 \cdot 1 - \varkappa^2 y_0^2} + \sqrt{1 - y_0^2 \cdot 1 - \varkappa^2 y^2}}{y - y_0}$$

---

*) Die obigen Formeln sind einer leichten Transformation fähig, sofern

$$\frac{\xi_1 \xi_2^0 + \xi_1^0 \xi_2}{x - x_0} = \frac{2(lm_1 - l_1 m) x x_0 + (ln_1 - l_1 n)(x + x_0) + 2(mn_1 - m_1 n)}{\xi_1 \xi_2^0 - \xi_2 \xi_1^0}$$

u. s. w. Führt man daher

$$x = \sin\varphi\ , \qquad y = \sin\psi$$
$$\sqrt{1 - \varkappa^2\sin^2\varphi} = \Delta(\varphi,\varkappa) = \Delta\varphi\ , \qquad \varkappa\varkappa + \varkappa'\varkappa' = 1$$

ein, so entspringen die Transformationsformeln

$$\frac{\cos\varphi\Delta\varphi_0 + \cos\varphi_0\Delta\varphi}{\sin\varphi - \sin\varphi_0} = \frac{\cos\psi\Delta\psi_0 + \cos\psi_0\Delta\psi}{\sin\psi - \sin\psi_0}$$
$$\frac{\cos\varphi\Delta\psi + \cos\psi\Delta\varphi}{\sin\varphi - \sin\psi} = \frac{\cos\varphi_0\Delta\psi_0 + \cos\psi_0\Delta\varphi_0}{\sin\varphi_0 - \sin\psi_0}$$
$$\frac{\cos\varphi\Delta\psi_0 - \cos\psi_0\Delta\varphi}{\sin\varphi - \sin\psi_0} = \frac{\cos\psi\Delta\varphi_0 - \cos\varphi_0\Delta\psi}{\sin\psi - \sin\varphi_0}$$

oder mit Benutzung der Identität

$$(\cos\varphi\Delta\varphi_0 + \cos\varphi_0\Delta\varphi)(\cos\varphi\Delta\varphi_0 - \cos\varphi_0\Delta\varphi) = \varkappa'\varkappa'(\sin^2\varphi_0 - \sin^2\varphi)$$

$$\frac{\cos\varphi\Delta\varphi_0 - \cos\varphi_0\Delta\varphi}{\sin\varphi + \sin\varphi_0} = \frac{\cos\psi\Delta\psi_0 - \cos\psi_0\Delta\psi}{\sin\psi + \sin\psi_0}$$
$$\frac{\cos\varphi\Delta\psi - \cos\psi\Delta\varphi}{\sin\varphi + \sin\psi} = \frac{\cos\varphi_0\Delta\psi_0 - \cos\psi_0\Delta\varphi_0}{\sin\varphi_0 + \sin\psi_0}$$
$$\frac{\cos\varphi\Delta\psi_0 + \cos\psi_0\Delta\varphi}{\sin\varphi + \sin\psi_0} = \frac{\cos\psi\Delta\varphi_0 + \cos\varphi_0\Delta\psi}{\sin\psi + \sin\varphi_0}$$

durch welche die Integrale

$$\int_{\varphi_0}^{\varphi}\frac{d\varphi}{\Delta\varphi} = \int_{\psi_0}^{\psi}\frac{d\varphi}{\Delta\varphi} \qquad \text{oder} \qquad \int_{\varphi_0}^{\psi_0}\frac{d\varphi}{\Delta\varphi} = \int_{\varphi}^{\psi}\frac{d\varphi}{\Delta\varphi}$$

in einander übergehen.

Man kann die gefundenen Ausdrücke auch als Additionsformeln für die Integrale

$$\int_{\varphi_0}^{\varphi} + \int_{\varphi_0}^{\psi_0} = \int_{\varphi}^{\psi} + \int_{\psi_0}^{\psi} = \int_{\varphi_0}^{\psi}\frac{d\varphi}{\Delta\varphi}$$

ansehen und mit Wegschaffung der Nenner auf die Form bringen

$$\cos\varphi\sin\psi\Delta\varphi_0 - \cos\varphi_0\sin\psi_0\Delta\varphi = \sin\varphi\cos\psi\Delta\psi_0 - \sin\varphi_0\cos\psi_0\Delta\psi$$
$$\cos\varphi\sin\psi_0\Delta\varphi_0 - \cos\varphi_0\sin\psi\Delta\varphi = \sin\varphi_0\cos\psi\Delta\psi_0 - \sin\varphi\cos\psi_0\Delta\psi$$
$$\cos\psi_0\sin\psi\Delta\varphi_0 - \cos\psi\sin\psi_0\Delta\varphi = \sin\varphi\cos\varphi_0\Delta\psi_0 - \cos\varphi\sin\varphi_0\Delta\psi$$
$$\sin\varphi\cos\psi_0\Delta\varphi_0 - \sin\varphi_0\cos\psi\Delta\varphi = \cos\varphi_0\sin\psi\Delta\psi_0 - \cos\varphi\sin\psi_0\Delta\psi$$
$$\sin\varphi\cos\psi\Delta\varphi_0 - \sin\varphi_0\cos\psi_0\Delta\varphi = \cos\varphi\sin\psi\Delta\psi_0 - \cos\varphi_0\sin\psi_0\Delta\psi$$
$$\cos\psi\sin\psi_0\Delta\varphi_0 - \sin\psi\cos\psi_0\Delta\varphi = \cos\varphi\sin\varphi_0\Delta\psi_0 - \sin\varphi\cos\varphi_0\Delta\psi$$

Aus dem Additionstheorem geht für $\varphi = \psi_0$ die Verdoppelung des elliptischen Integrals hervor:

$$2\int_{\varphi_0}^{\varphi} \frac{d\varphi}{\Delta\varphi} = 2\int_{\varphi}^{\psi} \frac{d\varphi}{\Delta\varphi} = \int_{\varphi_0}^{\psi} \frac{d\varphi}{\Delta\varphi}$$

nebst

$$\begin{aligned}
\operatorname{tg}\varphi\,(\cos\varphi_0 + \cos\psi)\,\Delta\varphi &= \sin\psi\,\Delta\varphi_0 + \sin\varphi_0\,\Delta\psi\\
\sin(\varphi_0 + \psi)\,\Delta\varphi &= \sin\varphi\cos\varphi\,(\Delta\varphi_0 + \Delta\psi)\\
(\sin\varphi_0 + \sin\psi)\,\Delta\varphi &= \operatorname{tg}\varphi\,(\cos\psi\,\Delta\varphi_0 + \cos\varphi_0\,\Delta\psi)
\end{aligned}$$

17.

Die gewöhnliche Form dieser Sätze ergibt sich für $\varphi_0 = 0$, $\psi_0 = \chi$:

$$\int_0^{\varphi} + \int_0^{\psi} = \int_{\varphi}^{\psi} + \int_{\chi}^{\psi} = \int_0^{\psi} \frac{d\varphi}{\Delta\varphi}$$

$$\begin{aligned}
\cos\varphi\sin\psi &= \sin\chi\,\Delta\varphi + \sin\varphi\cos\psi\,\Delta\chi\\
\cos\varphi\sin\chi &= \sin\psi\,\Delta\varphi - \sin\varphi\cos\chi\,\Delta\psi\\
\cos\chi\sin\psi &= \sin\chi\cos\psi\,\Delta\varphi + \sin\varphi\,\Delta\chi\\
\sin\varphi\cos\chi &= \sin\psi\,\Delta\chi - \cos\varphi\sin\chi\,\Delta\psi\\
\sin\varphi\cos\psi &= \cos\varphi\sin\psi\,\Delta\chi - \sin\chi\,\Delta\psi\\
\sin\chi\cos\psi &= \cos\chi\sin\psi\,\Delta\varphi - \sin\varphi\,\Delta\psi
\end{aligned}$$

Durch Auflösung dieser Gleichungen erhält man sogleich

$$\begin{aligned}
\sin\psi &= \frac{\sin\varphi\cos\chi\,\Delta\chi + \cos\varphi\sin\chi\,\Delta\varphi}{1 - \varkappa^2\sin^2\varphi\sin^2\chi} &&= \frac{\sin\varphi\cos\varphi\,\Delta\chi + \sin\chi\cos\chi\,\Delta\varphi}{\cos\varphi\cos\chi + \sin\varphi\sin\chi\,\Delta\varphi\,\Delta\chi}\\
&= \frac{\sin^2\chi - \sin^2\varphi}{\cos\varphi\sin\chi\,\Delta\varphi - \sin\varphi\cos\chi\,\Delta\chi} &&= \frac{\sin\varphi\cos\chi\,\Delta\varphi + \cos\varphi\sin\chi\,\Delta\chi}{\Delta\varphi\,\Delta\chi + \varkappa^2\sin\varphi\cos\varphi\sin\chi\cos\chi}\\
\cos\psi &= \frac{\cos\varphi\cos\chi - \sin\varphi\sin\chi\,\Delta\varphi\,\Delta\chi}{1 - \varkappa^2\sin^2\varphi\sin^2\chi} &&= \frac{\cos^2\varphi\cos^2\chi - \varkappa'\varkappa'\sin^2\varphi\sin^2\chi}{\cos\varphi\cos\chi + \sin\varphi\sin\chi\,\Delta\varphi\,\Delta\chi}\\
&= \frac{\sin\chi\cos\chi\,\Delta\varphi - \sin\varphi\cos\varphi\,\Delta\chi}{\cos\varphi\sin\chi\,\Delta\varphi - \sin\varphi\cos\chi\,\Delta\chi} &&= \frac{\cos\varphi\cos\chi\,\Delta\varphi\,\Delta\chi - \varkappa'\varkappa'\sin\varphi\sin\chi}{\Delta\varphi\,\Delta\chi + \varkappa^2\sin\varphi\cos\varphi\sin\chi\cos\chi}\\
\Delta\psi &= \frac{\Delta\varphi\,\Delta\chi - \varkappa^2\sin\varphi\cos\varphi\sin\chi\cos\chi}{1 - \varkappa^2\sin^2\varphi\sin^2\chi} &&= \frac{\cos\varphi\cos\chi\,\Delta\varphi\,\Delta\chi + \varkappa'\varkappa'\sin\varphi\sin\chi}{\cos\varphi\cos\chi + \sin\varphi\sin\chi\,\Delta\varphi\,\Delta\chi}\\
&= \frac{\cos\varphi\sin\chi\,\Delta\chi - \sin\varphi\cos\chi\,\Delta\varphi}{\cos\varphi\sin\chi\,\Delta\varphi - \sin\varphi\cos\chi\,\Delta\chi} &&= \frac{\varkappa'^2 + \varkappa^2\cos^2\varphi\cos^2\chi}{\Delta\varphi\,\Delta\chi + \varkappa^2\sin\varphi\cos\varphi\sin\chi\cos\chi}
\end{aligned}$$

$$\operatorname{tg}\psi = \frac{\sin\varphi\cos\chi\varDelta\chi + \cos\varphi\sin\chi\varDelta\varphi}{\cos\varphi\cos\chi - \sin\varphi\sin\chi\varDelta\varphi\varDelta\chi} = \frac{\sin^2\chi - \sin^2\varphi}{\sin\chi\cos\chi\varDelta\varphi - \sin\varphi\cos\varphi\varDelta\chi}$$

$$= \frac{\sin\varphi\cos\varphi\varDelta\chi + \sin\chi\cos\chi\varDelta\varphi}{\cos^2\varphi\cos^2\chi - \varkappa'\varkappa'\sin^2\varphi\sin^2\chi} = \frac{\sin\varphi\cos\chi\varDelta\varphi + \cos\varphi\sin\chi\varDelta\chi}{\cos\varphi\cos\chi\varDelta\varphi\varDelta\chi - \varkappa'\varkappa'\sin\varphi\sin\chi}$$

und es ist nicht schwer, sich von der Uebereinstimmung dieser Ausdrücke mit den seit EULER und JACOBI bekannten Additionsformeln zu überzeugen.

Die obigen Gleichungen gehen in die bekannten trigonometrischen Formeln eines sphärischen Dreiecks mit den Winkeln φ, χ, $\pi - \psi$ und den gegenüberstehenden Seiten u, v, w über, wenn

$$\varkappa^2 = \frac{1 - \cos u\cos v\cos w}{1 - \cos\varphi\cos\chi\cos\psi}$$

folglich

$$\sin u = \varkappa\sin\varphi\ , \qquad \sin v = \varkappa\sin\chi\ , \qquad \sin w = \varkappa\sin\psi$$
$$\cos u = \varDelta\varphi\ , \qquad \cos v = \varDelta\chi\ , \qquad \cos w = \varDelta\psi$$

gesetzt werden.

Wenn man ψ mit $\pi - \psi$ vertauscht, so nimmt der eben bewiesene Satz eine bemerkenswerthe Form an, sofern die Gleichung

$$\int_0^\varphi + \int_0^\chi = \int_0^{\pi-\psi}\frac{d\varphi}{\varDelta\varphi} \quad \text{durch} \quad \int_0^\varphi + \int_0^\chi + \int_0^\psi = \int_0^\pi \frac{d\varphi}{\varDelta(\varphi, \varkappa)}$$

ersetzt werden kann. Während beim ebenen Dreiecke mit den Winkeln φ, χ, ψ für $x = \sin\varphi$, $y = \sin\chi$, $z = \sin\psi$

$$\int_0^x + \int_0^y + \int_0^z \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} = \varphi + \chi + \psi = \pi$$

ist, so erhält man beim sphärischen Dreiecke mit den Winkeln φ, χ, ψ und den gegenüberstehenden Seiten u, v, w für $x = \sin\varphi$, $y = \sin\chi$, $z = \sin\psi$ die Gleichung

$$\int_0^x + \int_0^y + \int_0^z \frac{dx}{\sqrt{(1 - x^2)(1 - \varkappa^2 x^2)}} = \int_0^\varphi + \int_0^\chi + \int_0^\psi \frac{d\varphi}{\varDelta(\varphi\varkappa)} = 2K$$

wo

$$\varkappa^2 = \frac{1 - \cos u\cos v\cos w}{1 + \cos\varphi\cos\chi\cos\psi}$$

oder

$$\varkappa = \frac{\sin u}{\sin\varphi} = \frac{\sin v}{\sin\chi} = \frac{\sin w}{\sin\psi} \qquad \text{und} \qquad K = \int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{d\varphi}{\varDelta(\varphi\varkappa)}$$

gesetzt ist.

Die Benutzung des sphärischen Dreieckes zur Construction des Additionstheorems rührt bekanntlich von LAGRANGE*) her, doch hat derselbe das sphärische Polardreieck zu seiner Construction verwendet, oder was auf dasselbe hinauskommt, das Dreieck mit den Seiten φ, χ, ψ und den gegenüberliegenden Winkeln u, v, $\pi - w$, wobei die von $\varkappa$ abhängigen Gleichungen unverändert bleiben.

Man schliesst aus dem Vorstehenden, dass mittelst der angeführten Substitutionen aus jeder Formel der sphärischen Trigonometrie eine Additionsformel für elliptische Functionen abgeleitet werden kann, und umgekehrt liefert jede Gleichung zwischen sin cos und $\varDelta$ der Winkel $\varphi\ \chi\ \psi$ eine bez. zwei trigonometrische Relationen, welche sich auf das sphärische Dreieck mit den Seiten u, v, w und den Winkeln φ, χ, $\pi - \psi$, resp. mit den Seiten φ, χ, ψ und den Winkeln u, v, $\pi - w$ beziehen, während $\varkappa = \frac{\sin u}{\sin\varphi} = \frac{\sin v}{\sin\chi} = \frac{\sin w}{\sin\psi}$ ist.

JACOBI hat in seiner Abhandlung »*Sur la rotation d'un corps*«**) eine Zusammenstellung derartiger Formeln gegeben, aus welcher wir hier diejenigen folgen lassen, welche von den sechs oben gegebenen verschieden sind:

$$\varkappa'\varkappa' + \varkappa^2 \cos\varphi\cos\chi\cos\psi = \varDelta\varphi\varDelta\chi\varDelta\psi$$
$$\varkappa^2 \sin\varphi\sin\chi\cos\psi = \varDelta\varphi\varDelta\chi - \varDelta\psi$$
$$\varkappa^2 \cos\varphi\sin\chi\sin\psi = \varDelta\varphi - \varDelta\chi\varDelta\psi$$
$$\varkappa^2 \sin\varphi\cos\chi\sin\psi = \varDelta\chi - \varDelta\varphi\varDelta\psi$$
$$\varkappa'\varkappa'\sin\varphi\sin\chi = \cos\varphi\cos\chi\varDelta\psi - \cos\psi\varDelta\varphi\varDelta\chi$$
$$\varkappa'\varkappa'\sin\chi\sin\psi = \cos\varphi\varDelta\chi\varDelta\psi - \cos\chi\cos\psi\varDelta\varphi$$
$$\varkappa'\varkappa'\sin\varphi\sin\psi = \cos\chi\varDelta\varphi\varDelta\psi - \cos\varphi\cos\psi\varDelta\chi$$
$$\cos\varphi - \cos\chi\cos\psi = \sin\chi\sin\psi\varDelta\varphi$$
$$\cos\chi - \cos\varphi\cos\psi = \sin\varphi\sin\psi\varDelta\chi$$
$$\cos\varphi\cos\chi - \cos\psi = \sin\varphi\sin\chi\varDelta\psi$$

Die letzte dieser Formeln ist die von LAGRANGE abgeleitete.

*) *Théorie des fonctions*, Art. 69, 70; vergl. *Legendre*, *Traité des fonctions elliptiques*, *T.* I, *p.* 20.
**) Mathem. Werke, Bd. 2, S. 171, CRELLE's Journal, Bd. 39, S. 325.

18.

Setzt man $\psi = \frac{\pi}{2}$, $\varphi_0 = \omega$, $\psi_0 = \chi$, so folgt analog

$$\int_\omega^\varphi + \int_\omega^\chi = \int_\varphi^{\frac{1}{2}\pi} + \int_\chi^{\frac{1}{2}\pi} = \int_\omega^{\frac{1}{2}\pi} \frac{d\varphi}{\varDelta\varphi}$$

$$\begin{aligned}
\varkappa' \cos\chi \sin\omega &= \sin\chi \cos\omega \varDelta\varphi - \cos\varphi \varDelta\omega \\
\varkappa' \sin\varphi \cos\chi &= \cos\omega \varDelta\varphi - \cos\varphi \sin\chi \varDelta\omega \\
\varkappa' \cos\varphi \sin\omega &= \sin\varphi \cos\omega \varDelta\chi - \cos\chi \varDelta\omega \\
\varkappa' \cos\varphi \sin\chi &= \cos\omega \varDelta\chi - \sin\varphi \cos\chi \varDelta\omega \\
\varkappa' \sin\chi \cos\omega &= \cos\chi \sin\omega \varDelta\varphi + \cos\varphi \varDelta\chi \\
\varkappa' \sin\varphi \cos\omega &= \cos\chi \varDelta\varphi + \cos\varphi \sin\omega \varDelta\chi \\
\varkappa'(1 - \varkappa^2 \sin\varphi \sin\chi \sin\omega) &= \varDelta\varphi \varDelta\chi \varDelta\omega \\
\varkappa^2 \cos\varphi \cos\chi \sin\omega &= \varkappa' \varDelta\omega - \varDelta\varphi \varDelta\chi \\
\varkappa^2 \sin\varphi \cos\chi \cos\omega &= \varDelta\chi \varDelta\omega - \varkappa' \varDelta\varphi \\
\varkappa^2 \cos\varphi \sin\chi \cos\omega &= \varDelta\varphi \varDelta\omega - \varkappa' \varDelta\chi \\
\cos\varphi \cos\chi &= \varkappa' \sin\varphi \sin\chi \varDelta\omega - \sin\psi \varDelta\varphi \varDelta\chi \\
\cos\chi \cos\omega &= \sin\varphi \varDelta\chi \varDelta\omega - \varkappa' \sin\chi \sin\omega \varDelta\varphi \\
\cos\varphi \cos\omega &= \sin\chi \varDelta\varphi \varDelta\omega - \varkappa' \sin\varphi \sin\omega \varDelta\chi \\
\varkappa'(\sin\varphi \sin\chi - \sin\omega) &= \cos\varphi \cos\chi \varDelta\omega \\
\varkappa'(\sin\varphi - \sin\chi \sin\omega) &= \cos\chi \cos\omega \varDelta\varphi \\
\varkappa'(\sin\chi - \sin\varphi \sin\omega) &= \cos\varphi \cos\omega \varDelta\chi
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sin\omega &= \frac{\varkappa'\varkappa' \sin\varphi \sin\chi - \cos\varphi \cos\chi \varDelta\varphi \varDelta\chi}{\varkappa'\varkappa' + \varkappa^2 \cos^2\varphi \cos^2\chi} = \frac{\sin\chi \cos\chi \varDelta\varphi - \sin\varphi \cos\varphi \chi \varDelta}{\sin\varphi \cos\chi \varDelta\varphi - \cos\varphi \sin\chi \varDelta\chi} \\
&= \frac{-\cos\varphi \cos\chi + \sin\varphi \sin\chi \varDelta\varphi \varDelta\chi}{\varDelta\varphi \varDelta\chi - \varkappa^2 \sin\varphi \cos\varphi \sin\chi \cos\chi} = \frac{-\cos^2\varphi \cos^2\chi + \varkappa'\varkappa' \sin^2\varphi \sin^2\chi}{\varkappa'\varkappa' \sin\varphi \sin\chi + \cos\varphi \cos\chi \varDelta\varphi \varDelta\chi} \\
\cos\omega &= \varkappa' \frac{\sin\varphi \cos\chi \varDelta\varphi + \cos\varphi \sin\chi \varDelta\chi}{\varkappa'\varkappa' + \varkappa^2 \cos^2\varphi \cos^2\chi} = \varkappa' \frac{\sin^2\varphi - \sin^2\chi}{\sin\varphi \cos\chi \varDelta\varphi - \cos\varphi \sin\chi \varDelta\chi} \\
&= \varkappa' \frac{\cos\varphi \sin\chi \varDelta\varphi + \sin\varphi \cos\chi \varDelta\chi}{\varDelta\varphi \varDelta\chi - \varkappa^2 \sin\varphi \cos\varphi \sin\chi \cos\chi} = \varkappa' \frac{\sin\varphi \cos\varphi \varDelta\chi + \sin\chi \cos\chi \varDelta\varphi}{\varkappa'\varkappa' \sin\varphi \sin\chi + \cos\varphi \cos\chi \varDelta\varphi \varDelta\chi} \\
\varDelta\omega &= \varkappa' \frac{\varkappa^2 \sin\varphi \cos\varphi \sin\chi \cos\chi + \varDelta\varphi \varDelta\chi}{\varkappa'\varkappa' + \varkappa^2 \cos^2\varphi \cos^2\chi} = \varkappa' \frac{\sin\varphi \cos\chi \varDelta\chi - \cos\varphi \sin\chi \varDelta\varphi}{\sin\varphi \cos\chi \varDelta\varphi - \cos\varphi \sin\chi \varDelta\chi} \\
&= \varkappa' \frac{1 - \varkappa^2 \sin^2\varphi \sin^2\chi}{\varDelta\varphi \varDelta\chi - \varkappa^2 \sin\varphi \cos\varphi \sin\chi \cos\chi} = \varkappa' \frac{\cos\varphi \cos\chi + \sin\varphi \sin\chi \varDelta\varphi \varDelta\chi}{\varkappa'\varkappa' \sin\varphi \sin\chi + \cos\varphi \cos\chi \varDelta\varphi \varDelta\chi}
\end{aligned}$$

$$\varkappa' \operatorname{tg}\omega = \frac{\varkappa'\varkappa' \sin\varphi \sin\chi - \cos\varphi \cos\chi \Delta\varphi \Delta\chi}{\sin\varphi \cos\chi \Delta\varphi + \cos\varphi \sin\chi \Delta\chi} = \frac{\sin\chi \cos\chi \Delta\varphi - \sin\varphi \cos\varphi \Delta\chi}{\sin^2\varphi - \sin^2\chi}$$

$$= \frac{\sin\varphi \sin\chi \Delta\varphi \Delta\chi - \cos\varphi \cos\chi}{\cos\varphi \sin\chi \Delta\varphi + \sin\varphi \cos\chi \Delta\chi} = \frac{\varkappa'\varkappa' \sin^2\varphi \sin^2\chi - \cos^2\varphi \cos^2\chi}{\sin\varphi \cos\varphi \Delta\chi + \sin\chi \cos\chi \Delta\varphi}$$

Für $\varphi_0 = 0$, $\psi_0 = \omega$, $\varphi = \psi$ und $\psi = \frac{\pi}{2}$ erhält man

$$\int_0^\psi + \int_0^\omega = \int_\psi^{\frac{1}{2}\pi} + \int_\omega^{\frac{1}{2}\pi} = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{d\varphi}{\Delta\varphi} = K$$

oder

$$\int_0^\psi \frac{d\varphi}{\Delta\varphi} = \int_\omega^{\frac{1}{2}\pi} \frac{d\varphi}{\Delta\varphi}$$

$$\sin\omega = \frac{\cos\psi}{\Delta\psi}, \qquad \sin\psi = \frac{\cos\omega}{\Delta\omega}$$

$$\Delta\omega = \sin\psi \cos\omega + \varkappa' \cos\psi \sin\omega = \frac{\varkappa'}{\Delta\psi}$$

$$\Delta\psi = \cos\psi \sin\omega + \varkappa' \sin\psi \cos\omega = \frac{\varkappa'}{\Delta\omega}.$$

$$\cos\omega = \varkappa' \frac{\sin\psi}{\Delta\psi}, \qquad \cos\psi = \varkappa' \frac{\sin\omega}{\Delta\omega}$$

$$1 = \varkappa' \operatorname{tg}\psi \operatorname{tg}\omega, \qquad \varkappa' = \Delta\psi \Delta\omega$$

Diese Relationen gestatten die vorhergehenden Ausdrücke für $\sin\omega$ $\cos\omega$ $\Delta\omega$ direct aus denen des vorigen Artikels für $\sin\psi$ $\cos\psi$ $\Delta\psi$ abzuleiten.

Die Verdoppelungsformeln endlich liefern, für $\chi = \varphi$

$$2\int_0^\varphi = 2\int_\varphi^\psi = \int_0^\psi \frac{d\varphi}{\Delta\varphi}$$

$$\frac{\sin\psi}{1 + \cos\psi} = \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\psi = \operatorname{tg}\varphi \Delta\varphi$$

oder

$$\frac{\sin\psi}{1 + \Delta\psi} = \frac{\sin\varphi \cos\varphi}{\Delta\varphi}, \qquad \frac{\sin\psi}{\cos\psi + \Delta\psi} = \frac{\operatorname{tg}\varphi}{\Delta\varphi}$$

ferner

$$2\int_\omega^\varphi = 2\int_\varphi^{\frac{1}{2}\pi} = \int_\omega^{\frac{1}{2}\pi} \frac{d\varphi}{\Delta\varphi}$$

$$\frac{1 + \sin\omega}{\cos\omega} = \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\left(\omega + \frac{\pi}{2}\right) = \varkappa' \frac{\operatorname{tg}\varphi}{\Delta\varphi}$$

oder

$$\frac{\varkappa' \sin\omega + \Delta\omega}{\cos\omega} = \operatorname{tg}\varphi \Delta\varphi, \qquad \frac{\varkappa' + \Delta\omega}{\cos\omega} = \frac{\Delta\varphi}{\sin\varphi \cos\varphi}.$$

19.

Als zweites Beispiel (s. Art. 12) betrachten wir den Specialfall

$$\mathfrak{B} = \mathfrak{D} = 0 \quad \text{oder} \quad 2a_1 b_1 = ab_2 + a_2 b \ , \qquad 2b_1 c_1 = bc_2 + b_2 c$$

womit

$$G = \mathfrak{A}\mathfrak{C} + 3\mathfrak{C}\mathfrak{C} \ , \qquad H = \mathfrak{C}(\mathfrak{A}\mathfrak{C} - \mathfrak{C}\mathfrak{C})$$

Folglich ergeben sich $\mathfrak{C}$ und das Product $\mathfrak{A}\mathfrak{C}$ als Wurzeln der cubischen Gleichungen

$$G^3 - 27H^2 = \mathfrak{A}\mathfrak{C}(4\mathfrak{A}\mathfrak{C} - 3G)^2 \ , \qquad H = \mathfrak{C}(G - 4\mathfrak{C}\mathfrak{C})$$

oder

$$4\mathfrak{C}^3 - G\mathfrak{C} + H = 0$$

mithin wegen

$$4\lambda^3 - G\lambda - H = 0$$

$$\mathfrak{C} = -\lambda \ , \qquad \mathfrak{A}\mathfrak{C} = G - 3\lambda^2 \ , \qquad \eta^2 = \mathfrak{A}y^4 - 6\lambda y^2 + \mathfrak{C}$$

Die Wurzel λ kann für reelle Werthe von G und H stets reell und von gleichem Vorzeichen mit H bestimmt werden, während die beiden anderen Wurzeln λ_1 und λ_2 der cubischen Gleichung entweder gleichfalls reell oder conjugirt complex sind, je nachdem $G^3 - 27H^2$ positiv oder negativ ist.

Fügt man die weitere Bedingung

$$\mathfrak{A} + \mathfrak{C} = 6\lambda$$

hinzu, so werden $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{C}$ Wurzeln der quadratischen Gleichung

$$\varpi^2 - 6\lambda\varpi - 3\lambda^2 + G = 0$$

Folglich erhalten $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{C}$ reelle Werthe für $12\lambda^2 > G$. Da aber $\frac{H}{\lambda} = 4\lambda^2 - G$ positiv gefunden wurde, ist $4\lambda^2 > G$, mithin können neben λ auch $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{C}$ stets reell bestimmt werden. Da ferner

$$\mathfrak{A}\mathfrak{C} = G - 3\lambda^2 = \frac{G^3 - 27H^2}{(4\mathfrak{A}\mathfrak{C} - 3G)^2}$$

so erhellt, dass nicht allein $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{C}$ gleiche oder entgegengesetzte Vorzeichen besitzen, je nachdem $G^3 - 27H^2 > 0$ oder < 0 (d. i. je nachdem λ_1 und λ_2 reell oder complex sind), sondern dass auch im

ersten Falle $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{C}$ gleiche Vorzeichen mit λ oder H besitzen, während λ^2 zwischen $\frac{1}{4}G$ und $\frac{1}{3}G$ liegt, wogegen im zweiten Falle $G < 3\lambda^2$ und $G < 3H^{\frac{2}{3}}$. Uebrigens können $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{C}$ als Wurzeln einer quadratischen Gleichung beliebig vertauscht werden.

Da nunmehr

$$\frac{dy}{\eta} = \frac{dy}{\sqrt{\mathfrak{A}y^4 - (\mathfrak{A}+\mathfrak{C})y^2 + \mathfrak{C}}} = \frac{dy}{\sqrt{(\mathfrak{A}y^2 - \mathfrak{C})(y^2 - 1)}} = \frac{dy}{\sqrt{(\mathfrak{C} - \mathfrak{A}y^2)(1 - y^2)}}$$

und η beim Durchgange von y^2 durch 1 vom Reellen zum Imaginären übergehen muss, so wird man $y_0 = 1$ setzen dürfen, um reelle Ausdrücke zu bekommen. Bestimmt man nun in dem elliptischen Differential dz die Variable z so, dass sie für $x = x_0$ verschwindet, so erhält man

$$z = \int_{x_0}^{x} \frac{dx}{\xi} = \int_{y}^{1} \frac{dy}{\sqrt{(1 - y^2)(\mathfrak{C} - \mathfrak{A}y^2)}} = -\int_{1}^{y} \frac{dy}{\sqrt{(\mathfrak{A}y^2 - \mathfrak{C})(y^2 - 1)}}$$

elliptische Integrale, deren weitere Reduction auf die sogenannte Normalform in reeller Form keine Schwierigkeiten bietet.

Setzt man

$$\xi\xi = A(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)$$

so wird bekanntermaassen

$$G = \frac{1}{24}A^2\{(a-b\cdot c-d)^2 + (a-c\cdot b-d)^2 + (a-d\cdot b-c)^2\}$$

$$H = \frac{1}{432}A^3\{(a-b\cdot c-d) + (a-c\cdot b-d)\}\{(a-c\cdot b-d) + (a-d\cdot b-c)\} \times \{(a-b\cdot c-d) - (a-d\cdot b-c)\}$$

$$G^3 - 27H^2 = \frac{1}{256}A^6(a-b\cdot a-c\cdot a-d\cdot b-c\cdot b-d\cdot c-d)^2 = \frac{1}{256}A^6\Delta^2$$

$$\lambda = \frac{1}{12}A\{(a-b\cdot c-d) + (a-c\cdot b-d)\}$$

$$\lambda_1 = \frac{1}{12}A\{(a-d\cdot b-c) - (a-b\cdot c-d)\}$$

$$\lambda_2 = -\frac{1}{12}A\{(a-c\cdot b-d) + (a-d\cdot b-c)\}$$

und mit Berücksichtigung der identischen Gleichung

$$(a-c\cdot b-d) = (a-b\cdot c-d) + (a-d\cdot b-c)$$

$$\mathfrak{A}\mathfrak{C} = \frac{1}{16}A^2(a-d\cdot b-c)^2$$

$$\mathfrak{C} + \mathfrak{A} = \frac{1}{2}A\{(a-b\cdot c-d) + (a-c\cdot b-d)\}$$

$$\mathfrak{E}-\mathfrak{A} = \pm A\sqrt{\overline{a-b}\cdot\overline{a-c}\cdot\overline{b-d}\cdot\overline{c-d}}$$

$$\mathfrak{A} = \frac{1}{4}A\{\sqrt{(\overline{a-c}\cdot\overline{b-d})} - \sqrt{(\overline{a-b}\cdot\overline{c-d})}\}^2$$

$$\mathfrak{E} = \frac{1}{4}A\{\sqrt{(\overline{a-c}\cdot\overline{b-d})} + \sqrt{(\overline{a-b}\cdot\overline{c-d})}\}^2$$

20.

Bei der Reduction auf die Normalform der elliptischen Integrale erster Gattung sind sechs Fälle zu unterscheiden:

für $\mathfrak{E} > \mathfrak{A} > 0$ setze man $y = \frac{\cos\varphi}{\Delta(\varphi,\varkappa)} < 1$, wodurch

$$z = \int_{x_0}^{x}\frac{dx}{\xi} = \int_0^{\varphi}\frac{d\varphi}{\sqrt{\mathfrak{E}-\mathfrak{A}\sin^2\varphi}} = \frac{1}{\sqrt{\mathfrak{E}}}\int_0^{\varphi}\frac{d\varphi}{\Delta(\varphi,\varkappa)}$$

$$\varkappa^2 = \frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{E}}, \qquad \varkappa'^2 = \frac{\mathfrak{E}-\mathfrak{A}}{\mathfrak{E}}$$

für $\mathfrak{E} > 0$, $\mathfrak{A} < 0$ setze man $y = \cos\varphi < 1$, wodurch

$$z = \int_{x_0}^{x}\frac{dx}{\xi} = \int_0^{\varphi}\frac{d\varphi}{\sqrt{\mathfrak{E}-\mathfrak{A}\cos^2\varphi}} = \frac{1}{\sqrt{\mathfrak{E}-\mathfrak{A}}}\int_0^{\varphi}\frac{d\varphi}{\Delta(\varphi,\varkappa)}$$

$$\varkappa^2 = \frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{A}-\mathfrak{E}}, \qquad \varkappa'^2 = \frac{\mathfrak{E}}{\mathfrak{E}-\mathfrak{A}}$$

für $\mathfrak{A} < \mathfrak{E} < 0$ setze man $y = \Delta(\varphi,\varkappa) < 1$, wodurch

$$z = \int_{x_0}^{x}\frac{dx}{\xi} = \int_0^{\varphi}\frac{d\varphi}{\sqrt{-\mathfrak{A}\cos^2\varphi-\mathfrak{E}\sin^2\varphi}} = \frac{1}{\sqrt{-\mathfrak{A}}}\int_0^{\varphi}\frac{d\varphi}{\Delta(\varphi,\varkappa)}$$

$$\varkappa^2 = \frac{\mathfrak{A}-\mathfrak{E}}{\mathfrak{A}}, \qquad \varkappa'^2 = \frac{\mathfrak{E}}{\mathfrak{A}}$$

für $\mathfrak{A} > \mathfrak{E} > 0$ setze man $y = \frac{\Delta(\varphi,\varkappa)}{\cos\varphi} > 1$, wodurch

$$z = \int_{x_0}^{x}\frac{dx}{\xi} = -\int_0^{\varphi}\frac{d\varphi}{\sqrt{\mathfrak{A}-\mathfrak{E}\sin^2\varphi}} = -\frac{1}{\sqrt{\mathfrak{A}}}\int_0^{\varphi}\frac{d\varphi}{\Delta(\varphi,\varkappa)}$$

$$\varkappa^2 = \frac{\mathfrak{E}}{\mathfrak{A}}, \qquad \varkappa'^2 = \frac{\mathfrak{A}-\mathfrak{E}}{\mathfrak{A}}$$

für $\mathfrak{A} > 0$, $\mathfrak{E} < 0$ setze man $y = \frac{1}{\cos\varphi} > 1$, wodurch

$$z = \int_{x_0}^{x}\frac{dx}{\xi} = -\int_0^{\varphi}\frac{d\varphi}{\sqrt{\mathfrak{A}-\mathfrak{E}\cos^2\varphi}} = -\frac{1}{\sqrt{\mathfrak{A}-\mathfrak{E}}}\int_0^{\varphi}\frac{d\varphi}{\Delta(\varphi,\varkappa)}$$

$$\varkappa^2 = \frac{\mathfrak{E}}{\mathfrak{E}-\mathfrak{A}}, \qquad \varkappa'^2 = \frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{A}-\mathfrak{E}}$$

für $\mathfrak{C} < \mathfrak{A} < 0$ setze man $y = \frac{1}{\Delta(\varphi, \varkappa)} > 1$, wodurch

$$z = \int_{x_0}^{x} \frac{dx}{\xi} = -\int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{-\mathfrak{A}\sin^2\varphi - \mathfrak{C}\cos^2\varphi}} = -\frac{1}{\sqrt{-\mathfrak{C}}}\int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\Delta(\varphi, \varkappa)}$$

$$\varkappa^2 = \frac{\mathfrak{C} - \mathfrak{A}}{\mathfrak{C}}, \qquad \varkappa'^2 = \frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{C}}$$

Es ist übrigens selbstverständlich, dass man wegen der bereits hervorgehobenen Vertauschbarkeit von $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{C}$ mit der Hälfte der vorstehenden Fälle ausreicht.

Die gefundenen Ausdrücke für $\varkappa^2$ lassen sich durch die coordinirten Werthe

$$\varkappa^2, \quad \frac{1}{\varkappa^2}, \quad \varkappa'^2, \quad \frac{1}{\varkappa'^2}, \quad -\frac{\varkappa^2}{\varkappa'^2} \quad \text{und} \quad -\frac{\varkappa'^2}{\varkappa^2}$$

darstellen und als Wurzeln einer reciproken Gleichung sechsten Grades von der Form

$$\sigma^6 - 3\sigma^5 + (6-\varrho)\sigma^4 - (7-2\varrho)\sigma^3 + (6-\varrho)\sigma^2 - 3\sigma + 1 = 0$$

bestimmen, wo

$$\varrho = \varkappa^2\varkappa'^2\left(\frac{1}{\varkappa^2\varkappa'^2} - 1\right)^3$$

In der That folgt mittelst

$$(\sigma - \varkappa^2)(\sigma - \varkappa'^2) = (\sigma^2 - \sigma) + \varkappa^2\varkappa'^2$$

$$\left(\sigma - \frac{1}{\varkappa^2}\right)\left(\sigma + \frac{\varkappa'^2}{\varkappa^2}\right) = (\sigma^2 - \sigma) - \frac{\varkappa'^2}{\varkappa^4}$$

$$\left(\sigma - \frac{1}{\varkappa'^2}\right)\left(\sigma + \frac{\varkappa^2}{\varkappa'^2}\right) = (\sigma^2 - \sigma) - \frac{\varkappa^2}{\varkappa'^4}$$

die Gleichung

$$(\sigma^2 - \sigma + 1)^3 = \varkappa^2\varkappa'^2\left(\frac{1}{\varkappa^2\varkappa'^2} - 1\right)^3(\sigma^2 - \sigma)^2$$

Für $\tau = \sigma + \frac{1}{\sigma} - 1$ erhält man folglich *)

$$\tau^3 = \varrho(\tau - 1)$$

Um ϱ durch λ auszudrücken, setze man etwa

$$\varkappa^2 = \frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{A} - \mathfrak{C}}, \qquad \varkappa'^2 = \frac{\mathfrak{C}}{\mathfrak{C} - \mathfrak{A}}$$

*) Vergl. Cayley in Crelle-Borchardt's Journal, Bd. 55, S. 15 fg.

$$\varkappa^2\varkappa'^2 = -\frac{\mathfrak{A}\mathfrak{E}}{(\mathfrak{E}-\mathfrak{A})^2} = \frac{3\lambda^2-G}{48\lambda^2-4G}$$

womit

$$\varrho = \frac{27}{4}\frac{(15\lambda^2-G)^3}{(3\lambda^2-G)^2(12\lambda^2-G)} = \frac{1}{16\varDelta}\left\{a-d\cdot b-c+\frac{16\varDelta}{(a-d\cdot b-c)^2}\right\}^3$$

Man erkennt aus diesen Ausdrücken, dass die Wurzeln λ_1 und λ_2 auf andere Werthe von ϱ und $\varkappa$ führen müssen. Anderenfalls würde ϱ rational durch G und $H = \lambda(4\lambda^2-G)$ ausdrückbar sein und könnte durch Vertauschung der Wurzeln $a\ b\ c\ d$ nicht drei Werthe erhalten.

21.

Wenn $\eta = \eta_1\eta_2$ für $y = y_0$ verschwindet, so geht für $\eta_2^0 = 0$ die irrationale Substitution

$$\frac{\xi_1\xi_2^0+\xi_1^0\xi_2}{x-x_0}+\frac{\eta_1\eta_2^0+\eta_1^0\eta_2}{y-y_0}=0$$

über in

$$\frac{\xi_1\xi_2^0+\xi_1^0\xi_2}{x-x_0}=\frac{\eta_1^0\eta_2}{y_0-y}$$

Da im gegenwärtigen Falle

für $\mathfrak{E}>\mathfrak{A}$, $y<1$ $\qquad \eta_1 = \sqrt{\mathfrak{E}-\mathfrak{A}y^2}$, $\qquad \eta_2 = \sqrt{1-y^2}$

für $\mathfrak{A}>\mathfrak{E}$, $y>1$ $\qquad \eta_1 = \sqrt{\mathfrak{A}y^2-\mathfrak{E}}$, $\qquad \eta_2 = \sqrt{y^2-1}$

so erhält man wegen $\eta_1^0\eta_1^0 = 2\sqrt{12\lambda^2-G} = 2\mu$

für $\mathfrak{E}>\mathfrak{A}$ $\qquad \dfrac{\xi_1\xi_2^0+\xi_1^0\xi_2}{x-x_0} = \sqrt{2\mu\dfrac{1+y}{1-y}}$

für $\mathfrak{E}<\mathfrak{A}$ $\qquad \dfrac{\xi_1\xi_2^0+\xi_1^0\xi_2}{x-x_0} = -\sqrt{2\mu\dfrac{y+1}{y-1}}$

Durch Quadrirung folgt

$$2(X-\lambda) = \mu\frac{1+y}{1-y} \qquad \text{resp.} \qquad 2(X-\lambda) = \mu\frac{y+1}{y-1}.$$

Zur Ableitung von $f(x,y)$ hat man im jetzigen Falle zu bilden

$$\mathfrak{f} = \mathfrak{A}y^4 - 6\lambda y^2 + \mathfrak{C}$$

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{A}\lambda y^4 + (6\lambda^2 - G)y^2 + \mathfrak{C}\lambda$$

$$\mathfrak{h} = \mu^2 y(\mathfrak{A}y^4 - \mathfrak{C})$$

$$k = (\mathfrak{A}y^4 - 6\lambda y^2 + \mathfrak{C})(g - \lambda f) - \mu^2 f y^2$$

$$\frac{\partial k}{\partial y} = 4y(\mathfrak{A}y^2 - 3\lambda)(g - \lambda f) - 2\mu^2 f y$$

$$\frac{\partial \mathfrak{h}}{\partial y} = \mu^2(5\mathfrak{A}y^4 - \mathfrak{C}) , \qquad \frac{\partial^2 \mathfrak{h}}{\partial y^2} = 20\mu^2\mathfrak{A}y^3$$

$$\mathfrak{L} = \mathfrak{A}y^2 - \lambda , \qquad \mathfrak{M} = -2\lambda y , \qquad \mathfrak{N} = \mathfrak{C} - \lambda y^2 ,$$

$$\mathfrak{L}_1 = \mathfrak{A}\lambda y^2 + \lambda^2 - \frac{1}{6}G , \qquad \mathfrak{M}_1 = 2y\left(\lambda^2 - \frac{1}{6}G\right) , \qquad \mathfrak{N}_1 = \mathfrak{C}\lambda + \left(\lambda^2 - \frac{1}{6}G\right)y^2$$

Setzt man hier $y_0 = 1$, $\eta_0 = 0$, so ergibt sich Art. 9 zufolge

$$\begin{aligned}\Xi = & -2\mu^2 f_0(y-1) + \left[2(\mathfrak{A}-3\lambda)(g_0-\lambda f_0) - \mu^2 f_0\right](y-1)^2 \\ & - \mu^2 f_0'(y-1)(x-x_0) + \mu^2(\mathfrak{A}-\mathfrak{C})(x-x_0)^2 \\ & + \left[(\mathfrak{A}-3\lambda)(g_0'-\lambda f_0') - \frac{1}{2}\mu^2 f_0'\right](y-1)^2(x-x_0) \\ & - \frac{1}{6}\mu^2\left[f_0'' - 2(5\mathfrak{A}-\mathfrak{C})\right](y-1)(x-x_0)^2 \\ & + \frac{1}{6}\left[(\mathfrak{A}-3\lambda)(g_0''-\lambda f_0'') - \frac{1}{2}\mu^2(f_0''-8\mathfrak{A})\right](y-1)^2(x-x_0)^2\end{aligned}$$

Substituirt man hier die Wurzelwerthe

$$\mathfrak{A} = 3\lambda - \mu , \qquad \mathfrak{C} = 3\lambda + \mu , \qquad \text{wo} \qquad \mu = \sqrt{12\lambda^2 - G}$$

so folgt wegen

$$\mathfrak{L}_0 y_0 + \mathfrak{M}_0 = \mathfrak{A} - 3\lambda = 3\lambda - \mathfrak{C} = \frac{1}{2}(\mathfrak{A}-\mathfrak{C}) = -\frac{1}{2}(\mathfrak{C}-\mathfrak{A}) = -\mu$$

$$\begin{aligned}\frac{\Xi}{\mu^2} = & \; 2f_0(1-y) - \left(f_0 + 2\frac{g_0-\lambda f_0}{\mu}\right)(1-y)^2 + f_0'(1-y)(x-x_0) - 2\mu(x-x_0)^2 \\ & - \left(\frac{1}{2}f_0' + \frac{g_0'-\lambda f_0'}{\mu}\right)(1-y)^2(x-x_0) + \left(\frac{1}{6}f_0'' - 4\lambda + 2\mu\right)(1-y)(x-x_0)^2 \\ & - \left(\frac{1}{12}f_0'' - 2\lambda + \frac{2}{3}\mu + \frac{g_0''-\lambda f_0''}{6\mu}\right)(1-y)^2(x-x_0)^2\end{aligned}$$

Für die nämliche Function erhält man nach den Formeln des Art. 11 mittelst

$$\begin{aligned}
\mathfrak{W}(y_0 y) &= \mathfrak{L}_0 y^2 + 2\mathfrak{M}_0 y + \mathfrak{N}_0 = (\mathfrak{A} - \lambda) y^2 - 4\lambda y + \mathfrak{C} - \lambda \\
&= \mathfrak{L} y_0^2 + 2\mathfrak{M} y_0 + \mathfrak{N} = 2\lambda(1-y)^2 + \mu(1-y^2) \\
\mathfrak{W}_1(y_0 y) &= \mathfrak{L}_1^0 y^2 + 2\mathfrak{M}_1^0 y + \mathfrak{N}_1^0 = \mathfrak{L}_1 y_0^2 + 2\mathfrak{M}_1 y_0 + \mathfrak{N}_1 \\
&= \left(\mathfrak{A}\lambda + \lambda^2 - \frac{1}{6}G\right) y^2 + 4\left(\lambda^2 - \frac{1}{6}G\right) y + \mathfrak{C}\lambda + \lambda^2 - \frac{1}{6}G \\
&= \frac{1}{6}G(1-y)^2 + \lambda\mu(1-y^2) + \frac{1}{3}\mu^2(1+y+y^2) \\
\frac{\Xi}{\mu} &= \frac{1}{3}G(y-y_0)^2(x-x_0)^2 - 2\mathfrak{W}_1(y_0 y)(x-x_0)^2 - 2W_1(x_0 x)(y-y_0)^2 \\
&\qquad + W(x_0 x)\, W(y_0 y) \\
&= (L_0 x^2 + 2M_0 x + N_0)[2\lambda(1-y)^2 + \mu(1-y^2)] \\
&\quad - 2(L_1^0 x^2 + 2M_1^0 x + N_1^0)(1-y)^2 \\
&\quad - 2\mu\left[\lambda(1-y^2) + \frac{1}{3}\mu(1+y+y^2)\right](x-x_0)^2
\end{aligned}$$

Die Identität der beiden für Ξ abgeleiteten Ausdrücke ist leicht zu verificiren. Uebrigens versteht sich von selbst, dass für den Fall $\mathfrak{A} > \mathfrak{C}$ das Vorzeichen des Radicals μ umgekehrt werden muss.

22.

Die Werthe von x, y, ξ und η anlangend ergeben die Formeln des Art. 10

$$x - x_0 =$$

$$= \frac{(L_0 x_0 + M_0)[2\lambda(1-y)^2 + \mu(1-y^2)] - 2(L_1^0 x_0 + M_1^0)(1-y)^2 + \mu\xi_0\eta}{2L_1^0(1-y)^2 + 2\mu[\lambda(1-y^2) + \frac{1}{3}\mu(1+y+y^2)] - L_0[2\lambda(1-y)^2 + \mu(1-y^2)]}$$

$$= \frac{2g_0(1-y)^2 - f_0[2\lambda(1-y)^2 + \mu(1-y^2)]}{(L_0 x_0 + M_0)[2\lambda(1-y)^2 + \mu(1-y^2)] - 2(L_1^0 x + M_1^0)(1-y)^2 - \mu\xi_0\eta}$$

$$1 - y =$$

$$= \mu \frac{L_0 x^2 + 2M_0 x + N_0 - (\mathfrak{A} - \lambda)(x-x_0)^2 - \xi_0\xi}{2(\mathfrak{A}\lambda + \lambda^2 - \frac{1}{3}G)(x-x_0)^2 + 2(L_1^0 x^2 + 2M_1^0 x + N_1^0) - (\mathfrak{A} - \lambda)(L_0 x^2 + 2M_0 x + N_0)}$$

$$= \frac{2\mu(x-x_0)^2}{L_0 x^2 + 2M_0 x + N_0 - (\mathfrak{A} - \lambda)(x-x_0)^2 + \xi_0\xi}$$

oder nach leichter Reduction

$$x - x_0 = \frac{\frac{1}{2}(\lambda f_0' - g_0')(1-y)^2 + \mu\left[\frac{1}{4}f_0'(1-y^2) + \xi_0\eta\right]}{2(L_1^0 - \lambda L_0)(1-y)^2 + \mu\left[(2\lambda - L_0)(1-y^2) + \frac{2}{3}\mu(1+y+y^2)\right]}$$

$$= \frac{2(g_0 - \lambda f_0)(1-y)^2 - \mu f_0(1-y^2)}{\frac{1}{2}(\lambda f_0' - g_0')(1-y)^2 + \mu\left[\frac{1}{4}f_0'(1-y^2) - \xi_0\eta\right]}$$

$$= \frac{f_0 - 2\dfrac{g_0 - \lambda f_0}{\mu}\dfrac{1-y}{1+y}}{\dfrac{\xi_0\eta}{1-y^2} - \frac{1}{4}f_0' + \dfrac{g_0' - \lambda f_0'}{2\mu}\dfrac{1-y}{1+y}}$$

$$1 - y = \mu\frac{W(xx_0) + (\mu - 2\lambda)(x-x_0)^2 - \xi_0\xi}{2W_1(xx_0) + (\mu - 2\lambda)W(xx_0) + 2\mu(\frac{1}{3}\mu - \lambda)(x-x_0)^2}$$

$$= \frac{2\mu(x-x_0)^2}{W(xx_0) + (\mu - 2\lambda)(x-x_0)^2 + \xi_0\xi} = \frac{\mu}{X - \lambda + \frac{1}{2}\mu}$$

Der letzte Ausdruck liefert sogleich

$$1 + y = 2\frac{W(xx_0) - 2\lambda(x-x_0)^2 + \xi_0\xi}{W(xx_0) + (\mu - 2\lambda)(x-x_0)^2 + \xi_0\xi} = \frac{2(X-\lambda)}{X - \lambda + \frac{1}{2}\mu}$$

folglich

$$\mu\frac{1+y}{1-y} = \frac{W(xx_0) + \xi_0\xi}{(x-x_0)^2} - 2\lambda = 2(X - \lambda)$$

übereinstimmend mit dem vorigen Artikel.

Die Werthe der Radicale ξ und η endlich nehmen die Form an

$$\xi = 2\mu(1-y) \times$$

$$\times \frac{h_0\eta(1-y) + \mu^2\xi_0 f_0 y(1+y) - 2\xi_0(g_0 - \lambda f_0)(1-y)\left[3\lambda(1-y^2) + \mu(1+y+y^2)\right]}{\left(\frac{1}{2}(\lambda f_0' - g_0')(1-y)^2 + \mu\left[\frac{1}{4}f_0'(1-y^2) - \xi_0\eta\right]\right)^2}$$

$$\eta = 4\mu(x-x_0)\frac{\left[L_0 xx_0 + M_0(x+x_0) + N_0\right]\xi + \left[Lxx_0 + M(x+x_0) + N\right]\xi_0}{\left(L_0x^2 + 2M_0x + N_0 + (\mu - 2\lambda)(x-x_0)^2 + \xi_0\xi\right)^2}.$$

23.

Wir wenden uns zum dritten Beispiel für die Anwendung der allgemeinen Formeln und untersuchen den Specialfall

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{E} = 0 \qquad \text{oder} \qquad a_1^2 = aa_2\,, \qquad c_1^2 = cc_2$$

Damit folgt

$$G = 3\mathfrak{C}\mathfrak{C} - 4\mathfrak{B}\mathfrak{D}\,, \qquad H = \mathfrak{C}(2\mathfrak{B}\mathfrak{D} - \mathfrak{C}\mathfrak{C})$$

und $\mathfrak{C}$ sowie das Product $\mathfrak{B}\mathfrak{D}$ ergeben sich als Wurzeln der cubischen Gleichungen

$$\mathfrak{C}(\mathfrak{C}\mathfrak{C} - G) = 2H\,, \qquad 4\mathfrak{B}^2\mathfrak{D}^2(3G - 4\mathfrak{B}\mathfrak{D}) = G^3 - 27H^2$$

Durch Vergleichung mit der Resolvente

$$4\lambda^3 - G\lambda = H$$

erhält man

$$\mathfrak{C} = 2\lambda\,, \qquad 4\mathfrak{B}\mathfrak{D} = 12\lambda^2 - G\,, \qquad \eta\eta = 4y(\mathfrak{B}y^2 + 3\lambda y + \mathfrak{D})$$

Fügt man die Bedingungsgleichung

$$\mathfrak{B} + \mathfrak{D} = 3\lambda$$

hinzu, so werden $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{D}$ Wurzeln der quadratischen Gleichung

$$\varpi^2 - 3\lambda\varpi + 3\lambda^2 - \frac{1}{4}G = 0$$

mit der Realitätsbedingung $3\lambda^2 < G$. Letztere Ungleichung ist jedoch nur für den Fall $G^3 > 27H^2$ (λ_1 und λ_2 reell) erfüllt, wie bereits Art. 19 gezeigt worden und auch direct aus der Gleichung

$$G^3 - 27H^2 = 4\mathfrak{B}^2\mathfrak{D}^2(3G - 4\mathfrak{B}\mathfrak{D}) = 16\mathfrak{B}^2\mathfrak{D}^2(G - 3\lambda^2)$$

zu entnehmen ist. Die Reductionsmethode dieses Beispiels ist also auf den Fall $G^3 < 27H^2$ in reeller Form nicht anwendbar. Zugleich erkennt man, da nach Art. 19 λ so bestimmt worden ist, dass

$$\frac{H}{\lambda} = 4\lambda^2 - G > 0$$

dass vermöge der Gleichung $\mathfrak{B}\mathfrak{D} = 3\lambda^2 - \frac{1}{4}G$ die Werthe von $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{D}$ gleiche Vorzeichen mit H und λ haben müssen.

Man erhält nunmehr

$$\int_{y_0}^{y}\frac{dy}{\eta} = \int_{y_0}^{y}\frac{dy}{2\sqrt{y(\mathfrak{B}y^2 + (\mathfrak{B}+\mathfrak{D})y + \mathfrak{D})}}\,.$$

Hier darf man $y_0 = 0$ setzen und bekommt für positive Werthe von H, wenn man zugleich s^2 für das gleichfalls positive y schreibt:

$$\frac{dy}{\eta} = \frac{ds}{\sqrt{(s^2+1)(\mathfrak{B}s^2 + \mathfrak{D})}}$$

Dagegen wird für negative Werthe von H und $y = -t^2$

$$\frac{dy}{\eta} = -\frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(\mathfrak{B}t^2 - \mathfrak{D})}}$$

Damit gehen die resp. Werthe hervor

$$z = \int_{x_0}^{x} \frac{dx}{\xi} = -\int_0^s \frac{ds}{\sqrt{(s^2+1)(\mathfrak{B}s^2+\mathfrak{D})}} = \int_0^t \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(\mathfrak{B}t^2-\mathfrak{D})}}$$

welche leicht auf die sogen. Normalform reducirt werden können.

24.

Um auch die Abhängigkeit von den Wurzeln der Gleichung $\xi = 0$ zu untersuchen, hat man

$$\mathfrak{B}\mathfrak{D} = \frac{1}{16}A^2(a-b\cdot a-c\cdot b-d\cdot c-d)$$

$$\mathfrak{B}+\mathfrak{D} = \frac{1}{4}A\{(a-b\cdot c-d) + (a-c\cdot b-d)\}$$

$$\mathfrak{B}-\mathfrak{D} = \pm\frac{1}{4}A(b-c\cdot a-d)$$

$$4\mathfrak{B} = A(a-c\cdot b-d)$$

$$4\mathfrak{D} = A(a-b\cdot c-d)$$

zu setzen. Die Vergleichung der betreffenden Resultate des vorigen Beispiels (Art. 19) lässt sofort erkennen, dass

$$\mathfrak{C}+\mathfrak{A} = 2(\mathfrak{B}+\mathfrak{D}) \;, \qquad \mathfrak{C}-\mathfrak{A} = 4\sqrt{\mathfrak{B}\mathfrak{D}}$$

das arithmetische und geometrische Mittel aus $4\mathfrak{B}$ und $4\mathfrak{D}$, sowie

$$\sqrt{\mathfrak{C}} = \sqrt{\mathfrak{B}}+\sqrt{\mathfrak{D}} \;, \qquad \sqrt{\mathfrak{C}-\mathfrak{A}} = 2\sqrt[4]{\mathfrak{B}\mathfrak{D}}$$

das arithmetische und geometrische Mittel aus $\sqrt{4\mathfrak{B}}$ und $\sqrt{4\mathfrak{D}}$ darstellen.

Zur Vollendung der Reduction setze man

für $\mathfrak{B}>\mathfrak{D}>0$, $s = \varkappa'\,\mathrm{tg}\,\varphi$ oder $y = \frac{\mathfrak{D}}{\mathfrak{B}}\mathrm{tg}^2\varphi$, wodurch

$$z = \int_{x_0}^{x} \frac{dx}{\xi} = -\int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{\mathfrak{B}\cos^2\varphi+\mathfrak{D}\sin^2\varphi}} = -\frac{1}{\sqrt{\mathfrak{B}}}\int_0^{\varphi}\frac{d\varphi}{\Delta(\varphi,\varkappa)}$$

$$\varkappa^2 = \frac{\mathfrak{B}-\mathfrak{D}}{\mathfrak{B}} \;, \qquad \varkappa'^2 = \frac{\mathfrak{D}}{\mathfrak{B}}$$

für $\mathfrak{D}>\mathfrak{B}>0$, $s = \mathrm{tg}\,\varphi$ oder $y = \mathrm{tg}^2\varphi$, wodurch

$$z = \int_{x_0}^{x} \frac{dx}{\xi} = -\int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{\mathfrak{D}\cos^2\varphi+\mathfrak{B}\sin^2\varphi}} = -\frac{1}{\sqrt{\mathfrak{D}}}\int_0^{\varphi}\frac{d\varphi}{\Delta(\varphi,\varkappa)}$$

$$\varkappa^2 = \frac{\mathfrak{D}-\mathfrak{B}}{\mathfrak{D}} \;, \qquad \varkappa'^2 = \frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{D}}$$

für $\mathfrak{B} < \mathfrak{D} < 0$, $t = \varkappa \sin\varphi$ oder $y = -\frac{\mathfrak{D}}{\mathfrak{B}}\sin^2\varphi$, wodurch

$$z = \int_{x_0}^{x}\frac{dx}{\xi} = \int_0^{\varphi}\frac{d\varphi}{\sqrt{-\mathfrak{B}-\mathfrak{D}\sin^2\varphi}} = \frac{1}{\sqrt{-\mathfrak{B}}}\int_0^{\varphi}\frac{d\varphi}{\Delta(\varphi,\varkappa)},$$

$$\varkappa^2 = \frac{\mathfrak{D}}{\mathfrak{B}}, \qquad \varkappa'^2 = \frac{\mathfrak{B}-\mathfrak{D}}{\mathfrak{B}}$$

für $\mathfrak{D} < \mathfrak{B} < 0$, $t = \sin\varphi$ oder $y = -\sin^2\varphi$, wodurch

$$z = \int_{x_0}^{x}\frac{dx}{\xi} = \int_0^{\varphi}\frac{d\varphi}{\sqrt{-\mathfrak{D}-\mathfrak{B}\sin^2\varphi}} = \frac{1}{\sqrt{-\mathfrak{D}}}\int_0^{\varphi}\frac{d\varphi}{\Delta(\varphi,\varkappa)},$$

$$\varkappa^2 = \frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{D}}, \qquad \varkappa'^2 = \frac{\mathfrak{D}-\mathfrak{B}}{\mathfrak{D}}$$

Auch hier erhellt, dass wegen der Vertauschbarkeit von $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{D}$ die vier Fälle auf zwei zurückgeführt werden können.

Durch analoge Betrachtungen wie die des Art. 20 findet man, wenn man z. B.

$$\varkappa^2\varkappa'^2 = -\frac{\mathfrak{B}\mathfrak{D}}{(\mathfrak{B}-\mathfrak{D})^2} = \frac{12\lambda^2 - G}{12\lambda^2 - 4G}$$

setzt *)

$$\varrho = \frac{27}{4}\frac{G^3}{(12\lambda^2 - G)^2(G - 3\lambda^2)} = \Delta\left\{\frac{1}{b-c\cdot a-d} + \frac{(b-c\cdot a-d)^2}{\Delta}\right\}^3$$

während wiederum

$$\frac{1}{\varkappa^2} - \varkappa'^2, \qquad \frac{1}{\varkappa'^2} - \varkappa^2 \quad \text{und} \quad 1 - \frac{1}{\varkappa^2\varkappa'^2}$$

die Wurzeln der cubischen Gleichung

$$\tau^3 = \varrho(\tau - 1)$$

oder was dasselbe ist, die sechs Werthe

$$\frac{\mathfrak{B}-\mathfrak{D}}{\mathfrak{B}}, \quad \frac{\mathfrak{D}}{\mathfrak{B}}, \quad \frac{\mathfrak{D}-\mathfrak{B}}{\mathfrak{D}}, \quad \frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{D}}, \quad \frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{B}-\mathfrak{D}} \quad \text{und} \quad \frac{\mathfrak{D}}{\mathfrak{D}-\mathfrak{B}}$$

die Wurzeln der reciproken Gleichung

$$\sigma^6 - 3\sigma^5 + (6-\varrho)\sigma^4 - (7-2\varrho)\sigma^3 + (6-\varrho)\sigma^2 - 3\sigma + 1 = 0$$

darstellen.

*) wo natürlich $\varkappa$ nicht reell sein wird.

25.

Es handelt sich noch um die Form, welche jetzt die Gleichungen zwischen x, y, ξ und η annehmen. Die irrationale Substitution

$$\frac{\xi_1\xi_2^0+\xi_2\xi_1^0}{x-x_0}=\frac{\eta_1^0\eta_2}{y_0-y}$$

ergibt für

$$y_0=0\,,\qquad \eta_1=2\sqrt{\frac{\mathfrak{B}y^2+3\lambda y+\mathfrak{D}}{\mathfrak{D}}}\,,\qquad \eta_2=\sqrt{\mathfrak{D}y}$$

$$\frac{\xi_1\xi_2^0+\xi_2\xi_1^0}{x-x_0}=-2\frac{\sqrt{\mathfrak{D}y}}{y}=-2\frac{\sqrt{\mathfrak{D}}}{s}=2\frac{\sqrt{-\mathfrak{D}}}{t}$$

und wenn man quadrirt

$$y=\frac{\mathfrak{D}}{X-\lambda}$$

Ferner gehen die Werthe hervor

$$\mathfrak{f}=4y(\mathfrak{B}y^2+3\lambda y+\mathfrak{D})$$

$$\mathfrak{g}=(\mathfrak{B}y^2-\mathfrak{D})^2+4\lambda y(\mathfrak{B}y^2+3\lambda y+\mathfrak{D})$$

$$\mathfrak{h}=2(\mathfrak{B}y^2-\mathfrak{D})^3-4(\mathfrak{B}^2y^4-\mathfrak{D}^2)(\mathfrak{B}y^2+3\lambda y+\mathfrak{D})$$

$$k=4(g-\lambda f)y(\mathfrak{B}y^2+3\lambda y+\mathfrak{D})-f(\mathfrak{B}y^2-\mathfrak{D})^2$$

$$\frac{\partial k}{\partial y}=4(g-\lambda f)(3\mathfrak{B}y^2+6\lambda y+\mathfrak{D})-4f\mathfrak{B}y(\mathfrak{B}y^2-\mathfrak{D})$$

$$\frac{\partial \mathfrak{h}}{\partial y}=20\mathfrak{B}y(\mathfrak{B}y^2-\mathfrak{D})^2-32\mathfrak{B}^3y^5-60\mathfrak{B}^2\lambda y^4+12\mathfrak{D}^2\lambda$$

$$\frac{\partial^2 \mathfrak{h}}{\partial y^2}=20\mathfrak{B}(\mathfrak{B}y^2-\mathfrak{D})^2-80\mathfrak{B}^2y^2(\mathfrak{B}y^2+3\lambda y+\mathfrak{D})$$

$$\mathfrak{L}=2(\mathfrak{B}y+\lambda)\,,\qquad \mathfrak{L}_1=\mathfrak{B}^2y^2+2\mathfrak{B}\lambda y+\lambda^2+\frac{1}{12}G$$

$$\mathfrak{M}=\mathfrak{B}y^2+4\lambda y+\mathfrak{D}\,,\qquad \mathfrak{M}_1=\mathfrak{B}\lambda y^2+2\left(\lambda^2+\frac{1}{12}G\right)y+\mathfrak{D}\lambda$$

$$\mathfrak{N}=2y(\lambda y+\mathfrak{D})\,,\qquad \mathfrak{N}_1=\left(\lambda^2+\frac{1}{12}G\right)y^2+2\mathfrak{D}\lambda y+\mathfrak{D}^2$$

Hiermit wird nach Art. 9 wegen $y_0=\eta_0=0$

$$\frac{\Xi}{\mathfrak{D}} = -2\mathfrak{D}f_0 y + 2(g_0 - \lambda f_0)y^2 - \mathfrak{D}f_0(x-x_0)y + 2\mathfrak{D}^2(x-x_0)^2$$
$$+ (g_0' - \lambda f_0')(x-x_0)y^2 + \mathfrak{D}\left(4\lambda - \frac{1}{6}f_0''\right)(x-x_0)^2 y$$
$$+ \left(\frac{2}{3}\mathfrak{B}\mathfrak{D} + \frac{1}{6}(g_0'' - \lambda f_0'')\right)(x-x_0)^2 y^2$$

wo die beiden letzten Glieder auch in der Form geschrieben werden können

$$+ 2\mathfrak{D}(2\lambda - L_0)(x-x_0)^2 y + 2\left(L_1^0 - \lambda L_0 + \lambda^2 - \frac{1}{12}G\right)(x-x_0)^2 y^2$$

während

$$\mathfrak{D} = \frac{3}{2}\lambda \mp \frac{1}{2}\sqrt{G - 3\lambda^2}\,, \qquad \mathfrak{B} = \frac{3}{2}\lambda \pm \frac{1}{2}\sqrt{G - 3\lambda^2}$$

Dagegen ergeben die Ausdrücke des Art. 11 für die nämliche Function

$$\mathfrak{W}(yy_0) = \mathfrak{R}\,, \qquad \mathfrak{W}_1(yy_0) = \mathfrak{R}_1$$

$$\frac{\Xi}{\mathfrak{D}} = 2(L_1^0 x^2 + 2M_1^0 x + N_1^0)y^2 - 2(L_0 x^2 + 2M_0 x + N_0)y(\lambda y + \mathfrak{D})$$
$$+ 2(x-x_0)^2\left[\left(\lambda^2 + \frac{1}{12}G\right)y^2 + 2\mathfrak{D}\lambda y + \mathfrak{D}^2\right] - \frac{1}{3}G(x-x_0)^2 y^2$$

Endlich erhält man mittelst des Art. 10

$$x - x_0 = \frac{1}{4}\,\frac{(\lambda f_0' - g_0')y^2 + \mathfrak{D}(f_0' y - 2\xi_0\eta)}{(L_1^0 - \lambda L_0 + \lambda^2 - \frac{1}{12}G)y^2 + \mathfrak{D}[(2\lambda - L_0)y + \mathfrak{D}]}$$
$$= 4\,\frac{(g_0 - \lambda f_0)y^2 - \mathfrak{D}f_0 y}{(\lambda f_0' - g_0')y^2 + \mathfrak{D}(f_0' y + 2\xi_0\eta)}$$

$$y = \mathfrak{D}\,\frac{L_0 x^2 + 2M_0 x + N_0 - 2\lambda(x-x_0)^2 - \xi_0\xi}{(2\lambda^2 - \frac{1}{6}G)(x-x_0)^2 + 2(L_1^0 x^2 + 2M_1^0 x + N_1^0) - 2\lambda(L_0 x^2 + 2M_0 x + N_0)}$$
$$= \frac{2\mathfrak{D}(x-x_0)^2}{L_0 x^2 + 2M_0 x + N_0 - 2\lambda(x-x_0)^2 + \xi_0\xi} = \frac{\mathfrak{D}}{X - \lambda}$$

$$\xi = 8\mathfrak{D}y\,\frac{2\xi_0(\lambda f_0 - g_0)y(\mathfrak{B}y^2 + 6\lambda y + 3\mathfrak{D}) - f_0[3(\lambda^2 - \frac{1}{12}G)y^2 - \mathfrak{D}^2] - h_0 y\eta}{\{(\lambda f_0' - g_0')y^2 + \mathfrak{D}(f_0' y + 2\xi_0\eta)\}^2}$$

$$\eta = -4\mathfrak{D}(x - x_0)\,\frac{[L_0 x x_0 + M_0(x + x_0) + N_0]\xi + [Lxx_0 + M(x+x_0) + N]\xi_0}{\{L_0 + 2M_0 x + N_0 - 2\lambda(x-x_0)^2 + \xi_0\xi\}^2}$$

26.

Als viertes Beispiel setzen wir

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{C} = 0\,, \qquad \mathfrak{B} = 1$$

wodurch

$$G = -4\mathfrak{D}\,, \qquad H = -\mathfrak{E}\,, \qquad \eta^2 = 4y^3 - Gy - H$$

folgen. Damit ergibt sich

$$dz = \frac{dx}{\xi} = -\frac{dy}{\sqrt{4y^3 - Gy - H}}$$

und für $y_0 = \infty$

$$z = \int_{x_0}^{x} \frac{dx}{\xi} = \int_{y}^{\infty} \frac{dy}{\sqrt{4y^3 - Gy - H}}$$

Letzteres ist die von Weierstrass*) in die Theorie eingeführte Form, für welche die Reihenentwickelung gilt

$$y = \frac{1}{z^2} + \frac{1}{20} G z^2 + \frac{1}{28} H z^4 + \frac{1}{1200} G^2 z^6 + \frac{3}{6160} G H z^8$$
$$+ \frac{1}{208}\left(\frac{G^3}{750} + \frac{H^2}{49}\right) z^{10} + \frac{1}{184800} G^2 H z^{12} \ldots$$

deren Coefficienten mit Hülfe der Differentialgleichung des Art. 1

$$\frac{1}{2}\frac{d^2y}{dz^2} = 3y^2 + \mathfrak{D}$$

bequem berechnet werden.

Man erhält jetzt

$$\mathfrak{f} = 4y^3 - Gy - H\,, \qquad \mathfrak{g} = y^4 + \frac{1}{2} G y^2 + 2Hy + \frac{1}{16} G^2$$
$$\mathfrak{h} = -2y^6 + \frac{5}{2} G y^4 + 10 H y^3 + \frac{5}{8} G^2 y^2 + \frac{1}{2} G H y + H^2 - \frac{1}{32} G^3$$
$$k = -f y^4 + 4 g y^3 - \frac{1}{2} G f y^2 - (2Hf + Gg)\, y - \left(\frac{1}{16} G^2 f + Hg\right)$$

und die Function $-k_0 f(x, y)$ nimmt die Gestalt an

$$0 = [\xi_0 (y - y_0) + \eta_0 (x - x_0)]\,[2 f_0 y_0^4 - 8 g_0 y_0^3 + G f_0 y_0^2 + 2(2 H f_0 + G g_0)\, y_0 +$$
$$+ \frac{1}{8} G^2 f_0 + 2 H g_0]$$
$$+ \frac{1}{2}(y - y_0)^2 [\xi_0 (4 f_0 y_0^3 - 12 g_0 y_0^2 + G f_0 y_0 + 2 H f_0 + G g_0) + 2 \eta_0 h_0]$$
$$+ (x - x_0)(y - y_0)\,[\xi_0 \left(f_0' y_0^4 - 4 g_0' y_0^3 + \frac{1}{2} G f_0' y_0^2 + (2 H f_0' + G g_0')\, y_0 + \frac{1}{16} G^2 f_0' + H g_0'\right) +$$
$$+ \eta_0 (4 f_0 y_0^3 - 12 g_0 y_0^2 + G f_0 y_0 + 2 H f_0 + G g_0)]$$
$$+ \frac{1}{2}(x - x_0)^2 [\xi_0 \left(4 y_0^6 - 5 G y_0^4 - 20 H y_0^3 - \frac{5}{4} G^2 y_0^2 - G H y_0 - 2H^2 + \frac{1}{16} G^3\right) +$$
$$+ \eta_0 \left(f_0' y_0^4 - 4 g_0' y_0^3 + \frac{1}{2} G f_0' y_0^2 + (2 H f_0' + G g_0')\, y_0 + \frac{1}{16} G^2 f_0' + H g_0'\right)]$$

---

*) Siehe z. B. Biermann in seiner bereits citirten Dissertation S. 3.

$$+\frac{1}{12}(x-x_0)(y-y_0)^2\big[3\xi_0(4f_0'y_0^3-12g_0'y_0^2+Gf_0'y_0+2Hf_0'+Gg_0')+$$
$$+2\eta_0(12f_0y_0^2-24g_0y_0+Gf_0+2h_0')\big]$$
$$+\frac{1}{12}(x-x_0)^2(y-y_0)\big[\xi_0\big(48y_0^5+2f_0''y_0^4-8(g_0''+5G)y_0^3+(Gf_0''-120H)y_0^2+$$
$$+(4Hf_0''+2Gg_0''-5G^2)y_0+\frac{1}{8}G^2f_0''+2Hg_0''-2GH\big)+$$
$$+3\eta_0(4f_0'y_0^3-12g_0'y_0^2+Gf_0'y_0+2Hf_0'+Gg_0')\big]$$
$$+\frac{1}{24}(x-x_0)^2(y-y_0)^2\big[\xi_0\big(48y_0^4+4f_0''y_0^3-12(g_0''+2G)y_0^2+$$
$$+(Gf_0''-48H)y_0+2Hf_0''+Gg_0''-G^2\big)+$$
$$+\eta_0(12f_0'y_0^2-24g_0'y_0+Gf_0'+\frac{4}{5}h_0'')\big]$$

27.

Bei der Entwickelung nach den absteigenden Potenzen von y_0, wobei $\eta_0 = 2y_0^{\frac{3}{2}}\left(1-\frac{G}{8y_0^2}\cdots\right)$ zu setzen, heben sich die in y_0^6, $y_0^{\frac{11}{2}}$, y_0^5 und $y_0^{\frac{9}{2}}$ multiplicirten Glieder fort und der Coefficient von $2\xi_0 y_0^4$ wird

$$(x-x_0)^2y^2-\left[f_0+\frac{1}{2}f_0'(x-x_0)+\frac{1}{12}f_0''(x-x_0)^2\right]y$$
$$+\left[g_0+\frac{1}{2}g_0'(x-x_0)+\frac{1}{12}(g_0''-G)(x-x_0)^2\right]=0$$

Diese Gleichung gilt folglich für $y_0=\infty$ und kann auch geschrieben werden

$$\left(y^2-\frac{1}{12}G\right)(x-x_0)^2-y(L_0x^2+2M_0x+N_0)+L_1^0x^2+2M_1^0x+N_1^0=0$$

oder

$$\left(y^2-\frac{1}{12}G\right)(x-x_0)^2-y(Lx_0^2+2Mx_0+N)+L_1x_0^2+2M_1x_0+N_1=0$$

Ferner erhält man, gleichfalls für $y_0=\infty$,

$$x-x_0=3\,\frac{2\xi_0\eta+f_0'y-g_0'}{12y^2-f_0''y+g_0''-G}=4\,\frac{f_0y-g_0}{2\xi_0\eta-f_0'y+g_0'}$$

mit den Resultaten des Art. 7 in Uebereinstimmung. Hiernach ist der BIERMANN'sche Ausdruck in § 1 seiner oben angeführten Dissertation zu verbessern, wo gelesen werden muss

$$x - x_0 = \frac{\xi_0 \eta + \frac{1}{2} f_0'(y - \frac{1}{24} f_0'') + \frac{1}{24} f_0 f_0'''}{2(y - \frac{1}{24} f_0'')^2 - \frac{1}{2} A f_0}$$

$$= \frac{\sqrt{R x_0}\sqrt{R s} + \frac{1}{2} R' x_0 (s - \frac{1}{24} R'' x_0) + \frac{1}{24} R x_0 R''' x_0}{2(s - \frac{1}{24} R'' x_0)^2 - \frac{1}{2} A R x_0}$$

Die irrationale Relation

$$\frac{\xi_1 \xi_2^0 + \xi_1^0 \xi_2}{x - x_0} + \frac{\eta_1 \eta_2^0 + \eta_1^0 \eta_2}{y - y_0} = 0$$

nimmt für

$$\eta^2 = 4(y - \lambda)(y - \lambda_1)(y - \lambda_2)$$

oder

$$\eta_1 = 2\sqrt{y - \lambda}\,, \qquad \eta_2 = \sqrt{\left(y^2 + \lambda y + \frac{H}{4\lambda}\right)}$$

die Form an

$$\frac{\xi_1 \xi_2^0 + \xi_1^0 \xi_2}{x - x_0} = 2 \frac{\sqrt{y - \lambda}\sqrt{\left(y_0^2 + \lambda y_0 + \frac{H}{4\lambda}\right)} + \sqrt{y_0 - \lambda}\sqrt{\left(y^2 + \lambda y + \frac{H}{4\lambda}\right)}}{y_0 - y}$$

folglich für $y_0 = \infty$

$$\frac{\xi_1 \xi_2^0 + \xi_1^0 \xi_2}{x - x_0} = 2\sqrt{y - \lambda}$$

Da nach Art. 7

$$\frac{\xi_1 \xi_2^0 + \xi_1^0 \xi_2}{x - x_0} = 2\sqrt{X - \lambda}$$

so liefert die umgekehrte Substitution die einfachen Werthe

$$y = X \qquad \text{nebst} \qquad \eta = -\xi \frac{dy}{dx} = X_1$$

welche auch direct aus den Entwickelungen des Art. 7 sich ergeben. Der Ausdruck für das Radical ξ dagegen fällt etwas complicirter aus:

$$\xi = 4 \frac{\xi_0 (4 f_0 y^3 - 12 g_0 y^2 + G f_0 y + 2 H f_0 + G g_0) + 2 h_0 \eta}{(2 \xi_0 \eta - f_0' y + g_0')^2}$$

Um endlich das Integral z auf die Normalform zu bringen, hat man

$$y = \frac{\lambda - \lambda_2 \cos^2 \varphi}{\sin^2 \varphi}$$

zu setzen, wodurch

$$z = \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{(\lambda-\lambda_2)\cos^2\varphi + (\lambda-\lambda_1)\sin^2\varphi}} = \frac{1}{\sqrt{\lambda-\lambda_2}}\int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\Delta(\varphi,\varkappa)}$$

nebst

$$\varkappa^2 = \frac{\lambda_1-\lambda_2}{\lambda-\lambda_2} = \frac{a-d\cdot b-c}{a-c\cdot b-d} = \frac{\mathfrak{B}-\mathfrak{D}}{\mathfrak{B}}$$

hervorgeht. Hieraus folgt, dass das jetzige Resultat von dem des vorigen Beispiels nicht wesentlich verschieden ist.

28.

Zum Schlusse dieses Abschnittes möge noch Erwähnung finden, dass in gewissen Fällen die in Bezug auf x und y den zweiten Grad nicht übersteigende Gleichung $f(x,y)=0$ auch einer Differentialgleichung von der Form

$$\frac{dx}{\xi} + \frac{dy}{\eta} = 0$$

Genüge leisten kann, ohne dass ξ und η gleiche Invarianten besitzen. Als Beispiele wählen wir die in den Artikeln 20, 23 und 27 zur Erreichung der Normalform angewandten Substitutionen, ferner die Gauss-Lagrange'sche Substitution für das arithmetisch-geometrische Mittel und die Substitution für den Uebergang zum complementären Modul.

Von den Substitutionen der Artikel 20 und 23 genügt es, die Werthe

$$y = \cos\varphi\ , \quad \Delta\varphi\ , \quad \mathrm{tg}^2\varphi \quad \text{und} \quad -\sin^2\varphi$$

zu betrachten. Die übrigen Fälle können nichts Neues geben, weil nicht allein die Substitutionen $\frac{\cos\varphi}{\Delta\varphi}$ und $\frac{\Delta\varphi}{\cos\varphi}$, wie leicht zu sehen, für $x=\sin\varphi$ die Invarianten ungeändert lassen, sondern auch das Gleiche eintritt, wenn man αy oder $\frac{\alpha}{y}$ an Stelle von y einführt, wo α eine beliebige Constante bedeutet. Sei demnach

$$x^2+y^2 = 1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

so folgt

$$\frac{dx}{\sqrt{E(1-x^2)(1-\varkappa^2x^2)}} = -\frac{dy}{\sqrt{E(1-y^2)(\varkappa'^2+\varkappa^2y^2)}}$$

also neben

$$A = Ex^2\,,\qquad B = 0\,,\qquad C = -\tfrac{1}{6}E(1+x^2)\,,\qquad D = 0$$

$$\mathfrak{A} = -Ex^2\,,\qquad \mathfrak{B} = 0\,,\qquad \mathfrak{C} = \tfrac{1}{6}E(x^2 - x'^2)\,,\qquad \mathfrak{D} = 0\,,\qquad \mathfrak{E} = Ex'^2$$

Die Invarianten der Normalform sind durch die Ausdrücke

$$G = \tfrac{1}{12}E^2(1 + 14x^2 + x^4)\,,\qquad H = \tfrac{1}{216}E^3(1+x^2)(1 - 34x^2 + x^4)$$

gegeben, woraus für die Discriminante der positive Werth

$$G^3 - 27H^2 = \tfrac{1}{16}E^6x^2x'^8$$

entspringt.

Da nun für
$$4\lambda^3 = G\lambda + H\,,\qquad 4\mu^3 = \mathfrak{G}\mu + \mathfrak{H}$$
$$AE = G - 3\lambda^2\,,\qquad C = -\lambda$$

sowie

$$\mathfrak{A}\mathfrak{E} = \mathfrak{G} - 3\mu^2\,,\qquad \mathfrak{C} = -\mu$$

so ergibt sich wegen $2C + \mathfrak{C} = -\frac{1}{2}E$

$$E = 2(2\lambda + \mu)\,,\qquad Ex^2 = 2(\lambda - \mu)\,,\qquad Ex'^2 = 2(\lambda + 2\mu)$$

mithin

$$G - 3\lambda^2 = E^2x^2 = 4(\lambda-\mu)(2\lambda+\mu)\,,$$
$$\mathfrak{G} - 3\mu^2 = -E^2x^2x'^2 = 4(\mu-\lambda)(\lambda+2\mu)$$

oder

$$G = 11\lambda^2 - 4\lambda\mu - 4\mu^2\,,\qquad \mathfrak{G} = 11\mu^2 - 4\lambda\mu - 4\lambda^2$$

Damit folgt

$$H = \lambda(4\mu^2 + 4\lambda\mu - 7\lambda^2)\,,\qquad \mathfrak{H} = \mu(4\lambda^2 + 4\lambda\mu - 7\mu^2)$$

Folglich entsprechen jedem der drei Werthe von λ (welche wegen $G^3 > 27H^2$ reell sein müssen) zwei Werthe von μ, die aus den quadratischen Gleichungen

$$(\lambda + 2\mu)^2 = 12\lambda^2 - G \quad \text{oder} \quad (2\lambda - 11\mu)^2 = 48\lambda^2 + 11\mathfrak{G}$$

gefunden werden. Durch Elimination von μ endlich geht hervor

$$(11G + 4\mathfrak{G})^2 = 45\lambda^2(46G + 24\mathfrak{G} - 165\lambda^2) \quad \text{u. s. w.}$$

$$\varkappa^2 x^2 + y^2 = 1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

$$\frac{dx}{\sqrt{E(1-x^2)(1-\varkappa^2 x^2)}} = -\frac{dy}{\sqrt{E(1-y^2)(y^2-\varkappa'\varkappa')}}$$

d. h. $\mathfrak{A} = -E$, $\mathfrak{C} = \frac{1}{6}E(1+\varkappa'\varkappa')$, $\mathfrak{E} = -E\varkappa'^2$

Hier wird $\mathfrak{C} - C = \frac{1}{2}E$ oder

$$E = 2(\lambda-\mu)\,, \qquad E\varkappa^2 = 2(2\lambda+\mu)\,, \qquad E\varkappa'^2 = -2(\lambda+2\mu)$$

nebst den Invariantenrelationen

$$G - 3\lambda^2 = 4(\lambda-\mu)(2\lambda+\mu)\,, \qquad \mathfrak{G} - 3\mu^2 = E^2\varkappa'^2 = 4(\mu-\lambda)(\lambda+2\mu)$$

Die Vergleichung zeigt, dass diese Werthe mit den entsprechenden des vorigen Beispiels übereinstimmen, also zu den nämlichen weiteren Resultaten führen müssen.

29.

Die Substitutionen des Art. 23 liefern die Beispiele

$$y = x^2(1+y) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

$$\frac{dx}{\sqrt{E(1-x^2)(1-\varkappa^2 x^2)}} = \frac{dy}{2\sqrt{Ey(1+y)(1+\varkappa'\varkappa' y)}}$$

also

$$\mathfrak{A} = 0\,, \quad \mathfrak{B} = E\varkappa'^2\,, \quad \mathfrak{C} = \frac{2}{3}E(1+\varkappa'^2)\,, \quad \mathfrak{D} = E\,, \quad \mathfrak{E} = 0$$

Da jetzt

$$\mathfrak{B}\mathfrak{D} = 3\mu^2 - \frac{1}{4}\mathfrak{G}\,, \qquad \mathfrak{C} = 2\mu$$

zu setzen ist, so erhält man $\mathfrak{C} - 4C = 2E$ oder

$$E = 2\lambda+\mu\,, \qquad E\varkappa^2 = 4\lambda-\mu\,, \qquad E\varkappa'^2 = 2(\mu-\lambda)$$

und damit

$$G - 3\lambda^2 = (2\lambda+\mu)(4\lambda-\mu)\,, \qquad 3\mu^2 - \frac{1}{4}\mathfrak{G} = E^2\varkappa'^2 = 2(\mu-\lambda)(2\lambda+\mu)$$

Hieraus gehen die Ausdrücke hervor

$$G = 11\lambda^2 + 2\lambda\mu - \mu^2\,, \qquad \mathfrak{G} = 4(2\lambda-\mu)^2$$

$$H = \lambda(\mu^2 - 2\lambda\mu - 7\lambda^2)\,, \qquad \mathfrak{H} = 8\lambda\mu(\mu-2\lambda)$$

Diese geben nicht allein die Werthe*)

$$\mathfrak{G} = 4(15\lambda^2 - G)$$

$$\mathfrak{H} = 8\lambda(11\lambda^2 - G) = 8(7\lambda^3 + H)$$

sondern enthalten auch die Relation

$$32\lambda^3 = 2\mathfrak{G}\lambda - \mathfrak{H}$$

welche zeigt, dass die cubische Gleichung

$$4\varpi^3 = \mathfrak{G}\varpi + \mathfrak{H}$$

die drei reellen Wurzeln μ, -2λ und $2\lambda - \mu$ besitzt.

(4) . . . . $x^2 + y = 0$

$$\frac{dx}{\sqrt{E(1-x^2)(1-x^2x^2)}} = -\frac{dy}{2\sqrt{-Ey(1+y)(1+x^2y)}}$$

$\mathfrak{A} = 0$, $\mathfrak{B} = -Ex^2$, $\mathfrak{C} = -\frac{2}{3}E(1+x^2)$, $\mathfrak{D} = -E$, $\mathfrak{E} = 0$

Man bekommt in diesem Falle wegen

$$\mathfrak{C} = 4C \qquad \text{und} \qquad \mathfrak{B}\mathfrak{D} = AE = E^2x^2$$

die Werthe

$$\mu = -2\lambda \qquad \text{und} \qquad G - 3\lambda^2 = 3\mu^2 - \frac{1}{4}\mathfrak{G}$$

mithin

$$\mathfrak{G} = 4(15\lambda^2 - G) \qquad \text{und} \qquad \mathfrak{H} = 8(7\lambda^3 + H)$$

also genau wie im vorigen Beispiele. Nur bilden jetzt μ und -2λ nicht zwei verschiedene, sondern die nämliche Wurzel der Gleichung $4\varpi^3 = \mathfrak{G}\varpi + \mathfrak{H}$.

30.

Zu analogen Resultaten führt die Substitution des Art. 27, welche wir in der Gestalt schreiben

(5) . . . . $x^2y + \frac{1}{3}E(1+x^2)x^2 = E$

*) in Uebereinstimmung mit Felix Müller, *Dissertat. inaugur.* 1867, S. 19, Gl. B) und C).

nebst

$$\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{E(1-x^2)(1-\varkappa^2 x^2)}} = \int_y^\infty \frac{dy}{\sqrt{4y^3 - \mathfrak{G}y - \mathfrak{H}}}$$

Hier ergibt sich zunächst

$$\mathfrak{G} = \frac{4}{3}E^2(1-\varkappa^2+\varkappa^4), \qquad \mathfrak{H} = \frac{4}{27}E^3(1+\varkappa^2)(2-5\varkappa^2+2\varkappa^4)$$

Da nun

$$AE = E^2\varkappa^2 = G - 3\lambda^2, \qquad A + E = E(1+\varkappa^2) = 6\lambda$$

so erhält man sogleich wie im vorigen Artikel

$$\mathfrak{G} = 4(15\lambda^2 - G) \quad \text{und} \quad \mathfrak{H} = 8(7\lambda^3 + H)$$

Will man statt dessen die reciproke Substitution in der Form

$$x^2 y = \lambda y^2 + \mathfrak{E} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

anwenden, wodurch

$$\int_x^\infty \frac{dx}{\sqrt{4x^3 - Gx - H}} = \int_0^y \frac{dy}{\sqrt{\mathfrak{E}(1-y^2)(1-\varkappa^2 y^2)}}$$

hervorgeht, so wird neben λ auch $\lambda + \mathfrak{E}$ eine Wurzel der cubischen Gleichung $4\lambda^3 = G\lambda + H$. Denn die Gleichungen

$$\mathfrak{A}\mathfrak{E} = \mathfrak{E}^2\varkappa^2 = 3\lambda^2 - \frac{1}{4}G, \qquad \mathfrak{A} + \mathfrak{E} = \mathfrak{E}(1+\varkappa^2) = -3\lambda$$

ergeben durch Elimination von $\mathfrak{A}$ oder $\varkappa^2$

$$3\lambda^2 + 3\lambda\mathfrak{E} + \mathfrak{E}^2 = \frac{1}{4}G \quad \text{oder} \quad (\lambda + \mathfrak{E})^3 = \lambda^3 + \frac{1}{4}\mathfrak{E}G$$

mithin

$$4(\lambda + \mathfrak{E})^3 = G(\lambda + \mathfrak{E}) + H$$

Da aber

$$\mathfrak{A}\mathfrak{E} = \mathfrak{G} - 3\mu^2, \qquad \mathfrak{A} + \mathfrak{E} = 6\mu, \qquad 4\mu^3 = \mathfrak{G}\mu + \mathfrak{H}$$

so folgt nicht allein $\lambda = -2\mu$, sondern auch

$$4\mathfrak{G} = 15\lambda^2 - G \quad \text{und damit} \quad 8\mathfrak{H} = 7\lambda^3 + H$$

wie in der That durch Vertauschung von $G\ H\ \lambda$ mit $\mathfrak{G}\ \mathfrak{H}\ \mu$ aus den Formeln der vorhergehenden Substitution erhalten wird.

31.

Die Gauss'sche Substitution in der *Determinatio attractionis* etc.*)

$$\sin\varphi = \frac{2m\sin\varphi_1}{(m+n)\cos^2\varphi_1 + 2m\sin^2\varphi_1}$$

liefert für $x = \sin\varphi$, $y = \sin\varphi_1$, $\varkappa' = \frac{n}{m}$

$$(7) \quad \ldots\ldots\ldots \quad 2y = (1-\varkappa')xy^2 + (1+\varkappa')x$$

nebst

$$\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{E(1-x^2)(1-\varkappa^2x^2)}} = \int_0^y \frac{2dy}{\sqrt{E(1-y^2)((1+\varkappa')^2-(1-\varkappa')^2y^2)}}$$

Man hat hier die Gleichungen

$$AE = E^2\varkappa^2 = G - 3\lambda^2\,, \qquad A + E = E(1+\varkappa^2) = 6\lambda$$

$$\mathfrak{A}\mathfrak{E} = \tfrac{1}{16}E^2\varkappa^4 = \mathfrak{G} - 3\mu^2\,, \qquad \mathfrak{A} + \mathfrak{E} = \tfrac{1}{2}E(1+\varkappa'^2) = 6\mu$$

folglich

$$E = 2(\lambda + 2\mu)\,, \qquad E\varkappa^2 = 4(\lambda-\mu)\,, \qquad E\varkappa'^2 = 2(4\mu-\lambda)$$

$$G - 3\lambda^2 = 8(\lambda-\mu)(\lambda+2\mu)\,, \qquad \mathfrak{G} - 3\mu^2 = (\lambda-\mu)^2$$

oder

$$G = 11\lambda^2 + 8\lambda\mu - 16\mu^2\,, \qquad \mathfrak{G} = \lambda^2 - 2\lambda\mu + 4\mu^2$$

$$H = \lambda(16\mu^2 - 8\lambda\mu - 7\lambda^2)\,, \qquad \mathfrak{H} = \lambda\mu(2\mu - \lambda)$$

Hiermit folgen die Gleichungen

$$4\mathfrak{G} = 15\lambda^2 - G\,, \qquad 8\mathfrak{H} = 7\lambda^2 + H$$

wie am Schlusse des vorhergehenden Artikels, nebst $\lambda^3 = \mathfrak{G}\lambda - 2\mathfrak{H}$. Obgleich für $\lambda = -2\mu$ letztere Gleichung übergeht in $4\mu^3 = \mathfrak{G}\mu + \mathfrak{H}$, so findet doch die erwähnte Relation im jetzigen Falle nicht statt, sondern μ, $-\frac{1}{2}\lambda$ und $\frac{1}{2}\lambda - \mu$ sind die drei (reellen) Wurzeln der Gleichung

$$4\varpi^3 = \mathfrak{G}\varpi + \mathfrak{H}$$

Uebrigens erhält man wie früher

$$\mathfrak{G} = 4(15\lambda^2 - G)\,, \qquad \mathfrak{H} = 8(7\lambda^2 + H)$$

*) *Comment. rec. Gotting.* 1818, *T. IV*, *p.* 44 (Werke, Bd. 3, S. 352).

wenn man das elliptische Differential $\frac{dx}{\xi}$ verdoppelt, wodurch λ mit 4, G mit 4^2 und H mit 4^3 multiplicirt werden.

Die reciproke Substitution geht hervor, wenn man x mit y und $\varkappa'$ mit $\frac{1-\varkappa}{1+\varkappa}$ vertauscht. Dadurch folgt mittelst

$$\varkappa = \frac{m-n}{m+n} = \frac{x-y}{x(xy-1)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

$$\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{E(1-x^2)(1-\varkappa^2x^2)}} = \int_0^y \frac{dy}{\sqrt{E(1-y^2)((1+\varkappa)^2-4\varkappa y^2)}}$$

wo

$$\mathfrak{A}\mathfrak{C} = 4E^2\varkappa(1+\varkappa)^2 = \mathfrak{G} - 3\mu^2 , \qquad \mathfrak{A} + \mathfrak{C} = E(1+6\varkappa+\varkappa^2) = 6\mu$$

Durch Substitution der Werthe von $E^2\varkappa^2$ und $E(1+\varkappa^2)$ erhält man

$$E\varkappa = \mu - \lambda , \qquad E(1+\varkappa^2) = 2(2\lambda+\mu)$$

$$G - 3\lambda^2 = (\mu-\lambda)^2 , \qquad \mathfrak{G} - 3\mu^2 = 8(\mu-\lambda)(2\lambda+\mu)$$

wie oben, wenn λ und μ, G und $\mathfrak{G}$ vertauscht werden. Die Formeln zeigen, dass jedem Werthe von λ zwei Werthe von μ, und umgekehrt, entsprechen. Durch Elimination von μ erhält man jetzt

$$(11G - \mathfrak{G})^2 = 60\lambda^2(26G - \mathfrak{G} - 60\lambda^2)$$

u. s. w.

32.

Die Substitution des complementären Moduls endlich steht wie folgt. Aus

$$x^2y^2 = x^2 + y^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

ergibt sich

$$\int_{\frac{1}{\varkappa}}^x \frac{dx}{\sqrt{E(1-x^2)(1-\varkappa^2x^2)}} = \int_y^{\frac{1}{\varkappa'}} \frac{dy}{\sqrt{E(y^2-1)(1-\varkappa'\varkappa'y^2)}}$$

Hier sind die Gleichungen

$$E^2\varkappa^2 = G - 3\lambda^2 , \qquad E(1+\varkappa^2) = 6\lambda$$

$$E^2\varkappa'^2 = \mathfrak{G} - 3\mu^2 , \qquad E(1+\varkappa'^2) = -6\mu$$

zu combiniren. Man erhält sogleich

$$E = 2(\lambda-\mu) , \qquad E^2(1+\varkappa^2) = 12\lambda(\lambda-\mu) = G - 3\lambda^2 + 4(\lambda-\mu)^2$$

und damit

$$G = 11\lambda^2 - 4\lambda\mu - 4\mu^2\,, \qquad \mathfrak{G} = 11\mu^2 - 4\lambda\mu - 4\lambda^2$$

also das nämliche Resultat wie bei der Substitution (1) des Art. 28.

* * *

Wenn $\varkappa_n$ den zu einer Transformation $n$ter Ordnung gehörigen Modul bedeutet (der nach Jacobi's Bezeichnung von q^n ebenso abhängt, wie $\varkappa$ von q), so hat man bekanntlich die beiden supplementären Transformationen*), welche nach einander angewendet zur Multiplication führen:

$$(10) \quad \ldots \quad \frac{dx}{\sqrt{E(1-x^2)(1-\varkappa^2x^2)}} = \frac{dy}{\sqrt{\mathfrak{E}(1-y^2)(1-\varkappa_n^2y^2)}}$$

je nachdem entweder

$$\mathfrak{E} = n^2E\left(\frac{K_n}{K}\right)^2 = nE\frac{\varkappa\varkappa'\varkappa'}{\varkappa_n\varkappa_n'\varkappa_n'}\frac{d\varkappa_n}{d\varkappa}$$

oder

$$\mathfrak{E} = E\left(\frac{K_n}{K}\right)^2 = \frac{E}{n}\frac{\varkappa\varkappa'\varkappa'}{\varkappa_n\varkappa_n'\varkappa_n'}\frac{d\varkappa_n}{d\varkappa}$$

gesetzt wird. Die Invariantenrelationen sind in den Gleichungen enthalten

$$G - 3\lambda^2 = E^2\varkappa^2\,, \qquad 6\lambda = E(1+\varkappa^2)$$

$$\mathfrak{G} - 3\mu^2 = \mathfrak{E}^2\varkappa_n^2\,, \qquad 6\mu = \mathfrak{E}(1+\varkappa_n^2)$$

welche durch Elimination von E und $\mathfrak{E}$ ohne Schwierigkeit auf die Form gebracht werden

$$(G-3\lambda^2)(1-\varkappa^2)^2 = 4\varkappa^2(12\lambda^2 - G)$$

$$(\mathfrak{G}-3\mu^2)(1-\varkappa_n^2)^2 = 4\varkappa_n^2(12\mu^2 - \mathfrak{G})$$

nebst

$$\frac{1+\varkappa^2}{\varkappa\varkappa'^2}\mu\,d\varkappa = n\frac{1+\varkappa_n^2}{\varkappa_n\varkappa_n'^2}\lambda\,d\varkappa_n$$

Führt man hier die Grösse $h = \frac{2\varkappa}{\varkappa'\varkappa'}$ ein, für welche

$$h = 8\sqrt{q}(1+q\cdot 1+q^2\cdot 1+q^3\ldots)^{12}\,, \qquad \frac{dh}{h} = \frac{dq}{2q}(\vartheta_2^4(q) + \vartheta_3^4(q))$$

---

*) Jacobi, *Fundamenta*, Art. 26 und 32.

(also $h = \operatorname{tg}\varphi$, wenn $\varkappa = \operatorname{tg}\frac{1}{2}\varphi$), so nehmen obige Gleichungen die einfache Gestalt an

$$h = \sqrt{\frac{G - 3\lambda^2}{12\lambda^2 - G}} \qquad \text{oder} \qquad G = 3\lambda^2 \frac{1 + 4h^2}{1 + h^2} \qquad \text{nebst} \qquad \mathfrak{G} = 3\mu^2 \frac{1 + 4h_n^2}{1 + h_n^2}$$

wo h und h_n durch die Formel

$$\mu \frac{dh}{h} = n\lambda \frac{dh_n}{h_n}$$

in Verbindung mit der Modulargleichung zwischen $\varkappa$ und $\varkappa_n$, oder h und h_n, zu bestimmen sind*).

---

*) Für $n = 3$ wird letztere

$$(h^2 + h_3^2 - 18hh_3)^2 = 64hh_3(1 + hh_3)^2$$

oder

$$h - h_3 = \sqrt[4]{64hh_3}(1 + \sqrt{hh_3})$$

ganz analog der gewöhnlichen Form

$$\varkappa - \varkappa_3 = \sqrt[4]{16\varkappa\varkappa_3}(1 - \sqrt{\varkappa\varkappa_3})$$

JACOBI hat bewiesen (*Fundamenta*, Art. 33), dass der Differentialausdruck

$$\Omega = 2\frac{\varkappa'''}{\varkappa'} - 3\left(\frac{\varkappa''}{\varkappa'}\right)^2 + \left(\frac{1 + \varkappa^2}{1 - \varkappa^2} \cdot \frac{\varkappa'}{\varkappa}\right)^2$$

wo die Accente Differentialquotienten nach irgend einer unabhängigen Variabeln bedeuten, durch die Transformation $n$ter Ordnung (mit anderen Worten durch den Uebergang von $\varkappa$ zu $\varkappa_n$) ungeändert bleibt. Bei Einführung von h an Stelle von $\varkappa$ erhält man nicht minder einfach

$$\Omega = 2\frac{h'''}{h'} - 3\left(\frac{h''}{h'}\right)^2 + \frac{1 - h^2 + h^4}{(1 + h^2)^2}\left(\frac{h'}{h}\right)^2$$

* * *

Nachtrag zu Art. 16. Eine elegante Construction der allgemeinen Gleichung $\int_{\varphi_0}^{\varphi} = \int_{\psi_0}^{\psi} \frac{d\varphi}{\Delta\varphi}$ ergibt sich auf folgendem Wege. Man bediene sich zweier sphärischen Dreiecke mit gemeinschaftlicher Seite s und gemeinschaftlichem Modul $\varkappa = \frac{\sin s}{\sin\sigma}$. Dann sind $\varphi\ \psi_0\ \sigma$ die Winkel des einen, $\varphi_0\ \psi\ \sigma$ die Winkel des anderen Dreieckes.

Zweiter Abschnitt.

Die Reduction der elliptischen Integrale auf die Thetafunctionen Jacobi's.

33.

In der Theorie der Thetafunctionen werden die Gleichungen bewiesen

$$\vartheta(u,q) = 1 - 2q\cos 2u + 2q^4\cos 4u - 2q^9\cos 6u \pm \dots$$

$$= \chi_1(q)\prod_{p=1}^{\infty}(1 - 2q^{2p-1}\cos 2u + q^{4p-2})$$

$$\vartheta_1(u,q) = 2q^{\frac{1}{4}}\sin u - 2q^{\frac{9}{4}}\sin 3u + 2q^{\frac{25}{4}}\sin 5u \mp \dots$$

$$= 2\chi_1(q)\, q^{\frac{1}{4}}\sin u \prod_{1}^{\infty}(1 - 2q^{2p}\cos 2u + q^{4p})$$

$$\vartheta_2(u,q) = 2q^{\frac{1}{4}}\cos u + 2q^{\frac{9}{4}}\cos 3u + 2q^{\frac{25}{4}}\cos 5u + \dots$$

$$= 2\chi_1(q)\, q^{\frac{1}{4}}\cos u \prod_{1}^{\infty}(1 + 2q^{2p}\cos 2u + q^{4p})$$

$$\vartheta_3(u,q) = 1 + 2q\cos 2u + 2q^4\cos 4u + 2q^9\cos 6u + \dots$$

$$= \chi_1(q)\prod_{1}^{\infty}(1 + 2q^{2p-1}\cos 2u + q^{4p-2})$$

wo

$$\chi_1(q) = \prod_{1}^{\infty}(1 - q^{2p}) = \sum_{-\infty}^{\infty}(-1)^n q^{n(3n+1)}$$

Schreibt man analog zur Abkürzung

$$\chi(q) = \prod(1 - q^{2p-1}), \quad \chi_2(q) = \prod(1 + q^{2p}), \quad \chi_3(q) = \prod(1 + q^{2p-1})$$

so erhält man

$$\vartheta = \vartheta(0,q) = \sum_{-\infty}^{\infty}{}'(-1)^n q^{nn} = \chi_1 \chi^2$$

$$\vartheta_1' = \frac{d}{du}\vartheta_1(0,q) = 2q^{\frac{1}{4}} \sum (4n+1) q^{2n(2n+1)} = 2q^{\frac{1}{4}} \chi_1^3$$

$$\vartheta_2 = \vartheta_2(0,q) = 2q^{\frac{1}{4}} \sum q^{2n(2n+1)} = 2q^{\frac{1}{4}} \chi_1 \chi_2^2$$

$$\vartheta_3 = \vartheta_3(0,q) = \sum q^{nn} = \chi_1 \chi_3^2.$$

nebst

$$\vartheta_1' = \vartheta \vartheta_2 \vartheta_3 \qquad \text{oder} \qquad \chi\chi_2\chi_3 = 1$$

Hiezu treten die Relationen

$$\vartheta_2^2 \vartheta^2 u = \vartheta_3^2 \vartheta_1^2 u + \vartheta^2 \vartheta_2^2 u\,, \qquad \vartheta_2^2 \vartheta_3^2 u = \vartheta^2 \vartheta_1^2 u + \vartheta_3^2 \vartheta_2^2 u$$

$$\vartheta_3^2 \vartheta^2 u = \vartheta_2^2 \vartheta_1^2 u + \vartheta^2 \vartheta_3^2 u\,, \qquad \vartheta_3^2 \vartheta_3^2 u = \vartheta^2 \vartheta^2 u + \vartheta_2^2 \vartheta_2^2 u$$

nebst

$$\vartheta_3^4 = \vartheta^4 + \vartheta_2^4$$

Ferner gelten die Differentialformeln

$$\frac{d}{du}\frac{\vartheta_1 u}{\vartheta u} = \vartheta^2 \frac{\vartheta_2 u \vartheta_3 u}{\vartheta^2 u}\,, \qquad \frac{d}{du}\frac{\vartheta u}{\vartheta_1 u} = -\vartheta^2 \frac{\vartheta_2 u \vartheta_3 u}{\vartheta_1^2 u}$$

$$\frac{d}{du}\frac{\vartheta_3 u}{\vartheta_2 u} = \vartheta^2 \frac{\vartheta u \vartheta_1 u}{\vartheta_2^2 u}\,, \qquad \frac{d}{du}\frac{\vartheta_2 u}{\vartheta_3 u} = -\vartheta^2 \frac{\vartheta u \vartheta_1 u}{\vartheta_3^2 u}$$

$$\frac{d}{du}\frac{\vartheta u}{\vartheta_3 u} = \vartheta_2^2 \frac{\vartheta_1 u \vartheta_2 u}{\vartheta_3^2 u}\,, \qquad \frac{d}{du}\frac{\vartheta_3 u}{\vartheta u} = -\vartheta_2^2 \frac{\vartheta_1 u \vartheta_2 u}{\vartheta^2 u}$$

$$\frac{d}{du}\frac{\vartheta_1 u}{\vartheta_2 u} = \vartheta_2^2 \frac{\vartheta u \vartheta_3 u}{\vartheta_2^2 u}\,, \qquad \frac{d}{du}\frac{\vartheta_2 u}{\vartheta_1 u} = -\vartheta_2^2 \frac{\vartheta u \vartheta_3 u}{\vartheta_1^2 u}$$

$$\frac{d}{du}\frac{\vartheta u}{\vartheta_2 u} = \vartheta_3^2 \frac{\vartheta_1 u \vartheta_3 u}{\vartheta_2^2 u}\,, \qquad \frac{d}{du}\frac{\vartheta_2 u}{\vartheta u} = -\vartheta_3^2 \frac{\vartheta_1 u \vartheta_3 u}{\vartheta^2 u}$$

$$\frac{d}{du}\frac{\vartheta_1 u}{\vartheta_3 u} = \vartheta_3^2 \frac{\vartheta u \vartheta_2 u}{\vartheta_3^2 u}\,, \qquad \frac{d}{du}\frac{\vartheta_3 u}{\vartheta_1 u} = -\vartheta_3^2 \frac{\vartheta u \vartheta_2 u}{\vartheta_1^2 u}$$

Setzt man daher mit JACOBI

$$\varkappa = \frac{\vartheta_2^2}{\vartheta_3^2}\,, \qquad \varkappa' = \frac{\vartheta^2}{\vartheta_3^2}\,, \qquad \varkappa^2 + \varkappa'^2 = 1$$

$$u = \frac{1}{\vartheta_3^2}\int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\Delta(\varphi, \varkappa)}\,, \qquad \varphi = \operatorname{am}(u\vartheta_3^2, \varkappa)$$

so wird für

$$y = \sin\varphi = \frac{\vartheta_3\vartheta_1 u}{\vartheta_2\vartheta u}, \qquad u = \int_0^y \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}\sqrt{\vartheta_3^4-\vartheta_2^4 y^2}}$$

$$y = \varkappa\sin\varphi = \frac{\vartheta_2\vartheta_1 u}{\vartheta_3\vartheta u}, \qquad u = \int_0^y \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}\sqrt{\vartheta_2^4-\vartheta_3^4 y^2}}$$

$$y = \operatorname{tg}\varphi = \frac{\vartheta_3\vartheta_1 u}{\vartheta\vartheta_2 u}, \qquad u = \int_0^y \frac{dy}{\sqrt{1+y^2}\sqrt{\vartheta_3^4+\vartheta^4 y^2}}$$

$$y = \varkappa'\operatorname{tg}\varphi = \frac{\vartheta\vartheta_1 u}{\vartheta_3\vartheta_2 u}, \qquad u = \int_0^y \frac{dy}{\sqrt{1+y^2}\sqrt{\vartheta^4+\vartheta_3^4 y^2}}$$

$$y = \frac{\varkappa\sin\varphi}{\varDelta\varphi} = \frac{\vartheta_2\vartheta_1 u}{\vartheta\vartheta_3 u}, \qquad u = \int_0^y \frac{dy}{\sqrt{1+y^2}\sqrt{\vartheta_2^4-\vartheta^4 y^2}}$$

$$y = \frac{\varkappa'\sin\varphi}{\varDelta\varphi} = \frac{\vartheta\vartheta_1 u}{\vartheta_2\vartheta_3 u}, \qquad u = \int_0^y \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}\sqrt{\vartheta^4+\vartheta_2^4 y^2}}$$

$$y = \frac{1}{\sin\varphi} = \frac{\vartheta_2\vartheta u}{\vartheta_3\vartheta_1 u}, \qquad u = \int_y^\infty \frac{dy}{\sqrt{y^2-1}\sqrt{\vartheta_3^4 y^2-\vartheta_2^4}}$$

$$y = \frac{1}{\varkappa\sin\varphi} = \frac{\vartheta_3\vartheta u}{\vartheta_2\vartheta_1 u}, \qquad u = \int_y^\infty \frac{dy}{\sqrt{y^2-1}\sqrt{\vartheta_2^4 y^2-\vartheta_3^4}}$$

$$y = \frac{1}{\operatorname{tg}\varphi} = \frac{\vartheta\vartheta_2 u}{\vartheta_3\vartheta_1 u}, \qquad u = \int_y^\infty \frac{dy}{\sqrt{y^2+1}\sqrt{\vartheta_3^4 y^2+\vartheta^4}}$$

$$y = \frac{1}{\varkappa'\operatorname{tg}\varphi} = \frac{\vartheta_3\vartheta_2 u}{\vartheta\vartheta_1 u}. \qquad u = \int_y^\infty \frac{dy}{\sqrt{y^2+1}\sqrt{\vartheta^4 y^2+\vartheta_3^4}}$$

$$y = \frac{\varDelta\varphi}{\varkappa\sin\varphi} = \frac{\vartheta\vartheta_3 u}{\vartheta_2\vartheta_1 u}, \qquad u = \int_y^\infty \frac{dy}{\sqrt{y^2+1}\sqrt{\vartheta_2^4 y^2-\vartheta^4}}$$

$$y = \frac{\varDelta\varphi}{\varkappa'\sin\varphi} = \frac{\vartheta_2\vartheta_3 u}{\vartheta\vartheta_1 u}, \qquad u = \int_y^\infty \frac{dy}{\sqrt{y^2-1}\sqrt{\vartheta^4 y^2+\vartheta_2^4}}$$

$$y = \cos\varphi = \frac{\vartheta\vartheta_2 u}{\vartheta_2\vartheta u}, \qquad u = \int_y^1 \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}\sqrt{\vartheta^4+\vartheta_2^4 y^2}}$$

$$y = \varDelta\varphi = \frac{\vartheta\vartheta_3 u}{\vartheta_3\vartheta u}, \qquad u = \int_y^1 \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}\sqrt{\vartheta_3^4 y^2-\vartheta^4}}$$

$$y = \frac{\cos\varphi}{\varDelta\varphi} = \frac{\vartheta_3\vartheta_2 u}{\vartheta_2\vartheta_3 u}, \qquad u = \int_y^1 \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}\sqrt{\vartheta_3^4-\vartheta_2^4 y^2}}$$

$$y = \frac{1}{\cos\varphi} = \frac{\vartheta_2\vartheta u}{\vartheta\vartheta_2 u}, \qquad u = \int_1^y \frac{dy}{\sqrt{y^2-1}\sqrt{\vartheta^4 y^2+\vartheta_2^4}}$$

$$y = \frac{1}{\varDelta\varphi} = \frac{\vartheta_3\vartheta u}{\vartheta\vartheta_3 u}, \qquad u = \int_1^y \frac{dy}{\sqrt{y^2-1}\sqrt{\vartheta_3^4-\vartheta^4 y^2}}$$

$$y = \frac{\varDelta\varphi}{\cos\varphi} = \frac{\vartheta_2\vartheta_3 u}{\vartheta_3\vartheta_2 u}, \qquad u = \int_1^y \frac{dy}{\sqrt{y^2-1}\sqrt{\vartheta_3^4 y^2-\vartheta_2^4}}$$

$$y = \frac{\varkappa \cos\varphi}{\varkappa'} = \frac{\vartheta_2 \vartheta_2 u}{\vartheta \vartheta u}, \qquad u = \int_y^{\frac{\varkappa}{\varkappa'}} \frac{dy}{\sqrt{1+y^2}\sqrt{\vartheta_2^4 - \vartheta^4 y^2}}$$

$$y = \frac{\varkappa'}{\varkappa \cos\varphi} = \frac{\vartheta \vartheta u}{\vartheta_2 \vartheta_2 u}, \qquad u = \int_{\frac{\varkappa'}{\varkappa}}^{y} \frac{dy}{\sqrt{y^2+1}\sqrt{\vartheta_2^4 y^2 - \vartheta^4}}$$

$$y = \frac{\varDelta\varphi}{\varkappa'} = \frac{\vartheta_3 \vartheta_3 u}{\vartheta \vartheta u}, \qquad u = \int_y^{\frac{1}{\varkappa'}} \frac{dy}{\sqrt{y^2-1}\sqrt{\vartheta_3^4 - \vartheta^4 y^2}}$$

$$y = \frac{\varkappa'}{\varDelta\varphi} = \frac{\vartheta \vartheta u}{\vartheta_3 \vartheta_3 u}, \qquad u = \int_{\varkappa'}^{y} \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}\sqrt{\vartheta_3^4 y^2 - \vartheta^4}}$$

$$y = \frac{\varkappa \cos\varphi}{\varDelta\varphi} = \frac{\vartheta_2 \vartheta_2 u}{\vartheta_3 \vartheta_3 u}, \qquad u = \int_y^{\varkappa} \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}\sqrt{\vartheta_2^4 - \vartheta_3^4 y^2}}$$

$$y = \frac{\varDelta\varphi}{\varkappa \cos\varphi} = \frac{\vartheta_3 \vartheta_3 u}{\vartheta_2 \vartheta_2 u}, \qquad u = \int_{\frac{1}{\varkappa}}^{y} \frac{dy}{\sqrt{y^2-1}\sqrt{\vartheta_2^4 y^2 - \vartheta_3^4}}$$

Da die beiden Winkel u und φ gleichzeitig den ersten Quadranten durchlaufen, so hat man nach JACOBI's Bezeichnung für das ganze elliptische Integral der ersten Gattung

$$\mathrm{K} = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{d\varphi}{\varDelta(\varphi, \varkappa)} = \frac{\pi}{2}\vartheta_3^2 \qquad \text{oder} \qquad \vartheta_3^2 = \frac{2\mathrm{K}}{\pi}$$

mithin auch

$$\varphi = \operatorname{am}\frac{2\mathrm{K}u}{\pi}, \qquad \vartheta^2 = \frac{2\mathrm{K}\varkappa'}{\pi}, \qquad \vartheta_2^2 = \frac{2\mathrm{K}\varkappa}{\pi}, \qquad \vartheta_1' = \frac{2\mathrm{K}}{\pi}\sqrt{\frac{2\mathrm{K}\varkappa\varkappa'}{\pi}}$$

neben

$$\frac{\vartheta_1 u}{\vartheta u} = \sqrt{\varkappa}\sin\varphi, \qquad \frac{\vartheta_2 u}{\vartheta u} = \sqrt{\frac{\varkappa}{\varkappa'}}\cos\varphi, \qquad \frac{\vartheta_3 u}{\vartheta u} = \frac{1}{\sqrt{\varkappa'}}\varDelta\varphi, \qquad \frac{\vartheta_1 u}{\vartheta_2 u} = \sqrt{\varkappa'}\operatorname{tg}\varphi$$

34.

Die Producte zweier Thetafunctionen, welche durch die Differentialformeln des vorigen Artikels ausgedrückt worden sind, lassen sich durch directe Multiplication der unendlichen Producte weiter reduciren. Man erhält ohne Mühe

$$\frac{\vartheta_2 u\, \vartheta_3 u}{\vartheta_2 \vartheta_3} = \cos u \prod_{p=1}^{\infty} \frac{1 + 2q^p \cos 2u + q^{2p}}{(1+q^p)^2} = \frac{\vartheta_2(u, q^{\frac{1}{2}})}{\vartheta_2(q^{\frac{1}{2}})}$$

$$\frac{\vartheta u\, \vartheta_1 u}{\vartheta_2 \vartheta_3} = \sin u \prod \frac{1 - 2q^p \cos 2u + q^{2p}}{(1+q^p)^2} = \frac{\vartheta_1(u, q^{\frac{1}{2}})}{\vartheta_2(q^{\frac{1}{2}})}$$

$$\frac{\vartheta u\,\vartheta_3 u}{\vartheta\vartheta_3} = \prod \frac{1-2q^{4p-2}\cos 4u + q^{8p-4}}{(1-q^{4p-2})^2} = \frac{\vartheta(2u,q^2)}{\vartheta(q^2)}$$

$$\frac{\vartheta_1 u\,\vartheta_2 u}{\vartheta\vartheta_3} = 2q^{\frac{1}{2}}\sin 2u \prod \frac{1-2q^{4p}\cos 4u + q^{8p}}{(1-q^{4p-2})^2} = \frac{\vartheta_1(2u,q^2)}{\vartheta(q^2)}$$

$$\frac{\vartheta u\,\vartheta_2 u}{\vartheta\vartheta_2} = \cos u \prod \frac{1+2(-q)^p\cos 2u + q^{2p}}{(1+(-q)^p)^2} = \frac{\vartheta_2(u,iq^{\frac{1}{2}})}{\vartheta_2(iq^{\frac{1}{2}})}$$

$$\frac{\vartheta_1 u\,\vartheta_3 u}{\vartheta\vartheta_2} = \sin u \prod \frac{1-2(-q)^p\cos 2u + q^{2p}}{(1+(-q)^p)^2} = \frac{\vartheta_1(u,iq^{\frac{1}{2}})}{\vartheta_2(iq^{\frac{1}{2}})}$$

oder mittelst einer leichten Buchstabenveränderung

$$\frac{\vartheta_2 u}{\vartheta_2} = \frac{\vartheta_2(u,q^2)\,\vartheta_3(u,q^2)}{\vartheta_2(q^2)\,\vartheta_3(q^2)}\,, \qquad \frac{\vartheta_1 u}{\vartheta_2} = \frac{\vartheta(u,q^2)\,\vartheta_1(u,q^2)}{\vartheta_2(q^2)\,\vartheta_3(q^2)}$$

$$\frac{\vartheta u}{\vartheta} = \frac{\vartheta(\frac{1}{2}u,q^{\frac{1}{2}})\,\vartheta_3(\frac{1}{2}u,q^{\frac{1}{2}})}{\vartheta(q^{\frac{1}{2}})\,\vartheta_3(q^{\frac{1}{2}})}\,, \qquad \frac{\vartheta_1 u}{\vartheta} = \frac{\vartheta_1(\frac{1}{2}u,q^{\frac{1}{2}})\,\vartheta_2(\frac{1}{2}u,q^{\frac{1}{2}})}{\vartheta(q^{\frac{1}{2}})\,\vartheta_3(q^{\frac{1}{2}})}$$

$$\frac{\vartheta_2 u}{\vartheta_2} = \frac{\vartheta(u,-q^2)\,\vartheta_2(u,-q^2)}{\vartheta(-q^2)\,\vartheta_2(-q^2)}\,, \qquad \frac{\vartheta_1 u}{\vartheta_2} = \frac{\vartheta_1(u,-q^2)\,\vartheta_3(u,-q^2)}{\vartheta(-q^2)\,\vartheta_2(-q^2)}\,.$$

Lässt man hier u unendlich abnehmen, so gehen die Gleichungen hervor

$$\frac{\vartheta_1'\vartheta}{\vartheta_2\vartheta_3} = \frac{\vartheta_1'(q^{\frac{1}{2}})}{\vartheta_2(q^{\frac{1}{2}})}\,, \qquad \frac{\vartheta_1'\vartheta_2}{\vartheta\vartheta_3} = 2\,\frac{\vartheta_1'(q^2)}{\vartheta(q^2)}\,, \qquad \frac{\vartheta_1'\vartheta_3}{\vartheta\vartheta_2} = \frac{\vartheta_1(iq^{\frac{1}{2}})}{\vartheta_2(iq^{\frac{1}{2}})}$$

oder

$$\vartheta^2 = \vartheta(q^{\frac{1}{2}})\,\vartheta_3(q^{\frac{1}{2}})\,, \qquad \vartheta_2^2 = 2\,\vartheta_2(q^2)\,\vartheta_3(q^2)\,, \qquad \vartheta_3^2 = \vartheta(iq^{\frac{1}{2}})\,\vartheta_3(iq^{\frac{1}{2}})$$

nebst

$$\vartheta\vartheta_3 = \vartheta^2(q^2)\,, \qquad 2\vartheta_2\vartheta_3 = \vartheta_2^2(q^{\frac{1}{2}})\,, \qquad \vartheta\vartheta_3 = \vartheta_3^2(-q^2)$$

Bezeichnet man durch $\lambda\ \mu\ \nu\ \varrho$ die Werthe, in welche sich $\varkappa$ durch den Uebergang von q resp. in $q^{\frac{1}{2}}$, q^2, $iq^{\frac{1}{2}}$ und $-q^2$ verwandelt, während gleichzeitig K in Λ M N P übergeht, so ergeben sich damit die Relationen

$$K\varkappa' = \Lambda\sqrt{\lambda'}\,, \qquad K\varkappa = 2M\sqrt{\mu}\,, \qquad K = N\sqrt{\nu'}$$

$$K\sqrt{\varkappa'} = M\mu'\,, \qquad 2K\sqrt{\varkappa} = \Lambda\lambda\,, \qquad K\sqrt{\varkappa'} = P$$

aus denen für λ und μ die Werthe folgen

$$\lambda = \frac{2\sqrt{\varkappa}}{1+\varkappa}, \qquad \lambda' = \frac{1-\varkappa}{1+\varkappa}, \qquad \varkappa = \frac{1-\lambda'}{1+\lambda'}, \qquad \varkappa' = \frac{2\sqrt{\lambda'}}{1+\lambda'}$$

$$\mu = \frac{1-\varkappa'}{1+\varkappa'}, \qquad \mu' = \frac{2\sqrt{\varkappa'}}{1+\varkappa'}, \qquad \varkappa = \frac{2\sqrt{\mu}}{1+\mu}, \qquad \varkappa' = \frac{1-\mu}{1+\mu}$$

ferner

$$1+\varkappa = \frac{\varkappa'}{\sqrt{\lambda'}} = \frac{2\sqrt{\varkappa}}{\lambda} = \frac{2}{1+\lambda'}, \qquad 1+\varkappa' = \frac{\varkappa}{\sqrt{\mu}} = \frac{2\sqrt{\varkappa'}}{\mu'} = \frac{2}{1+\mu}$$

$$1-\varkappa = \varkappa'\sqrt{\lambda'}, \qquad 1-\lambda' = \lambda\sqrt{\varkappa}, \qquad 1-\varkappa' = \varkappa\sqrt{\mu}, \qquad 1-\mu = \mu'\sqrt{\varkappa'}$$

$$(1+\lambda')\Delta(\varphi,\varkappa) = \sqrt{(1+\lambda')^2\cos^2\varphi + 4\lambda'\sin^2\varphi}$$

$$(1+\mu)\Delta(\varphi,\varkappa) = \sqrt{1+2\mu\cos 2\varphi+\mu^2}$$

Für ν und ϱ erhält man die Gleichungen

$$\sqrt{\nu'} = \frac{\vartheta(iq^{\frac{1}{2}})}{\vartheta_3(iq^{\frac{1}{2}})} = \frac{\vartheta_3(q^2) - i\vartheta_2(q^2)}{\vartheta_3(q^2)+i\vartheta_2(q^2)} = \frac{1-i\sqrt{\mu}}{1+i\sqrt{\mu}} = \varkappa' - \varkappa i$$

oder $\qquad \varkappa = \sin\varepsilon, \qquad \nu' = e^{-2\varepsilon i}$

$$\sqrt{\varrho'} = \frac{\vartheta(-q^2)}{\vartheta_3(-q^2)} = \frac{\vartheta_3(q^2)}{\vartheta(q^2)} = \frac{1}{\sqrt{\mu'}} \qquad \text{oder} \qquad \varrho' = \frac{1+\varkappa'}{2\sqrt{\varkappa'}}, \qquad \varrho = \frac{1-\varkappa'}{2\sqrt{\varkappa'}}\,i$$

Die obigen Formeln zeigen, dass nicht allein μ ebenso von $\varkappa$ abhängt, wie $\varkappa$ von λ, sondern dass auch durch Vertauschung von $\varkappa$ und $\varkappa'$, λ und μ' so wie μ und λ' in einander übergehen. Wenn K' Λ' M' den complementären Moduln $\varkappa'$ λ' μ' entsprechen, so folgen daraus die Gleichungen

$$K'\varkappa = M'\sqrt{\mu}, \qquad K'\varkappa' = 2\Lambda'\sqrt{\lambda'}, \qquad K'\sqrt{\varkappa} = \Lambda'\lambda, \qquad 2K'\sqrt{\varkappa'} = M'_{,}\mu'$$

Da sich bei einem fortgesetzten Uebergange von q in q^2 die entsprechenden Moduln $\varkappa\ \mu\ \mu_1\ \mu_2 \ldots$ resp. $\varkappa'\ \lambda'\ \lambda'_1\ \lambda'_2 \ldots$ der Null, dagegen die Moduln $\varkappa'\ \mu'\ \mu'_1\ \mu'_2 \ldots$ resp. $\varkappa\ \lambda\ \lambda_1\ \lambda_2 \ldots$ der Einheit nähern, so haben die Werthe K M M_1 $M_2 \ldots$ so wie K' Λ' Λ'_1 $\Lambda'_2 \ldots$ das Integral $\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{d\varphi}{\Delta(\varphi\, 0)} = \frac{\pi}{2}$ zur Grenze, während Λ_p und M'_p mit

$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{d\varphi}{\cos\varphi}$ über alle Grenzen wachsen. Man leitet damit die Ausdrücke ab

$$\frac{2K}{\pi} = \frac{\mu'\mu_1'\mu_2'\mu_3'\ldots}{\sqrt{\varkappa'}\sqrt{\mu'}\sqrt{\mu_1'}\sqrt{\mu_2'}\ldots} = \sqrt{\frac{\mu'\mu_1'\mu_2'\mu_3'\ldots}{\varkappa'}}$$

$$\frac{2K'}{\pi} = \frac{\lambda\lambda_1\lambda_2\lambda_3\ldots}{\sqrt{\varkappa}\sqrt{\lambda}\sqrt{\lambda_1}\sqrt{\lambda_2}\ldots} = \sqrt{\frac{\lambda\lambda_1\lambda_2\lambda_3\ldots}{\varkappa}}$$

$$\frac{K'}{K} = \sqrt{\frac{\varkappa'\lambda\lambda_1\lambda_2\lambda_3\ldots}{\varkappa\mu'\mu_1'\mu_2'\mu_3'\ldots}}$$

35.

Wir wollen jetzt durch $\chi\ \chi'\ \psi\ \psi'\ \omega\ \omega'$ die Werthe der Amplituden bezeichnen, welche resp. den Argumenten (u, q^2), $(u, q^{\frac{1}{2}})$, $(2u, q^2)$, $(\frac{1}{2}u, q^{\frac{1}{2}})$, $(u, -q^2)$ und $(u, iq^{\frac{1}{2}})$ entsprechen. Dann geht die Gleichung

$$\frac{2Ku}{\pi} = \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\Delta(\varphi\varkappa)}$$

durch die nämlichen Verwandlungen über resp. in

$$\frac{2Mu}{\pi} = \int_0^{\chi} \frac{d\varphi}{\Delta(\varphi\mu)}, \qquad \frac{2\Lambda u}{\pi} = \int_0^{\chi'} \frac{d\varphi}{\Delta(\varphi\lambda)}$$

$$\frac{4Mu}{\pi} = \int_0^{\psi} \frac{d\varphi}{\Delta(\varphi\mu)}, \qquad \frac{\Lambda u}{\pi} = \int_0^{\psi'} \frac{d\varphi}{\Delta(\varphi\lambda)}$$

$$\frac{2Pu}{\pi} = \int_0^{\omega} \frac{d\varphi}{\Delta(\varphi\varrho)}, \qquad \frac{2Nu}{\pi} = \int_0^{\omega'} \frac{d\varphi}{\Delta(\varphi\nu)}$$

Aus den oben zwischen den Thetafunctionen aufgestellten Formeln leitet man durch Division die Ausdrücke ab

$$\frac{\vartheta_1 u\,\vartheta u}{\vartheta_2 u\,\vartheta_3 u} = \frac{\vartheta_1(u, q^{\frac{1}{2}})}{\vartheta_2(u, q^{\frac{1}{2}})}, \qquad \frac{\vartheta_1 u}{\vartheta_2 u} = \frac{\vartheta_1(u, q^2)\,\vartheta(u, q^2)}{\vartheta_2(u, q^2)\,\vartheta_3(u, q^2)}$$

$$\frac{\vartheta_1 u\,\vartheta_2 u}{\vartheta u\,\vartheta_3 u} = \frac{\vartheta_1(2u, q^2)}{\vartheta(2u, q^2)}, \qquad \frac{\vartheta_1 u}{\vartheta u} = \frac{\vartheta_1(\frac{1}{2}u, q^{\frac{1}{2}})\,\vartheta_2(\frac{1}{2}u, q^{\frac{1}{2}})}{\vartheta(\frac{1}{2}u, q^{\frac{1}{2}})\,\vartheta_3(\frac{1}{2}u, q^{\frac{1}{2}})}$$

$$\frac{\vartheta_1 u\,\vartheta_3 u}{\vartheta u\,\vartheta_2 u} = \frac{\vartheta_1(u, iq^{\frac{1}{2}})}{\vartheta_2(u, iq^{\frac{1}{2}})}, \qquad \frac{\vartheta_1 u}{\vartheta_2 u} = \frac{\vartheta_1(u, -q^2)\,\vartheta_3(u, -q^2)}{\vartheta(u, -q^2)\,\vartheta_2(u, -q^2)}$$

welche nach Einführung der Amplituden $\varphi\ \chi\ \chi'\ \psi\ \psi'\ \omega\ \omega'$ die einander correspondirenden Gleichungen liefern

$$\frac{\varkappa'\operatorname{tg}\varphi}{\Delta(\varphi\varkappa)} = \sqrt{\lambda'}\operatorname{tg}\chi' \,, \qquad \sqrt{\varkappa'}\operatorname{tg}\varphi = \frac{\mu'\operatorname{tg}\chi}{\Delta(\chi\mu)}$$

$$\frac{\varkappa\sin\varphi\cos\varphi}{\Delta(\varphi\varkappa)} = \sqrt{\mu}\sin\psi \,, \qquad \sqrt{\varkappa}\sin\varphi = \frac{\lambda\sin\psi'\cos\psi'}{\Delta(\psi'\lambda)}$$

$$\operatorname{tg}\varphi\Delta(\varphi\varkappa) = \sqrt{\nu'}\operatorname{tg}\omega' \,, \qquad \sqrt{\varkappa'}\operatorname{tg}\varphi = \operatorname{tg}\omega\Delta(\omega\varrho)$$

Mit Berücksichtigung der für Λ M N P und $\lambda\ \mu\ \nu\ \varrho$ gefundenen Relationen entspringen daraus die Transformationsformeln

$$\int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\Delta(\varphi\varkappa)} = \frac{2}{1+\varkappa'}\int_0^\chi \frac{d\chi}{\Delta(\chi\mu)} \,, \qquad \frac{1+\varkappa'}{2}\operatorname{tg}\varphi = \frac{\operatorname{tg}\chi}{\Delta(\chi\mu)} \quad \ldots\ldots \quad \mathrm{I^a}$$

$$= \frac{1}{1+\varkappa}\int_0^{\chi'} \frac{d\chi}{\Delta(\chi\lambda)} \,, \qquad \operatorname{tg}\chi' = \frac{(1+\varkappa)\operatorname{tg}\varphi}{\Delta(\varphi\varkappa)} \quad \ldots \quad \mathrm{I^b}$$

$$= \frac{1}{1+\varkappa'}\int_0^{\psi} \frac{d\psi}{\Delta(\psi\mu)} \,, \qquad \sin\psi = \frac{(1+\varkappa')\sin\varphi\cos\varphi}{\Delta(\varphi\varkappa)} \quad \mathrm{II^a}$$

$$= \frac{2}{1+\varkappa}\int_0^{\psi'} \frac{d\psi}{\Delta(\psi\lambda)} \,, \qquad \frac{1+\varkappa}{2}\sin\varphi = \frac{\sin\psi'\cos\psi'}{\Delta(\psi'\lambda)} \quad \ldots \quad \mathrm{II^b}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\varkappa'}}\int_0^{\omega} \frac{d\omega}{\Delta(\omega\varrho)} \,, \qquad \sqrt{\varkappa'}\operatorname{tg}\varphi = \operatorname{tg}\omega\Delta(\omega\varrho) \quad \ldots \quad \mathrm{III^a}$$

$$= (\varkappa'-\varkappa i)\int_0^{\omega'} \frac{d\omega}{\Delta(\omega\nu)} \,, \qquad \operatorname{tg}\omega' = (\varkappa'+\varkappa i)\operatorname{tg}\varphi\Delta(\varphi\varkappa) \quad \mathrm{III^b}$$

Die sub III gegebenen Formeln führen auf complexe Werthe der Moduln ν und ϱ und gehören desshalb eigentlich nicht in den Kreis unserer Betrachtungen. Verbindet man mit III[b] die Verdoppelungsformel des Art. 18

$$\operatorname{tg}\varphi\Delta\varphi = \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\varphi_1 \,, \qquad \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\Delta(\varphi\varkappa)} = \frac{1}{2}\int_0^{\varphi_1} \frac{d\varphi}{\Delta(\varphi\varkappa)}$$

und den Uebergang zum complementären Modul (Art. 32) in der Form*)

$$\operatorname{tg}\omega' = i\sin\varphi' \,, \qquad \int_0^{\omega'} \frac{d\omega}{\Delta(\omega\nu)} = i\int_0^{\varphi'} \frac{d\omega}{\Delta(\omega\nu')}$$

so gehen die zusammengehörigen Gleichungen

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\varphi_1 = i\sqrt{\nu'}\sin\varphi' \,, \qquad \frac{1}{2}\int_0^{\varphi_1} \frac{d\varphi}{\Delta(\varphi\varkappa)} = i\sqrt{\nu'}\int_0^{\varphi'} \frac{d\omega}{\Delta(\omega\nu')}$$

---

*) äquivalent der symmetrischen Gleichung $\operatorname{tg}\frac{1}{2}\omega' = i\operatorname{tg}\frac{1}{2}\varphi'$.

oder wenn man $\varkappa = \cos\frac{1}{2}\varepsilon$, folglich $\nu' = -e^{\varepsilon i}$ schreibt, die Transformationsformeln

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\varphi = e^{\frac{1}{2}\varepsilon i}\sin\omega\,, \qquad 2e^{\frac{1}{2}\varepsilon i}\int_0^\omega \frac{d\omega}{\varDelta(\omega, e^{\varepsilon i})} = \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\varDelta(\varphi, \cos\frac{1}{2}\varepsilon)}$$

hervor, welche zeigen, wie ein elliptisches Integral, dessen Modul eine complexe Einheit, durch Multiplication mit der Quadratwurzel des Moduls auf ein anderes mit reellem Modul < 1 reducirt werden kann.

Verbindet man ferner $\mathrm{I^a}$ mit $\mathrm{III^a}$, so wird

$$\frac{\mu'\operatorname{tg}\chi}{\varDelta(\chi\mu)} = \operatorname{tg}\omega\varDelta(\omega\varrho)\,, \qquad \mu'\int_0^\chi \frac{d\chi}{\varDelta(\chi\mu)} = \int_0^\omega \frac{d\omega}{\varDelta(\omega\varrho)}$$

oder wenn man $\varkappa$ statt μ schreibt, woduch $\varrho' = \frac{1}{\varkappa'}$, $\varrho = \frac{\varkappa i}{\varkappa'}$,

$$\frac{\varkappa'\operatorname{tg}\varphi}{\varDelta(\varphi\varkappa)} = \operatorname{tg}\omega\varDelta(\omega\varrho)\,, \qquad \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\varDelta(\varphi\varkappa)} = \frac{1}{\varkappa'}\int_0^\omega \frac{d\omega}{\varDelta(\omega\varrho)}$$

Diese Transformation entspricht dem Uebergang von q in $-q$ *) und ist offenbar reciprok: in der That lässt sich die Gleichung zwischen φ und ω zerlegen in die beiden äquivalenten

$$\operatorname{tg}\omega = \varkappa'\operatorname{tg}\varphi \qquad \text{und} \qquad \varDelta(\omega\varrho) = \frac{1}{\varDelta(\varphi\varkappa)}$$

36.

Die Transformationen I und II sind nach Jacobi's Bezeichnung supplementär *(supplementarii ad duplicationem)* und tragen die Namen von Gauss und von Landen. Wegen ihres häufigen Gebrauches mögen die hauptsächlichsten Umformungen der Gleichungen zwischen den betreffenden Amplituden hier folgen.

$$\mathrm{I^a} \qquad \chi = \operatorname{am}\frac{2Mu}{\pi}\,, \qquad \mu = \frac{1-\varkappa'}{1+\varkappa'}$$

$$\sin\chi = \frac{(1+\varkappa')\sin\varphi}{1+\varDelta\chi} = \frac{1-\varDelta\varphi}{(1-\varkappa')\sin\varphi}\,, \qquad \sin\varphi = \frac{(1+\mu)\sin\chi}{1+\mu\sin^2\chi}$$

$$\mu\sin^2\chi = \frac{1-\varDelta\varphi}{1+\varDelta\varphi}\,, \qquad = \frac{\mu'\mu'\sin\chi}{\varDelta^2\chi - \mu\cos^2\chi}$$

---

*) In Betreff des Uebergangs von q in $-q$ vergl. Jacobi, *Sur la rotation d'un corps,* Werke Bd. II, S. 173 oder Crelle's Journal, Bd. 39, S. 327.

$$\cos^2\chi = \frac{2}{1-\varkappa'}\frac{\Delta\varphi-\varkappa'}{1+\Delta\varphi}, \qquad \cos\varphi = \frac{\cos\chi\Delta\chi}{1+\mu\sin^2\chi}$$

$$= \frac{2\cos^2\varphi}{\Delta\varphi+\cos^2\varphi+\varkappa'\sin^2\varphi}, \qquad = \frac{\mu\cos\chi\Delta\chi}{1+\mu-\Delta^2\chi}$$

$$\Delta^2\chi = \frac{2}{1+\varkappa'}\frac{\Delta\varphi+\varkappa'}{1+\Delta\varphi}, \qquad \Delta\varphi = \frac{1-\mu\sin^2\chi}{1+\mu\sin^2\chi} = \frac{\Delta^2\chi-1+\mu}{1+\mu-\Delta^2\chi}$$

$$\frac{\cos\chi}{\Delta\chi} = \frac{(1+\varkappa')\cos\varphi}{\Delta\varphi+\varkappa'} = \frac{\Delta\varphi-\varkappa'}{(1-\varkappa')\cos\varphi}, \qquad \frac{1}{\varkappa'}\Delta\varphi = \frac{\Delta^2\chi+\mu\cos^2\chi}{\Delta^2\chi-\mu\cos^2\chi}$$

$$\operatorname{tg}^2\chi = \frac{1+\varkappa'}{2}\frac{1-\Delta\varphi}{\Delta\varphi-\varkappa'}, \qquad \operatorname{tg}\varphi = (1+\mu)\frac{\operatorname{tg}\chi}{\Delta\chi}$$

$$= \frac{1+\varkappa'}{2}\frac{\Delta\varphi+\varkappa'}{1+\Delta\varphi}\operatorname{tg}^2\varphi, \qquad \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\varphi = \frac{\Delta\chi+\mu\cos\chi}{\Delta\chi+\cos\chi}\sin\chi$$

$$\operatorname{tg}^2\tfrac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}+\chi\right) = \frac{\Delta\varphi+\varkappa'\sin\varphi}{1-\sin\varphi}, \qquad \operatorname{tg}^2\tfrac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}+\varphi\right) = \frac{\operatorname{tg}^2\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}+\chi\right)+\varkappa'}{\operatorname{tg}^2\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}-\chi\right)+\varkappa'}$$

*) $\text{I}^b \qquad \chi' = \operatorname{am}\frac{2\Lambda u}{\pi}, \qquad \lambda = \frac{2\sqrt{\varkappa}}{1+\varkappa}$

$$\sin\chi' = \frac{(1+\varkappa)\sin\varphi}{1+\varkappa\sin^2\varphi}, \qquad \sin\varphi = \frac{(1+\lambda')\sin\chi'}{1+\Delta\chi'} = \frac{1-\Delta\chi'}{(1-\lambda')\sin\chi'}$$

$$= \frac{\varkappa'\varkappa'\sin\varphi}{\Delta^2\varphi-\varkappa\cos^2\varphi}, \qquad \varkappa\sin^2\varphi = \frac{1-\Delta\chi'}{1+\Delta\chi'}$$

$$\cos\chi' = \frac{\cos\varphi\Delta\varphi}{1+\varkappa\sin^2\varphi}, \qquad \cos^2\varphi = \frac{2}{1-\lambda'}\frac{\Delta\chi'-\lambda'}{1+\Delta\chi'}$$

$$= \frac{(1-\varkappa)\cos\varphi\Delta\varphi}{\Delta^2\varphi-\varkappa\cos^2\varphi}, \qquad = \frac{2\cos^2\chi'}{\Delta\chi'+\cos^2\chi'+\lambda'\sin^2\chi'}.$$

---

*) SCHRÖTER hat den Gleichungen der GAUSS'schen Transformation die bemerkenswerthe Form gegeben

I^a	I^b
$\frac{2}{1+\varkappa'}\frac{1}{\sin\varphi} = \frac{1}{\sin\chi}+\mu\sin\chi$	$\frac{1+\varkappa}{\sin\chi'} = \frac{1}{\sin\varphi}+\varkappa\sin\varphi$
$\frac{2}{1+\varkappa'}\frac{\Delta\varphi}{\sin\varphi} = \frac{1}{\sin\chi}-\mu\sin\chi$	$(1+\varkappa)\frac{\Delta\chi'}{\sin\chi'} = \frac{1}{\sin\varphi}-\varkappa\sin\varphi$
$\frac{2}{1+\varkappa'}\frac{\Delta\varphi}{\cos\varphi} = \frac{\Delta\chi}{\cos\chi}+\mu\frac{\cos\chi}{\Delta\chi}$	$(1+\varkappa)\frac{\Delta\chi'}{\cos\chi'} = \frac{\Delta\varphi}{\cos\varphi}+\varkappa\frac{\cos\varphi}{\Delta\varphi}$
$\frac{2\varkappa'}{1+\varkappa'}\frac{1}{\cos\varphi} = \frac{\Delta\chi}{\cos\chi}-\mu\frac{\cos\chi}{\Delta\chi}$	$\frac{1-\varkappa}{\cos\chi'} = \frac{\Delta\varphi}{\cos\varphi}-\varkappa\frac{\cos\varphi}{\Delta\varphi}$

Vergl. die wichtige und inhaltsreiche Schrift RICHELOT's über *die Landen'sche Transformation* (1868), S. 19.

$$\Delta\chi' = \frac{1-\varkappa\sin^2\varphi}{1+\varkappa\sin^2\varphi} = \frac{\Delta^2\varphi - 1 + \varkappa}{1+\varkappa-\Delta^2\varphi}\,, \qquad \Delta^2\varphi = \frac{2}{1+\lambda'}\,\frac{\Delta\chi'+\lambda'}{1+\Delta\chi'}$$

$$\frac{1}{\lambda'}\Delta\chi' = \frac{\Delta^2\varphi+\varkappa\cos^2\varphi}{\Delta^2\varphi-\varkappa\cos^2\varphi}\,, \qquad \frac{\cos\varphi}{\Delta\varphi} = \frac{(1+\lambda')\cos\chi'}{\Delta\chi'+\lambda'} = \frac{\Delta\chi'-\lambda'}{(1-\lambda')\cos\chi'}$$

$$\operatorname{tg}\chi' = (1+\varkappa)\frac{\operatorname{tg}\varphi}{\Delta\varphi}\,, \qquad \operatorname{tg}^2\varphi = \frac{1+\lambda'}{2}\,\frac{1-\Delta\chi'}{\Delta\chi'-\lambda'}$$

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\chi' = \frac{\Delta\varphi+\varkappa\cos\varphi}{\Delta\varphi+\cos\varphi}\sin\varphi\,, \qquad = \frac{1+\lambda'}{2}\,\frac{\Delta\chi'+\lambda'}{1+\Delta\chi'}\operatorname{tg}^2\chi'$$

$$\operatorname{tg}^2\tfrac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}+\chi'\right) = \frac{\operatorname{tg}^2\tfrac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}+\varphi\right)+\lambda'}{\operatorname{tg}^2\tfrac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)+\lambda'}\,, \qquad \operatorname{tg}^2\tfrac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}+\varphi\right) = \frac{\Delta\chi'+\lambda'\sin\chi'}{1-\sin\chi'}$$

$$\text{II}^{\text{a}} \qquad \psi = \operatorname{am}\frac{4Mu}{\pi}\,, \qquad \mu = \frac{1-\varkappa'}{1+\varkappa'}$$

$$\sin\psi = (1+\varkappa')\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{\Delta\varphi} = \frac{\sin 2\varphi}{(1+\mu)\Delta\varphi}\,, \qquad \sin 2\varphi = \sin\psi(\Delta\psi+\mu\cos\psi)$$

$$\cos\psi = \frac{\cos^2\varphi-\varkappa'\sin^2\varphi}{\Delta\varphi}\,, \qquad \cos 2\varphi = \cos\psi\Delta\psi - \mu\sin^2\psi$$

$$= \frac{\Delta^2\varphi-\varkappa'}{(1-\varkappa')\Delta\varphi} = \frac{\mu+\cos 2\varphi}{(1+\mu)\Delta\varphi}\,, \qquad \Delta\varphi = \frac{\Delta\psi+\mu\cos\psi}{1+\mu}$$

$$\Delta\psi = \frac{\cos^2\varphi+\varkappa'\sin^2\varphi}{\Delta\varphi}\,, \qquad \frac{1}{\varkappa'}\Delta^2\varphi = \frac{\Delta\psi+\mu\cos\psi}{\Delta\psi-\mu\cos\psi}$$

$$= \frac{\Delta^2\varphi+\varkappa'}{(1+\varkappa')\Delta\varphi} = \frac{1+\mu\cos 2\varphi}{(1+\mu)\Delta\varphi}\,, \qquad \operatorname{tg}\varphi = \frac{(1+\mu)\sin\psi}{\Delta\psi+\cos\psi}$$

$$\frac{\sin\psi}{\Delta\psi} = \frac{(1+\varkappa')\operatorname{tg}\varphi}{1+\varkappa'\operatorname{tg}^2\varphi} = \frac{\sin 2\varphi}{1+\mu\cos 2\varphi}\,, \qquad \varkappa'\operatorname{tg}^2\varphi = \frac{\Delta\psi-\cos\psi}{\Delta\psi+\cos\psi}$$

$$\operatorname{tg}\psi = \frac{(1+\varkappa')\operatorname{tg}\varphi}{1-\varkappa'\operatorname{tg}^2\varphi} = \frac{\sin 2\varphi}{\mu+\cos 2\varphi}\,, \qquad \sin(2\varphi-\psi) = \mu\sin\psi$$

$$\operatorname{tg}(\psi-\varphi) = \varkappa'\operatorname{tg}\varphi\,, \qquad \cos(2\varphi-\psi) = \Delta\psi$$

$$\text{II}^{\text{b}} \qquad \psi' = \operatorname{am}\frac{\Lambda u}{\pi}\,, \qquad \lambda = \frac{2\sqrt{\varkappa}}{1+\varkappa}$$

$$\sin 2\psi' = \sin\varphi(\Delta\varphi+\varkappa\cos\varphi)\,, \qquad \sin\varphi = (1+\lambda')\frac{\sin\psi'\cos\psi'}{\Delta\psi'} = \frac{\sin 2\psi'}{(1+\varkappa)\Delta\psi'}$$

$$\cos 2\psi' = \cos\varphi\Delta\varphi - \varkappa\sin^2\varphi\,, \qquad \cos\varphi = \frac{\cos^2\psi'-\lambda'\sin^2\psi'}{\Delta\psi'}$$

$$\Delta\psi' = \frac{\Delta\varphi+\varkappa\cos\varphi}{1+\varkappa}\,, \qquad = \frac{\Delta^2\psi'-\lambda'}{(1-\lambda')\Delta\psi'} = \frac{\varkappa+\cos 2\psi'}{(1+\varkappa)\Delta\psi'}$$

$$\frac{1}{\lambda'}\Delta^2\psi' = \frac{\Delta\varphi + \varkappa\cos\varphi}{\Delta\varphi - \varkappa\cos\varphi}\,, \qquad \Delta\varphi = \frac{\cos^2\psi' + \lambda'\sin^2\psi'}{\Delta\psi'}$$

$$\operatorname{tg}\psi' = \frac{(1+\varkappa)\sin\varphi}{\Delta\varphi + \cos\varphi}\,, \qquad = \frac{\Delta^2\psi' + \lambda'}{(1+\lambda')\Delta\psi'} = \frac{1 + \varkappa\cos 2\psi'}{(1+\varkappa)\Delta\psi'}$$

$$\lambda'\operatorname{tg}^2\psi' = \frac{\Delta\varphi - \cos\varphi}{\Delta\varphi + \cos\varphi}\,, \qquad \frac{\sin\varphi}{\Delta\varphi} = \frac{(1+\lambda')\operatorname{tg}\psi'}{1 + \lambda'\operatorname{tg}^2\psi'} = \frac{\sin 2\psi'}{1 + \varkappa\cos 2\psi'}$$

$$\sin(2\psi' - \varphi) = \varkappa\sin\varphi\,, \qquad \operatorname{tg}\varphi = \frac{(1+\lambda')\operatorname{tg}\psi'}{1 - \lambda'\operatorname{tg}^2\psi'} = \frac{\sin 2\psi'}{\varkappa + \cos 2\psi'}$$

$$\cos(2\psi' - \varphi) = \Delta\varphi\,, \qquad \operatorname{tg}(\varphi - \psi') = \lambda'\operatorname{tg}\psi'$$

37.

In den *Philosoph. Transactions* für 1775, S. 284 hat Landen die Substitution

$$t = gx\sqrt{\frac{m^2 - x^2}{m^2 - gx^2}}$$

(wo t den Abstand eines Ellipsenpunkts von dem Fusspunkte des auf die Tangenten gefällten Perpendikels ausdrückt, wenn m die halbe grosse Axe, $\sqrt{g}$ die Excentricität bezeichnet) angewandt, um das Integral für den Ellipsenbogen $\int_0^x dx\sqrt{\frac{m^2 - gx^2}{m^2 - x^2}}$ zu transformiren und dadurch den (*Philos. Trans.* 1771, S. 309 bereits angekündigten) Satz zu beweisen, dass die Rectification eines Hyperbelbogens auf die zweier Ellipsenbogen reducirt werden könne. Ob jedoch die Gleichung

$$\frac{dx}{\sqrt{(m^2 - x^2)(m^2 - gx^2)}} = \frac{dt}{\sqrt{(m^2 g + t^2)^2 - 4m^2t^2}}$$

bei Landen vorkommt, scheint fraglich, wenigstens habe ich letztere auch in dessen von Legendre citirten *Mathemat. Memoirs, Vol. I* (London 1780) nicht gefunden.

Nachdem etwa zehn Jahre später Lagrange in den Turiner Memoiren*) (T. II, 1784—85, Oeuvres, T. II, S. 253—312) mittelst der Substitution

*) in der Abhandlung *Sur une nouvelle méthode de Calcul intégral pour les différentielles affectées d'un radical carré sous lequel la variable ne passe pas le quatrième degré.*

$$y = y_1 \sqrt{\frac{1 \pm m_1^2 y_1^2}{1 \pm n_1^2 y_1^2}}, \qquad m_1 = \frac{m+n}{2}, \qquad n_1 = \sqrt{mn} \text{ *)}$$

die dem Uebergange zum arithmetischen und geometrischen Mittel entsprechende Gleichung

$$\int_0^y \frac{dy}{\sqrt{(1 \pm m^2 y^2)(1 \pm n^2 y^2)}} = \int_0^{y_1} \frac{dy_1}{\sqrt{(1 \pm m_1^2 y_1^2)(1 \pm n_1^2 y_1^2)}}$$

abgeleitet und zur approximativen Berechnung des elliptischen Integrals benutzt hatte, brachte Legendre in den Pariser Memoiren von 1786 **), S. 650 die betreffende Substitution auf die Form

$$\sin\varphi = (1 + \lambda') \frac{\sin\varphi' \cos\varphi'}{\varDelta(\varphi' \lambda)}, \qquad \lambda = \frac{2\sqrt{\varkappa}}{1 + \varkappa}$$

Indem er sie gleichfalls zur Reduction auf successiv abnehmende oder zunehmende Moduln anwendet, sagt er S. 646 mit Beziehung auf die Abhandlung von Lagrange: »*je ne puis m'empêcher de remarquer à ce sujet l'accord singulier de deux résultats obtenus par des méthodes totalement différentes*«. In seinem *Mémoire sur les Transcendantes elliptiques*, 1793, S. 41 und 45 gibt Legendre die von ihm nach Landen benannte Substitution in der eleganten Gestalt

$$\operatorname{tg}(\varphi - \varphi') = \lambda' \operatorname{tg}\varphi' \quad \text{oder} \quad \sin(2\varphi' - \varphi) = \varkappa \sin\varphi$$

und drückt sich in seinem grossen Werke über elliptische Functionen (1825, S. 87) folgendermaassen aus: »*On a lieu de s'étonner, que la découverte de la transformation qui met en évidence les propriétés nombreuses de l'échelle des modules ait été reservée à Landen, qui d'ailleurs n'en a tiré qu'un médiocre parti et qui n'a pas même vu qu'elle fournissait une méthode très simple pour calculer par approximation les arcs des sections coniques.*«

Die von Lagrange gelehrte Substitution ist aber dadurch besonders merkwürdig, dass sie nicht allein für $y = \frac{1}{m}\sin\varphi$, $\varkappa = \frac{n}{m}$, $\lambda = \frac{n_1}{m_1}$ die Legendre-Landen'sche Transformation in der Form

$$\sin\varphi = (1 + \lambda') \frac{\sin\varphi' \cos\varphi'}{\varDelta(\varphi' \lambda)}, \qquad \frac{d\varphi}{\varDelta(\varphi \varkappa)} = (1 + \lambda') \frac{d\varphi'}{\varDelta(\varphi' \lambda)}$$

---

*) a. a. O., S. 272.

**) *Sur les intégrations par arcs d'ellipse*, p. 616—683.

enthält, sondern auch für $y = \frac{1}{m}\operatorname{tg}\varphi$, $\varkappa' = \frac{n}{m}$, $\mu' = \varkappa_1' = \frac{n_1}{m_1}$ direct*) die GAUSS'sche Substitution des arithmetisch-geometrischen Mittels liefert, wie die Gleichungen

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{m\operatorname{tg}\varphi_1}{\sqrt{m_1^2\cos^2\varphi_1 + n_1^2\sin^2\varphi_1}}$$

$$\frac{d\varphi}{\sqrt{m^2\cos^2\varphi + n^2\sin^2\varphi}} = \frac{d\varphi_1}{\sqrt{m_1^2\cos^2\varphi_1 + n_1^2\sin^2\varphi_1}}$$

zeigen. GAUSS selbst sagt zwar Art. 16 seiner berühmten Abhandlung über Säcularstörungen**), ohne LAGRANGE zu nennen: »*Lectoribus autem gratum fore speramus, si hacce occasione determinationem harum aliarumque transscendentium per algorithmum peculiarem expeditissimum explicemus, quo per multos jam abhinc annos frequenter usi sumus, et de quo alio loco copiosius agere propositum est*«, setzt aber in seiner in den Göttinger gelehrten Anzeigen vom 9. Februar 1818 abgedruckten Selbstanzeige der angeführten Abhandlung hinzu: »*Schliesslich muss noch bemerkt werden, dass der Verf. diese Resultate, so wie er sie schon vor vielen Jahren unabhängig von ähnlichen Untersuchungen Lagrange's und Legendre's gefunden hat, in ihrer ursprünglichen Gestalt darstellen zu müssen geglaubt hat, obgleich sie zum Theil aus den Entdeckungen dieser Geometer leicht hätten abgeleitet werden können, theils weil jene Form ihm wesentliche Vortheile zu haben schien, theils weil sie so den Anfang einer viel ausgedehnteren Theorie ausmachen, wo seine Arbeit eine ganz verschiedene Richtung von der der genannten Geometer genommen hat.*« Bekanntlich hat GAUSS bei seinen Lebzeiten Nichts über jene ausgedehnten Untersuchungen veröffentlicht, so dass die Theorie der elliptischen Functionen von ABEL und JACOBI von Neuem entdeckt werden musste. Vergl. was Bd. 3 seiner Werke, S. 361—491, aus dem Nachlasse von GAUSS über elliptische Functionen enthält.

---

*) ENNEPER sagt in seinem Werke über Theorie und Geschichte der elliptischen Functionen, S. 310, dass »die Methode von LAGRANGE auf eine indirecte Anwendung der Gleichungen herauskomme, . . . welche den Namen der Transformation von GAUSS tragen«.

**) *Determinatio attractionis, quam in punctum quodvis positionis datae exerceret planeta, si ejus massa per totam orbitam, ratione temporis, quo singulae partes describuntur, uniformiter esset dispertita. Comment. rec. Gotting.* 1818, *S.* 21—48.

38.

Nachdem im ersten Abschnitte die Substitutionen erörtert worden sind, durch welche das elliptische Integral

$$z = \int_{x_0}^{x} \frac{dx}{\xi}$$

auf die Normalform $\int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\Delta(\varphi\,\varkappa)}$ gebracht wird, handelt es sich jetzt darum, an Stelle der Argumente φ und $\varkappa$ die neuen Argumente u und q der Thetafunctionen einzuführen.

Die Berechnung von q geschieht nach JACOBI*) auf folgendem Wege. Wenn man durch den beigefügten Index n den Uebergang von q zu q^{2^n} (nicht wie Art. 32 von q zu q^n) bezeichnet, so folgt mittelst

$$\varkappa^2 = \left(\frac{\vartheta_2}{\vartheta_3}\right)^4 = 16q\left(\frac{1+q^2+q^6+q^{12}\,..}{1+2q+2q^4+2q^9\,..}\right)^4 = 16qQ^4$$

$$\varkappa_n^2 = 16q^{2^n}Q_n^4 \qquad \text{oder} \qquad q = \lim_{n=\infty} \sqrt[2^n]{\frac{\varkappa_n^2}{16}}$$

Da Art. 34 zufolge**)

$$\mu = \varkappa_1 = \frac{1-\varkappa'}{1+\varkappa'}\,, \qquad \varkappa_1' = \frac{2\sqrt{\varkappa'}}{1+\varkappa'}\,, \qquad \frac{4\varkappa_1}{\varkappa\varkappa} = \frac{\varkappa_1'\varkappa_1'}{\varkappa'}$$

so wird identisch

$$\sqrt[2^n]{\frac{\varkappa_n^2}{16}} = \frac{\varkappa^2}{16}\,\frac{4\varkappa_1}{\varkappa^2}\sqrt{\frac{4\varkappa_2}{\varkappa_1^2}}\sqrt[4]{\frac{4\varkappa_3}{\varkappa_2^2}}\cdots\sqrt[2^{n-1}]{\frac{4\varkappa_n}{\varkappa_{n-1}^2}}$$

$$= \frac{\varkappa^2}{16}\,\frac{\varkappa_1'^2}{\varkappa'}\sqrt{\frac{\varkappa_2'^2}{\varkappa_1'}}\sqrt[4]{\frac{\varkappa_3'^2}{\varkappa_2'}}\cdots\sqrt[2^{n-1}]{\frac{\varkappa_n'\varkappa_n'}{\varkappa_{n-1}'}}$$

---

*) *Fundamenta* p. 149, CRELLE's Journal Bd. 26, S. 98 oder Werke Bd. 1, S. 13. Uebrigens haben JACOBI (a. a. O.) und MEISSEL (Iserlohn 1860) fünf- resp. achtstellige Tafeln für $\lg q$ zum Argument $\varepsilon = \arcsin\varkappa$ berechnet, Letzterer nach der Formel

$$\lg q = \lg\left(\frac{1}{4}\operatorname{tg}^2\tfrac{1}{2}\varepsilon\right) + \frac{1}{4}\operatorname{tg}^4\tfrac{1}{2}\varepsilon + \frac{13}{128}\operatorname{tg}^8\tfrac{1}{2}\varepsilon + \frac{23}{384}\operatorname{tg}^{12}\tfrac{1}{2}\varepsilon$$
$$+ \frac{2701}{256.256}\operatorname{tg}^{16}\tfrac{1}{2}\varepsilon + \frac{5057}{128.1280}\operatorname{tg}^{20}\tfrac{1}{2}\varepsilon\ldots$$

VERHULST gibt in seinem *Traité* (1841) von LOXHAY berechnete Tafeln für $\log\log\frac{1}{q}$ mit 12 bis 14 Decimalen.

**) Vergl. die Anmerkung zum folgenden Artikel.

mithin

$$q = \frac{\varkappa^2}{16\varkappa'} \varkappa_1'^{\frac{3}{2}} \varkappa_2'^{\frac{3}{4}} \varkappa_3'^{\frac{3}{8}} \dots \text{ in inf.}$$

Berechnet man nun die Reihe der Hülfsgrössen

$$l = \lg \frac{1}{\varkappa'}, \qquad \lambda = \lg(1 + \varkappa')$$

$$l_1 = \lg \frac{1}{\varkappa_1'} = \frac{1}{2} l + \lambda - \lg 2 \,, \qquad \lambda_1 = \lg(1 + \varkappa_1')$$

$$l_2 = \lg \frac{1}{\varkappa_2'} = \frac{1}{2} l_1 + \lambda_1 - \lg 2 \,, \qquad \lambda_2 = \lg(1 + \varkappa_2')$$

u. s. w.

was mit Hülfe der Tafeln sogenannter Additionslogarithmen, welche zum Argument $l = \lg x$ den Werth von $\lambda = \lg\left(1 + \frac{1}{x}\right)$ liefern, sehr bequem geschieht, so ergibt sich

$$\lg q = \lg \frac{\varkappa^2}{16} + l - \frac{3}{2}\left(l_1 + \frac{1}{2} l_2 + \frac{1}{4} l_3 + \frac{1}{8} l_4 \dots\right)$$

Zugleich findet man wegen

$$\vartheta_3^4 = \left(\frac{2K}{\pi}\right)^2 = \frac{\varkappa_1' \varkappa_2' \varkappa_3' \dots}{\varkappa'}$$

mittelst der nämlichen Hülfsgrössen

$$\lg \vartheta = -\frac{1}{4}\left(l + l_1 + l_2 + l_3 \dots\right)$$

$$\lg \vartheta_2 = \frac{1}{2} \lg \varkappa + \frac{1}{4}\left(l - l_1 - l_2 - l_3 \dots\right)$$

$$\lg \vartheta_3 = \frac{1}{4}\left(l - l_1 - l_2 - l_3 \dots\right)$$

$$\lg \vartheta_1' = \frac{1}{2} \lg \varkappa + \frac{1}{4} l - \frac{3}{4}\left(l_1 + l_2 + l_3 \dots\right)$$

nebst den Functionen χ des Art. 33

$$8 \lg \chi = -\left(l + \frac{1}{2} l_1 + \frac{1}{4} l_2 + \frac{1}{8} l_3 \dots\right)$$

$$8 \lg \chi_1 = -\left(l_1 + \frac{3}{2} l_2 + \frac{7}{4} l_3 + \frac{15}{8} l_4 \dots\right)$$

$$8 \lg \chi_2 = l_1 + \frac{1}{2} l_2 + \frac{1}{4} l_3 + \frac{1}{8} l_4 \dots$$

$$8 \lg \chi_3 = l - \frac{1}{2} l_1 - \frac{1}{4} l_2 - \frac{1}{8} l_3 \dots$$

Wenn man die Gleichung $\lg q = -\pi \frac{K'}{K}$ des Art. 39 zur Berechnung von q benutzen will, so hat man neben den Grössen

$l\, l_1\, l_2 \ldots$ die weitere Reihe $l'\, l_1'\, l_2' \ldots$ zu berechnen, welche durch den Uebergang zum complementären Modul erhalten wird. Dann ist

$$\lg \frac{\lg \frac{1}{q}}{\pi \lg e} = \frac{1}{2}\left(l' - l_1' - l_2' - l_3' \ldots\right) - \frac{1}{2}\left(l - l_1 - l_2 - l_3 \ldots\right)$$

Zur Berechnung von u kann man sich sehr verschiedener Methoden bedienen, und wird natürlich anders verfahren, wenn einzelne Werthe oder Tafeln — nach Art der Legendre'schen — berechnet werden sollen. Die Substitution des arithmetisch-geometrischen Mittels lieferte

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{m \operatorname{tg}\varphi_1}{\sqrt{m_1^2 \cos^2\varphi_1 + n_1^2 \sin^2\varphi_1}} = \frac{(1+\mu)\operatorname{tg}\chi}{\Delta\chi}$$

folglich nach Art. 37, für $\chi = \varphi_1$

$$\varkappa_1 = \mu\,, \qquad \varkappa' = \frac{n}{m}\,, \qquad \varkappa_1' = \frac{n_1}{m_1}\,, \qquad \frac{\sqrt{\varkappa'}}{\varkappa_1'} = \frac{m_1}{m}$$

$$\operatorname{tg}\varphi_1 = \frac{\sqrt{\varkappa'}}{\varkappa_1'} \Delta\varphi_1 \operatorname{tg}\varphi = \operatorname{tg}\varphi \sqrt{\frac{\sqrt{\varkappa'}}{\varkappa_1'} \frac{\Delta\varphi + \varkappa'}{1 + \Delta\varphi}}$$

Schreibt man daher

$$\varepsilon = \frac{1}{\varkappa'} \Delta^2(\varphi\,\varkappa)\,, \qquad \varepsilon_1 = \frac{1}{\varkappa_1'} \Delta^2(\varphi_1\,\varkappa_1)$$

so ergibt sich

$$\operatorname{tg}\varphi_1 = \operatorname{tg}\varphi \sqrt{\frac{\varkappa'\varepsilon_1}{\varkappa_1'}}\,, \qquad \varepsilon_1 = \frac{\sqrt{\varepsilon} + \sqrt{\varkappa'}}{1 + \sqrt{\varkappa'\varepsilon}}$$

und durch Fortsetzung des Verfahrens, wegen $u = \lim \varphi_p$,

$$\operatorname{tg} u = \operatorname{tg}\varphi \sqrt{\varkappa' \varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3 \ldots \text{ in inf.}}$$

Wenn in den Additionstafeln $\lg\left(1 + \frac{1}{x}\right) = \lambda, \mu, \nu$ zu $\lg x = l, m, n$ gehören, und man setzt

$$l = \lg \frac{1}{\varkappa'}\,, \qquad r = \pm \lg \varepsilon\,, \qquad m = \frac{1}{2}(l + r)\,, \qquad n = \frac{1}{2}(l - r) = l - m$$

so wird

$$l_1 = \lambda + \frac{1}{2} l - \lg 2 = \lg \frac{1}{\varkappa_1'}\,, \qquad r_1 = \mu - \nu + \frac{1}{2} r = \lg \varepsilon_1 \qquad \text{u. s. w.}$$

folglich

$$\lg \operatorname{tg} u = \lg \operatorname{tg}\varphi - \frac{1}{2} l \pm \frac{1}{2}(r_1 + r_2 + r_3 \ldots)$$

wo sich die doppelten Vorzeichen auf die Alternative beziehen, ob die Grössen $\varepsilon\ \varepsilon_1\ \varepsilon_2 \ldots$ zwischen 1 und $\frac{1}{\varkappa'}$ oder zwischen 1 und $\varkappa'$ enthalten sind*).

Zieht man die trigonometrische Berechnungsweise vor, so kann man von der Substitution ausgehen

$$m\,\mathrm{tg}^2\varphi = n\,\mathrm{tg}^2\varphi_1\ , \qquad \frac{d\varphi}{\sqrt{m^2\sin^2\varphi + n^2\cos^2\varphi}} = \frac{d\varphi_1}{\sqrt{m_1^2\sin^2 2\varphi_1 + n_1^2\cos^2 2\varphi_1}}$$

und erhält $u = \frac{\pi}{2} - \lim\varphi_p$, wenn

$$\mathrm{tg}\,\varphi = \sqrt{\varkappa'}\,\mathrm{tg}\,\varphi_1\ , \qquad \mathrm{tg}\,2\varphi_1 = \sqrt{\varkappa_1'}\,\mathrm{tg}\,2\varphi_2\ , \qquad \mathrm{tg}\,4\varphi_2 = \sqrt{\varkappa_2'}\,\mathrm{tg}\,4\varphi_3 \quad \text{u. s. w.}$$

gesetzt werden. Die Landen'sche Substitution liefert bekanntlich analog $u = \lim\varphi_p$ für

$$\mathrm{tg}(2\varphi_1 - \varphi) = \varkappa'\,\mathrm{tg}\,\varphi\ , \qquad \mathrm{tg}\,2(2\varphi_2 - \varphi_1) = \varkappa_1'\,\mathrm{tg}\,2\varphi_1 \quad \text{u. s. w.}$$

39.

Obgleich die erläuterten Rechnungsmethoden selbst für Werthe von $\varkappa$, welche von der Einheit sehr wenig verschieden sind, zur numerischen Berechnung der Thetareihen bequem bleiben, (z. B. erhält man noch $q = \frac{1}{2}$ für $\varkappa^2 = 0.999989$, oder $q = \frac{1}{e} = 0.367881$ für $\varkappa^2 = 0.999168$, während für $\varkappa^2 = \frac{1}{2}$ $q = e^{-\pi} = 0.043214$ wird,) so liegt doch auf der Hand, dass für $\varkappa^2 > \frac{1}{2}$, $q > e^{-\pi}$ die entsprechenden Functionen vortheilhafter zu berechnen sind, wenn $\varkappa'$ an die Stelle von $\varkappa$ tritt. Hiezu führen die folgenden aus der Theorie der Thetafunctionen bekannten Relationen.

Wenn man K' und q' von $\varkappa'$ ebenso abhängen lässt, wie K und q von $\varkappa$, so erhält man für

$$\int_0^{\varphi}\frac{d\varphi}{\Delta(\varphi\varkappa)} = \int_0^{\varphi'}\frac{d\varphi}{\Delta(\varphi'\varkappa')} \qquad \text{oder} \qquad \mathrm{K}u = \mathrm{K}'u'$$

$$\pi^2 = \lg q\cdot\lg q'$$

*) In seiner bereits citirten Abhandlung über die numerische Berechnung der elliptischen Functionen benutzt Jacobi die Gauss'sche und die Landen'sche Substitution auch zur Ableitung der Logarithmen der Thetafunctionen. Doch wird, nachdem die Werthe der Argumente gefunden, die directe Berechnung der einzelnen Glieder dieser Reihen in der Regel bequem genug sein. Man vergleiche übrigens die Art. 47 entwickelten Formeln.

$$\vartheta(u, q) = \varpi e^{-\frac{uu'}{\pi}} \theta_2(u', q')$$
$$\vartheta_1(u, q) = \varpi e^{-\frac{uu'}{\pi}} \theta_1(u', q')$$
$$\vartheta_2(u, q) = \varpi e^{-\frac{uu'}{\pi}} \theta(u', q')$$
$$\vartheta_3(u, q) = \varpi e^{-\frac{uu'}{\pi}} \theta_3(u', q')$$

Hier bezeichnen

$$\varpi^4 = \frac{\lg q'}{\lg q}$$

$$\theta(u, q) = \vartheta(ui, q) = 1 - q(e^{2u} + e^{-2u}) + q^4(e^{4u} + e^{-4u}) \mp \dots$$
$$= \chi_1(q) \prod_1^\infty (1 - q^{2p-1} e^{2u})(1 - q^{2p-1} e^{-2u})$$
$$\theta_1(u, q) = \frac{1}{i} \vartheta_1(ui, q) = q^{\frac{1}{4}}(e^u - e^{-u}) - q^{\frac{9}{4}}(e^{3u} - e^{-3u}) \pm \dots$$
$$= \chi_1(q) q^{\frac{1}{4}}(e^u - e^{-u}) \prod (1 - q^{2p} e^{2u})(1 - q^{2p} e^{-2u})$$
$$\theta_2(u, q) = \vartheta_2(ui, q) = q^{\frac{1}{4}}(e^u + e^{-u}) + q^{\frac{9}{4}}(e^{3u} + e^{-3u}) + \dots$$
$$= \chi_1(q) q^{\frac{1}{4}}(e^u + e^{-u}) \prod (1 + q^{2p} e^{2u})(1 + q^{2p} e^{-2u})$$
$$\theta_3(u, q) = \vartheta_3(ui, q) = 1 + q(e^{2u} + e^{-2u}) + q^4(e^{4u} + e^{-4u}) + \dots$$
$$= \chi_1(q) \prod (1 + q^{2p-1} e^{2u})(1 + q^{2p-1} e^{-2u})$$

Folglich wird für $u = 0$

$$\vartheta(q) = \varpi \theta_2(q') = \varpi \vartheta_2(q') = \varpi \sqrt{\frac{2K'\varkappa'}{\pi}}$$
$$\vartheta_1'(q) = \varpi^3 \theta_1'(q') = \varpi^3 \vartheta_1'(q') = \varpi^3 \frac{2K'}{\pi} \sqrt{\frac{2K'\varkappa\varkappa'}{\pi}}$$
$$\vartheta_2(q) = \varpi \theta(q') = \varpi \vartheta(q') = \varpi \sqrt{\frac{2K'\varkappa}{\pi}}$$
*) $$\vartheta_3(q) = \varpi \theta_3(q') = \varpi \vartheta_3(q') = \varpi \sqrt{\frac{2K'}{\pi}}$$

also $$\varpi^2 = \frac{K}{K'} = \frac{u'}{u} = -\frac{\lg q'}{\pi} = -\frac{\pi}{\lg q}$$

---

*) Die Gleichung $\varpi = \frac{\vartheta_3(q)}{\vartheta_3(q')}$ kann geschrieben werden

$$\frac{a}{r} = \frac{1 + 2e^{-\pi\frac{r^2}{a^2}} + 2e^{-4\pi\frac{r^2}{a^2}} + 2e^{-9\pi\frac{r^2}{a^2}} + \dots}{1 + 2e^{-\pi\frac{a^2}{r^2}} + 2e^{-4\pi\frac{a^2}{r^2}} + 2e^{-9\pi\frac{a^2}{r^2}} + \dots}$$

Wählt man die willkürliche Constante a gross genug, um mit Rücksicht auf die zu

Damit ergeben sich nicht allein die Gleichungen

$$-\frac{uu'}{\pi} = \frac{u'u'}{\lg q'} = \frac{uu}{\lg q}$$

$$q^{u'} = e^{-\pi u}\,, \qquad q'^{u} = e^{-\pi u'}$$

$$^{*)}\quad q = e^{-\pi\frac{K'}{K}}\,, \qquad q' = e^{-\pi\frac{K}{K'}}$$

sondern auch die Ausdrücke der Functionen χ:

$$\chi^{12}(q) = \frac{4\varkappa'\varkappa'}{\varkappa}e^{-\frac{\pi}{2}\frac{K'}{K}} = 64\,q^{\frac{1}{2}}q'\chi_2^{12}(q')$$

$$\chi_1^6(q) = \left(\frac{2K}{\pi}\right)^3\frac{\varkappa\varkappa'}{4}e^{\frac{\pi}{2}\frac{K'}{K}} = \varpi^6\left(\frac{q'}{q}\right)^{\frac{1}{2}}\chi_1^6(q')$$

---

erzielende Genauigkeit $e^{-\pi\frac{a^2}{r^2}}$ vernachlässigen zu dürfen, so erhält man für die numerische Berechnung von $\frac{1}{r}$

$$\frac{a}{r} = 1 + 2e^{-\pi\frac{r^2}{a^2}} + 2e^{-4\pi\frac{r^2}{a^2}} + 2e^{-9\pi\frac{r^2}{a^2}}\,..$$

eine Reihenentwickelung von ungemein rascher Convergenz, welche selbst nach r differentiirt werden kann. Zur Literatur vergleiche CAUCHY, *Bulletin de la société philomatique, Août* 1817, *p.* 124 und LIOUVILLE's Journal T. V, p. 156, so wie POISSON, *Journal de l'école polyt. Cah.* 19 (1823) *p.* 420, JACOBI, CRELLE's Journal, Bd. 3, S. 308.

*) Um ohne Vermittelung der Thetafunctionen den früher zur Berechnung von q benutzten Satz zu beweisen, dass der Uebergang zum arithmetischen und geometrischen Mittel, oder was dasselbe ist, die Verwandlung von $\varkappa$ in $\varkappa_1 = \frac{1-\varkappa'}{1+\varkappa'}$ dem Uebergange von q in q^2 entspricht, braucht man bloss in der Gleichung

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{d\varphi}{\sqrt{m^2\sin^2\varphi + n^2\cos^2\varphi}} = \int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{d\varphi_1}{\sqrt{m_1^2\sin^2 2\varphi_1 + n_1^2\cos^2 2\varphi_1}}$$

$$= \int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{d\varphi}{\sqrt{m_1^2\sin^2\varphi + n_1^2\cos^2\varphi}} = \frac{K}{m}$$

welche sich mittelst der Substitution $m\,\mathrm{tg}^2\varphi = n\,\mathrm{tg}^2\varphi_1$ ergibt, m und n mit m_1 und $l_1 = \sqrt{m_1^2 - n_1^2}$ zu vertauschen. Dadurch geht

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{d\varphi}{\sqrt{m_1^2\sin^2\varphi + l_1^2\cos^2\varphi}} = 2\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{d\varphi}{\sqrt{m^2\sin^2\varphi + l^2\cos^2\varphi}} = \frac{2K'}{m}$$

hervor, wo $\frac{l}{m} = \varkappa$, $\frac{n}{m} = \varkappa'$, $\frac{l_1}{m_1} = \varkappa_1$, $\frac{n_1}{m_1} = \varkappa_1'$. Man schliesst daraus unmittelbar, dass die Verhältnisse $l_1 : m_1 : n_1$ von $\frac{2K'}{K}$ oder von q^2 ebenso abhängen, wie die Verhältnisse $l : m : n$ von $\frac{K'}{K}$ oder von q. Q. e. d.

$$\chi_2^{12}(q) = \frac{\varkappa^2}{16\varkappa'} e^{\pi\frac{K'}{K}} = \frac{1}{64 q q'^{\frac{1}{2}}} \chi^{12}(q')$$

$$\chi_3^{12}(q) = \frac{4}{\varkappa\varkappa'} e^{-\frac{\pi}{2}\frac{K'}{K}} = \left(\frac{q}{q'}\right)^{\frac{1}{2}} \chi_3^{12}(q')$$

Die Differentialgleichungen, denen diese Functionen genügen, finden sich zusammengestellt in den *Berichten der K. S. Gesellschaft*, 1862, S. 115 f.; doch ist daselbst $\chi_2\ \chi_3\ \chi_4$ an Stelle von $\chi\ \chi_2\ \chi_3$ geschrieben. Man erhält:

$$24q\left\{3q\frac{\chi_1''}{\chi_1} - 9q\left(\frac{\chi_1'}{\chi_1}\right)^2 + 2\frac{\chi_1'}{\chi_1}\right\} = 1 + \vartheta^4\vartheta_2^4 - \vartheta_3^8 = 1 - \frac{1}{2}(\vartheta^8 + \vartheta_2^8 + \vartheta_3^8)$$

$$24q\frac{\chi'}{\chi} = 1 - \vartheta_2^4 - \vartheta_3^4$$

$$24q\frac{\chi_2'}{\chi_2} = -2 + \vartheta^4 + \vartheta_3^4$$

$$24q\frac{\chi_3'}{\chi_3} = 1 - \vartheta^4 + \vartheta_2^4$$

40.

Da vermöge des Uebergangs von x zu y die Amplitude φ als bekannt vorausgesetzt werden darf, so liegt die Berechnung von u' mit Hülfe von u auf der Hand. Dagegen kann es wünschenswerth sein, ebenso wie sich q' ohne Vermittelung von q direct aus $\varkappa'$ oder $\varkappa$ finden lässt, auch u' direct aus φ abzuleiten. Dann ist zugleich φ' mittelst der Gleichung

$$\sqrt{\varkappa}\,\mathrm{tg}\,\varphi' = \frac{\vartheta_1(u'q')}{\vartheta_2(u'q')}$$

bestimmt*). Zu diesem Zwecke setze man entweder mit LEGENDRE

$$\sin(2\psi' - \varphi) = \varkappa\sin\varphi\ , \qquad \lambda = \frac{2\sqrt{\varkappa}}{1+\varkappa}$$

wodurch nach Art. 35 q^2 in q und $2u$ in u, oder was dasselbe ist, q' in q'^2 und u in $\frac{1}{2}u$ übergeht. Damit bleibt u' unverändert, weil

*) JACOBI empfiehlt dazu die Formel (Werke Bd. II, S. 9, N. 5)

$$\mathrm{tg}\tfrac{1}{2}(\varphi' - u') = \frac{q'(1-q'^2)\sin 2u' - q'^6(1-q'^4)\sin 4u' + q'^{15}(1-q'^6)\sin 6u' \mp \ldots}{1 - q'(1+q'^2)\cos 2u' + q'^6(1+q'^4)\cos 4u' - q'^{15}(1+q'^6)\cos 6u' \pm \ldots}$$

als vorzugsweise bequem.

$$\frac{\Lambda'}{\Lambda} = \frac{K'}{2K} = \frac{u}{2u'}$$

sein soll. Folglich verwandelt sich

$$\frac{2Ku}{\pi} = \frac{2K'u'}{\pi} = \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\Delta(\varphi\,\varkappa)} \quad \text{in} \quad \frac{\Lambda u}{\pi} = \frac{2\Lambda'u'}{\pi} = \int_0^{\psi'} \frac{d\varphi}{\Delta(\varphi\,\lambda)}$$

Oder man gehe von der GAUSS'schen Formel aus

$$\operatorname{tg}\chi' = (1+\varkappa)\frac{\operatorname{tg}\varphi}{\Delta\varphi}, \qquad \lambda = \frac{2\sqrt{\varkappa}}{1+\varkappa}$$

welche gleichfalls dem Uebergange von q' in q'^2 entspricht, aber u unverändert lässt. Desshalb muss sich u' verdoppeln und man erhält

$$\frac{2\Lambda u}{\pi} = \frac{4\Lambda'u'}{\pi} = \int_0^{\chi'} \frac{d\varphi}{\Delta(\varphi\,\lambda)}$$

Durch Wiederholung dieser Transformationen findet man

$$u' = \frac{\pi}{2\Lambda_p'}\int_0^{\psi_p'} \frac{d\varphi}{\Delta(\varphi\,\lambda_p)} = \frac{\pi}{2^{p+2}\Lambda_p'}\int_0^{\chi_p'} \frac{d\varphi}{\Delta(\varphi\,\lambda_p)}$$

Hier nähern sich, wie bereits Art. 34 hervorgehoben, mit wachsendem p λ_p und $\frac{2\Lambda_p'}{\pi}$ der Einheit, während

$$\lim\int_0^{\psi_p'} \frac{d\varphi}{\Delta(\varphi\,\lambda_p)} = \int_0^{\psi_p'} \frac{d\varphi}{\cos\varphi} = \lg\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}+\psi_p'\right)$$

Damit bestimmt sich

$$u' = \lim\log\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}+\psi_p'\right) \qquad \text{oder} \qquad e^{-u'} = \lim\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}-\psi_p'\right)\text{*)}$$

Zur numerischen Berechnung setze man jetzt

$$l' = \lg\frac{1}{\varkappa}, \qquad \bar{\lambda} = \lg(1+\varkappa), \qquad l_1' = \frac{1}{2}l' + \bar{\lambda} - \lg 2 = \lg\frac{1}{\lambda},$$

$$\bar{\lambda}_1 = \lg(1+\lambda), \qquad l_2' = \frac{1}{2}l_1' + \bar{\lambda}_1 - \lg 2 = \lg\frac{1}{\lambda_1}, \quad \text{etc.}$$

$$\lg\sin(2\psi'-\varphi) = \lg\sin\varphi - l', \qquad \lg\sin(2\psi_1'-\psi') = \lg\sin\psi' - l_1', \quad \text{etc.}$$

$$\lg q' = \lg\frac{\varkappa'\varkappa'}{16} + l' - \frac{3}{2}\left(l_1' + \frac{1}{2}l_2' + \frac{1}{4}l_3' + \ldots\right)$$

---

*) Man vergleiche die JACOBI'sche Formel (Werke Bd. II, S. 10, N. 7), welche geschrieben werden kann

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right) = e^{-u'}\frac{\theta(u'-\frac{1}{2}\lg q',\ q'^2)}{\theta(u'+\frac{1}{2}\lg q',\ q'^2)}$$

welche Formeln eine sehr expedite Berechnungsweise gewähren.

Bei Benutzung des Winkels χ_p' wird analog

$$u' = \lim \frac{1}{2^{p+1}} \lg \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} + \chi_p'\right)$$

Da jetzt $\lim \chi_p' = \frac{\pi}{2}$, so darf man den gefundenen Ausdruck auch mit

$$u' = \lim \frac{1}{2^{p+1}} \lg \frac{2}{\Delta \chi_p'} = \lim \frac{1}{2^{p+1}} \lg \frac{2}{\cos \chi_p'} = \lim \frac{1}{2^{p+1}} \lg (2 \operatorname{tg} \chi_p')$$

vertauschen und zur bequemen Berechnung nach Belieben die Gleichungen

$$\operatorname{tg} \chi' = (1 + \varkappa) \frac{\operatorname{tg} \varphi}{\Delta \varphi} \qquad \text{oder} \qquad \operatorname{tg}^2 \tfrac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} + \chi'\right) = \frac{\operatorname{tg}^2 \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} + \varphi\right) + \lambda'}{\operatorname{tg}^2 \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) + \lambda'}$$

anwenden, wo für $\varkappa' = \sin 2\varepsilon'$

$$\lambda' = \operatorname{tg}^2 \tfrac{1}{2}\varepsilon' = \sin 2\varepsilon_1' , \quad \lambda_1' = \operatorname{tg}^2 \tfrac{1}{2}\varepsilon_1' = \sin 2\varepsilon_2' \quad \text{etc.}$$

41.

Untersuchen wir jetzt die Reductionsformeln der Artt. 20 und 24 mit Bezug auf die Grösse des Moduls $\varkappa$. Hierbei sind je nach den Vorzeichen von $G^3 - 27H^2$ und von H vier Fälle zu unterscheiden.

1) $G^3 < 27H^2$. Dieser Fall tritt nur bei dem Beispiel des Art. 20 auf und liefert entgegengesetzte Vorzeichen von $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{C}$. Setzt man wie dort

$$\mu^2 = 12\lambda^2 - G$$

so ist für $\qquad \mathfrak{C} = 3\lambda + \mu > 0 , \qquad \mathfrak{A} = 3\lambda - \mu < 0$

$$\varkappa^2 = \frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{A} - \mathfrak{C}} = \frac{\mu - 3\lambda}{2\mu} , \qquad \varkappa'^2 = \frac{\mathfrak{C}}{\mathfrak{C} - \mathfrak{A}} = \frac{\mu + 3\lambda}{2\mu}$$

Ist nun $H > 0$, so wird, da λ von demselben Vorzeichen, $\varkappa'^2 > \varkappa^2$ und somit $\varkappa^2 < \frac{1}{2}$. Ist dagegen $H < 0$, so ergibt sich ebenso $\varkappa'^2 < \frac{1}{2}$.

2) $G^3 > 27H^2$. In diesem Falle erhält man neben den obigen Ausdrücken für $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{C}$ vermöge des Art. 24 die Werthe

$$\nu^2 = G - 3\lambda^2 , \qquad \mathfrak{B} = \tfrac{3}{2}\lambda + \tfrac{1}{2}\nu , \qquad \mathfrak{D} = \tfrac{3}{2}\lambda - \tfrac{1}{2}\nu$$

Da jetzt die sechs Grössen $\mathfrak{A}$ $\mathfrak{C}$ $\mathfrak{B}$ $\mathfrak{D}$ λ und H gleiche Vorzeichen besitzen, so wird für $H > 0$, nach Art. 20:

$$\mathfrak{C} > \mathfrak{A} > 0\,, \qquad \varkappa^2 = \frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{C}} = \frac{3\lambda - \mu}{3\lambda + \mu}\,, \qquad \varkappa'^2 = \frac{\mathfrak{C} - \mathfrak{A}}{\mathfrak{C}} = \frac{2\mu}{3\lambda + \mu}$$

Ferner nach Art. 24

$$\mathfrak{B} > \mathfrak{D} > 0\,, \qquad \varkappa^2 = \frac{\mathfrak{B} - \mathfrak{D}}{\mathfrak{B}} = \frac{2\nu}{3\lambda + \nu}\,, \qquad \varkappa'^2 = \frac{\mathfrak{D}}{\mathfrak{B}} = \frac{3\lambda - \nu}{3\lambda + \nu}.$$

Wie früher gezeigt worden, liegt λ^2 im gegenwärtigen Falle zwischen $\frac{1}{3}G$ und $\frac{1}{4}G$. Lässt man folglich G von $3\lambda^2$ bis $4\lambda^2$ wachsen, so ergeben sich für die Moduln des Art. 20 die Grenzen

$$0 < \varkappa^2 < \frac{3 - \sqrt{8}}{3 + \sqrt{8}}\,, \qquad 1 > \varkappa'^2 > \frac{2\sqrt{8}}{3 + \sqrt{8}}$$

und für die Moduln des Art. 24

$$0 < \varkappa^2 < \frac{1}{2}\,, \qquad 1 > \varkappa'^2 > \frac{1}{2}$$

Zugleich überzeugt man sich leicht, dass der Modul $\varkappa^2$ der ersten Reductionsmethode beständig der kleinere, also für die numerische Berechnung vortheilhaftere ist.

Anders gestaltet sich die Sache für $H < 0$. Dann hat man nach Art. 20

$$\mathfrak{A} < \mathfrak{C} < 0\,, \qquad \varkappa^2 = \frac{\mathfrak{A} - \mathfrak{C}}{\mathfrak{A}} = \frac{2\mu}{\mu - 3\lambda}\,, \qquad \varkappa'^2 = \frac{\mathfrak{C}}{\mathfrak{A}} = \frac{-\mu - 3\lambda}{\mu - 3\lambda}$$

ferner nach Art. 24

$$\mathfrak{D} < \mathfrak{B} < 0\,, \qquad \varkappa^2 = \frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{D}} = \frac{-\nu - 3\lambda}{\nu - 3\lambda}\,, \qquad \varkappa'^2 = \frac{\mathfrak{D} - \mathfrak{B}}{\mathfrak{D}} = \frac{2\nu}{\nu - 3\lambda}$$

Die Grenzen für $3\lambda^2 < G < 4\lambda^2$ werden resp.

$$1 > \varkappa^2 > \frac{2\sqrt{8}}{3 + \sqrt{8}}\,, \qquad 0 < \varkappa'^2 < \frac{3 - \sqrt{8}}{3 + \sqrt{8}}$$

$$1 > \varkappa^2 > \frac{1}{2}\,, \qquad 0 < \varkappa'^2 < \frac{1}{2}$$

also gerade umgekehrt wie vorhin. Man schliesst daraus, dass zwar die zweite Reductionsmethode einen kleineren Modul $\varkappa^2 > \frac{1}{2}$, dagegen die erstere einen kleineren Werth von $\varkappa'^2 < \frac{1}{2}$ hervorbringt. Eine Vertauschung der Wurzeln $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{C}$ oder $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{D}$ der betreffenden quadratischen Gleichungen hat auf die gefundenen Resultate selbstverständlich keinen Einfluss.

Durch Vergleichung der Ergebnisse sämmtlicher Fälle geht hervor, dass wenn man den Vortheil des kleinsten Moduls erreichen will, die erste Reductionsmethode stets zum Ziele führt, allerdings für $H < 0$ unter Anwendung des complementären Moduls. Für $G^3 > 27 H^2$ wird jener kleinste Werth des Modulquadrats nicht allein $< \frac{1}{2}$, sondern $< \frac{3-\sqrt{8}}{3+\sqrt{8}} = 0.0294373$, mithin das zugehörige $q < 0.0018674$, also für die Convergenz der Thetareihen ganz besonders günstig.

42.

Wir wenden uns zur Reduction des allgemeinen elliptischen Integrals von der Form

$$\Omega = \int_{x_0}^{x} X \frac{dx}{\xi} = \int_0^z X dz$$

wo X eine beliebige rationale Function von x und ξ bedeutet. Ersetzt man zunächst durch successive Anwendung der Gleichungen des Art. 1

$$\xi = py + p_1 , \qquad x = \frac{\eta - q_1}{q}$$

x und ξ durch y und η, welche gleichzeitig mit x und ξ reell sind, so wird X eine rationale Function von y und η. Da ferner η^2 rational von y abhängt, so kann man stets schreiben

$$X = F(y, \eta) = F_1(y) + \eta F_2(y)$$

wo F_1 und F_2 y allein rational enthalten. Damit wird wegen $dz = -\frac{dy}{\eta}$

$$\Omega = \int_0^z F_1 dz - \int_{y_0}^{y} F_2 dy$$

Mit dem zweiten, elementaren Integrale brauchen wir uns nicht zu beschäftigen und setzen desshalb der Kürze halber

$$\Omega = \int_0^z F_1(y) dz$$

Da sich jede rationale Function von y in Glieder von der Form

$$cy^m \quad \text{und} \quad \frac{c}{(y-p)^n}$$

zerlegen lässt, so entspringen hieraus Integrale von der Form

$$v_m = \int_0^z y^m dz \qquad \text{und} \qquad w_n = \int_0^z \frac{dz}{(y-p)^n}$$

in denen der Parameter p nicht zwischen y_0 und y liegen darf, wenn bei reellem Integrationswege die Integrale endlich bleiben sollen.

Wenn nach Art. 23

$$\eta^2 = 4y(\mathfrak{B}y^2 + 3\lambda y + \mathfrak{D})$$

gemacht worden ist, so zeigt man leicht, dass die Werthe sämmtlicher v_m und w_n auf die drei Integrale v_1 w_1 und z reducirt werden können. In der That braucht man dazu bloss die Recursionsformeln abzuleiten

$$(2m+1)\mathfrak{B}v_{m+1} + 6m\lambda v_m + (2m-1)\mathfrak{D}v_{m-1} = \frac{1}{2}(y_0^{m-1}\eta_0 - y^{m-1}\eta)$$

$$(n+1)p(\mathfrak{B}p^2 + 3\lambda p + \mathfrak{D})w_{n+2} + (2n+1)(3\mathfrak{B}p^2 + 6\lambda p + \mathfrak{D})w_{n+1} + 6n(\mathfrak{B}p + \lambda)w_n$$
$$+ (2n-1)\mathfrak{B}w_{n-1} = \frac{1}{2}\left\{\frac{\eta}{(y-p)^{n+1}} - \frac{\eta_0}{(y_0-p)^{n+1}}\right\}$$

$$(\mathfrak{B}p^2 + 3\lambda p + \mathfrak{D})pw_2 + (3\mathfrak{B}p^2 + 6\lambda p + \mathfrak{D})w_1 + \mathfrak{B}pz = \mathfrak{B}v_1 + \frac{1}{2}\left(\frac{\eta}{y-p} - \frac{\eta_0}{y_0-p}\right)$$

Wenn dagegen nach Art. 19

$$\eta^2 = \mathfrak{A}y^4 - 6\lambda y^2 + \mathfrak{C}$$

so hat man zuvörderst $F_1(y)$ mittelst der Gleichungen

$$F_1(y) + F_1(-y) = 2F(y^2)\,, \qquad F_1(y) - F_1(-y) = 4yF_0(y^2)$$

in einen geraden und einen ungeraden Theil zu zerfällen, wodurch

$$\Omega = \int_0^z F(y^2)\,dz - \int_{y_0}^y F_0(y^2)\frac{2y\,dy}{\eta}$$

Hier bestimmt sich wiederum das zweite Integral, welches für $t = y^2$ sich auf

$$\int_{t_0}^t \frac{F_0(t)\,dt}{\sqrt{\mathfrak{A}t^2 - 6\lambda t + \mathfrak{C}}}$$

reducirt, durch elementare Mittel, wesshalb es genügt

$$\Omega = \int_0^z F(y^2)\,dz$$

zu betrachten. Zerlegt man nun $F(y^2)$ in Glieder von der Form

$$c'y^{2m} \quad \text{und} \quad \frac{c}{(y^2-p)^n}$$

wobei $F(p)=\infty$ wird und der Werth von $\sqrt{p}$ nicht zwischen y_0 und y liegen darf, so bleiben für ganze positive Werthe von m und n die Integrale

$$v_m=\int_0^z y^{2m}dz \qquad \text{und} \qquad w_n=\int_0^z \frac{dz}{(y^2-p)^n}$$

zu untersuchen, wo offenbar $w_n=\frac{1}{n-1}\frac{\partial w_{n-1}}{\partial p}$.

Die beiden recurrirenden Relationen

$$(2m+1)\mathfrak{A}v_{m+1}-12m\lambda v_m+(2m-1)\mathfrak{C}v_{m-1}=y_0^{2m-1}\eta_0-y^{2m-1}\eta$$

$$2(n+1)p(\mathfrak{A}p^2-6\lambda p+\mathfrak{C})w_{n+2}+(2n+1)(3\mathfrak{A}p^2-12\lambda p+\mathfrak{C})w_{n+1}+6n(\mathfrak{A}p-2\lambda)w_n$$
$$+(2n-1)\mathfrak{A}w_{n-1}=\frac{y\eta}{(y^2-p)^{n+1}}-\frac{y_0\eta_0}{(y_0^2-p)^{n+1}}$$

welche durch Differentiation leicht verificirt werden können, gestatten die Berechnung von v_m und w_n aus den drei Integralen z, v_1 und w_1, welche seit Legendre als elliptische Integrale der ersten, zweiten und dritten Gattung bezeichnet werden. Für $n=1$ wird w_3 durch $w_2\, w_1$ und $w_0=z$ bestimmt, für $n=0$ ergibt sich w_2 durch w_1 und $w_{-1}=\int_0^z(y^2-p)\,dz=v_1-pz$. Zugleich zeigt sich, da man auch m negative Werthe beilegen darf, dass der Fall $p=0$ auf Integrale der ersten und zweiten Gattung führt, sofern für $p=0$, $m=-n$

$$w_n=v_{-n} \quad \text{und} \quad (2n+1)\mathfrak{C}v_{-n-1}-12n\lambda v_{-n}+(2n-1)\mathfrak{A}v_{1-n}=\frac{\eta}{y^{2n+1}}-\frac{\eta_0}{y_0^{2n+1}}$$

woraus für $n=0$

$$\mathfrak{C}v_{-1}=\mathfrak{A}v_1+\frac{\eta}{y}-\frac{\eta_0}{y_0}$$

Natürlich kann dieser Fall für $y_0=0$ nicht eintreten.

Bei dem Beispiele des Art. 26 endlich würden Integrale von der Form

$$v_m=\int_y^\infty\frac{y^m dy}{\sqrt{4y^3-Gy-H}}=\int_0^z y^m dz$$

unendlich werden, also können nur Integrale

$$w_n=\int_0^z\frac{dz}{(y-p)^n}=\int_y^\infty\frac{dy}{(y-p)^n\eta}$$

vorkommen, für welche die Gleichung gilt

$$(n+1)(4p^3 - Gp - H)\, w_{n+2} + (2n+1)\left(6p^2 - \tfrac{1}{2}G\right) w_{n+1} + 12np\,w_n$$
$$+ 2(2n-1)\, w_{n-1} = \frac{\eta}{(y-p)^{n+1}}$$

Es bleiben mithin w_1 und $w_2 = \frac{\partial w_1}{\partial p}$ neben z zu bestimmen.

43.

Da sich z und u nur durch einen constanten Factor unterscheiden, sei

$$z = ru\ , \qquad v_1 = rv\ , \qquad w_1 = rw$$

oder

$$v = \int_0^u y^2\,du\ , \qquad w = \int_0^u \frac{du}{y^2 - p}$$

Dabei ist es offenbar gleichgültig, ob man die canonische Form

$$w = \int_0^u \frac{du}{y^2 - p} \qquad \text{oder} \qquad w = \int_0^u \frac{du}{y - p}$$

wählt, da nicht allein

$$\int \frac{du}{y-p} = \int \frac{y\,du}{y^2 - p^2} + p \int \frac{du}{y^2 - p^2}$$

wo das erste Integral auf elementarem Wege angebbar ist, sondern auch

$$\int \frac{du}{y^2 - p} = \frac{1}{2\sqrt{p}} \left\{ \int \frac{du}{y - \sqrt{p}} - \int \frac{du}{y + \sqrt{p}} \right\}$$

gefunden wird.

Wenn die Function $F(y)$ als reell vorausgesetzt wird, so sind die Wurzeln p der Gleichung $\frac{1}{F(y)} = 0$ entweder reell oder von der conjugirten Form $\alpha \pm \beta i$. Mithin erhält man im letzteren Fall ein reelles Aggregat von der Form

$$\sum \frac{c}{(y^2 - p)^n} = \sum \left\{ \frac{a + bi}{(y^2 - \alpha - \beta i)^n} + \frac{a - bi}{(y^2 - \alpha + \beta i)^n} \right\}$$

so dass man für $n = 1$ in reeller Form das Integral

$$\int_0^u \frac{a(y^2 - \alpha) - b\beta}{(y^2 - \alpha)^2 + \beta^2}\, du$$

zu untersuchen haben würde. Da jedoch

$$w = \int_0^u \frac{du}{y^2 - \alpha - \beta i} = \int_0^u \frac{y^2 - \alpha + \beta i}{(y^2 - \alpha)^2 + \beta^2} du$$

so kommt jene Untersuchung im Grunde auf die Betrachtung des reellen und imaginären Theils von w für $p = \alpha + \beta i$ heraus: mit anderen Worten, wir werden bei der Reduction der Integrale der dritten Gattung auch complexe Werthe des Parameters p berücksichtigen müssen, während die Werthe aller übrigen Grössen als reell vorausgesetzt werden sollen.

Die verschiedenen Formen der Integrale u der ersten Gattung finden sich bereits Art. 33 übersichtlich zusammengestellt, es kann sich also zur vollständigen Reduction des ursprünglich vorgelegten z nur noch um Angabe des Factors r handeln. Die Bestimmung dieser Grösse folgt unmittelbar aus den Formeln der Art. 20, 24 und 41

für $G^3 < 27 H^2$ ergibt sich $r = \frac{2\mathrm{K}}{\pi\sqrt{2\mu}}$, $\mu^2 = 12\lambda^2 - G$

für $G^3 > 27 H^2$, $H > 0$: $r = \frac{2\mathrm{K}\varkappa'}{\pi\sqrt{2\mu}}$

$H < 0$: $r = \frac{2\mathrm{K}\varkappa}{\pi\sqrt{2\mu}}$

Nach Art. 24 dagegen wird für $\nu^2 = G - 3\lambda^2$

für $G^3 > 27 H^2$, $H > 0$: $r = -\frac{2\mathrm{K}\varkappa}{\pi\sqrt{\nu}}$

$H < 0$: $r = \frac{2\mathrm{K}\varkappa'}{\pi\sqrt{\nu}}$

Es muss hier auf einen Umstand aufmerksam gemacht werden, dessen schon Art. 19 u. folgg. hätte gedacht werden sollen. Wenn die Radicale ξ und η, resp. $\xi_1\ \xi_2\ \eta_1\ \eta_2$ sowie $\Delta\varphi$, nicht allein reell, sondern auch positiv genommen werden sollen, so zeigt die Gleichung des Art. 19

$$dz = \frac{dx}{\xi} = -\frac{dy}{\sqrt{\mathfrak{A}y^4 - (\mathfrak{A} + \mathfrak{C})y^2 + \mathfrak{C}}}$$

dass y mit wachsendem x abnehmen muss. Die an sich gestattete Vertauschung der beiden, der nämlichen quadratischen Gleichung angehörigen, Wurzeln $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{C}$ äquivalirt offenbar dem Uebergange

von y in seinen inversen Werth, und in Uebereinstimmung damit steht das Resultat des Art. 21, demzufolge

$$2(X-\lambda) = \mu\frac{1+y}{1-y} \quad \text{für} \quad \mathfrak{E} > \mathfrak{A} \qquad \text{und} \qquad = \mu\frac{y+1}{y-1} \quad \text{für} \quad \mathfrak{E} < \mathfrak{A}$$

gefunden worden ist. Nun hat

$$z = \int_{x_0}^{x}\frac{dx}{\xi} = \int_{y}^{1}\frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(\mathfrak{E}-\mathfrak{A}y^2)}} = -\int_{1}^{y}\frac{dy}{\sqrt{(y^2-1)(\mathfrak{A}y^2-\mathfrak{E})}}$$

nicht allein das Vorzeichen von $x-x_0$, sondern ist auch positiv für $\mathfrak{E} > \mathfrak{A}$, negativ für $\mathfrak{A} > \mathfrak{E}$. Daraus folgt, dass $\mathfrak{E} - \mathfrak{A} = 2\mu$ von gleichem Vorzeichen mit $x-x_0$ bestimmt werden muss. Dasselbe lehrt die Gleichung des Art. 21

$$\frac{\xi_1\xi_2^0+\xi_1^0\xi_2}{x-x_0} = \sqrt{\mathfrak{E}-\mathfrak{A}}\sqrt{\frac{1+y}{1-y}} \qquad \text{resp.} \qquad \frac{\xi_1\xi_2^0+\xi_1^0\xi_2}{x_0-x} = \sqrt{\mathfrak{A}-\mathfrak{E}}\sqrt{\frac{y+1}{y-1}}$$

Die Ursache dieser auf den ersten Blick befremdenden Beschränkung erkennt man in dem früher gefundenen Ausdrucke für η (siehe Art. 22), welcher mit dem Factor $x-x_0$ das Vorzeichen umkehrt, also ebensowohl positiv wie negativ sein kann. Es darf diess nicht auffallen, denn die Gleichung $f(x\,y) = 0$ ist im Grunde als das vollständige Integral von $\frac{dx^2}{f} = \frac{dy^2}{\mathfrak{f}}$ anzusehen, und je nachdem x und y gleichzeitig wachsen, oder nicht, ist dafür

$$\frac{dx}{\xi} = \frac{dy}{\eta} \qquad \text{oder} \qquad \frac{dx}{\xi} + \frac{dy}{\eta} = 0$$

mit positiven Vorzeichen der Wurzelgrössen ξ und η zu setzen*). Eine Schwierigkeit bei der von uns betrachteten reellen Reduction kann daraus nicht entstehen, weil über das Vorzeichen des Integrals z kein Zweifel möglich ist.

Analoge Betrachtungen gelten für den Fall der Transformation des Art. 23 flg. Hier gehen durch Vertauschung von $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{D}$ die Fälle des Art. 24 unmittelbar in einander über: es muss aber für

*) Bereits Art. 5 des 1. Abschnittes ist darauf hingewiesen worden, dass die Integralgleichung $X = Y$ zur Differentialgleichung $\frac{dx}{\xi} = \pm\frac{dy}{\eta}$ gehört. Es wäre vielleicht übersichtlicher gewesen, bei den Transformationsformeln der Artt. 19 u. folgg. von der offenbar ohne Beeinträchtigung der Allgemeinheit gestatteten Voraussetzung $x > x_0$ auszugehen, und danach die Vorzeichen der Radicale zu bestimmen.

$H > 0$ das Radical η (oder nach der Transformation $\Delta\varphi$) von gleichem Vorzeichen mit $x_0 - x$, für $H < 0$ mit $x - x_0$ gewählt werden, ganz im Einklange mit dem Art. 25 für η aufgestellten Ausdrucke. Hierauf wird man bei der Bestimmung des Vorzeichens des Factors r Rücksicht zu nehmen haben.

44.

Zur Berechnung der elliptischen Integrale zweiter Gattung gehen wir von den dritten logarithmischen Differentialquotienten der Thetafunctionen aus:

$$\left(\frac{d}{du}\right)^3 \lg \vartheta u = -2\vartheta_1'\vartheta_1' \frac{\vartheta_1 u\, \vartheta_2 u\, \vartheta_3 u}{\vartheta^3 u}, \qquad \left(\frac{d}{du}\right)^3 \lg \vartheta_1 u = 2\vartheta_1'\vartheta_1' \frac{\vartheta u\, \vartheta_2 u\, \vartheta_3 u}{\vartheta_1^3 u}$$

$$\left(\frac{d}{du}\right)^3 \lg \vartheta_2 u = -2\vartheta_1'\vartheta_1' \frac{\vartheta u\, \vartheta_1 u\, \vartheta_3 u}{\vartheta_2^3 u}, \qquad \left(\frac{d}{du}\right)^3 \lg \vartheta_3 u = 2\vartheta_1'\vartheta_1' \frac{\vartheta u\, \vartheta_1 u\, \vartheta_2 u}{\vartheta_3^3 u}$$

Die Integration dieser Ausdrücke zwischen den geeigneten Grenzen ergibt wegen $\vartheta_1' = \vartheta\vartheta_2\vartheta_3$

$$\left(\frac{d}{du}\right)^2 \lg \vartheta u = \frac{\vartheta''}{\vartheta} - \vartheta_2^2\vartheta_3^2 \frac{\vartheta_1^2 u}{\vartheta^2 u} = \frac{\vartheta_2''}{\vartheta_2} + \vartheta^2\vartheta_3^2 \frac{\vartheta_3^2 u}{\vartheta^2 u} = \frac{\vartheta_3''}{\vartheta_3} + \vartheta^2\vartheta_2^2 \frac{\vartheta_2^2 u}{\vartheta^2 u}$$

$$\left(\frac{d}{du}\right)^2 \lg \vartheta_1 u = \frac{\vartheta''}{\vartheta} - \vartheta_2^2\vartheta_3^2 \frac{\vartheta^2 u}{\vartheta_1^2 u} = \frac{\vartheta_2''}{\vartheta_2} - \vartheta^2\vartheta_3^2 \frac{\vartheta_2^2 u}{\vartheta_1^2 u} = \frac{\vartheta_3''}{\vartheta_3} - \vartheta^2\vartheta_2^2 \frac{\vartheta_3^2 u}{\vartheta_1^2 u}$$

$$\left(\frac{d}{du}\right)^2 \lg \vartheta_2 u = \frac{\vartheta''}{\vartheta} - \vartheta_2^2\vartheta_3^2 \frac{\vartheta_3^2 u}{\vartheta_2^2 u} = \frac{\vartheta_2''}{\vartheta_2} - \vartheta^2\vartheta_3^2 \frac{\vartheta_1^2 u}{\vartheta_2^2 u} = \frac{\vartheta_3''}{\vartheta_3} - \vartheta^2\vartheta_2^2 \frac{\vartheta^2 u}{\vartheta_2^2 u}$$

$$\left(\frac{d}{du}\right)^2 \lg \vartheta_3 u = \frac{\vartheta''}{\vartheta} - \vartheta_2^2\vartheta_3^2 \frac{\vartheta_2^2 u}{\vartheta_3^2 u} = \frac{\vartheta_2''}{\vartheta_2} + \vartheta^2\vartheta_3^2 \frac{\vartheta^2 u}{\vartheta_3^2 u} = \frac{\vartheta_3''}{\vartheta_3} + \vartheta^2\vartheta_2^2 \frac{\vartheta_1^2 u}{\vartheta_3^2 u}$$

Die vorstehenden Gleichungen stimmen überein mit den am Schlusse des Art. 1 für $\frac{d^2 \lg p}{dz^2}$ und $\frac{d^2 \lg q}{dz^2}$ entwickelten Formeln, wenn entweder $B = D = 0$ oder $A = E = 0$ gesetzt werden.

Integrirt man die obigen Gleichungen nochmals zwischen 0 und u, so erhält man die Integrale zweiter Gattung

$$\frac{\vartheta' u}{\vartheta u} = u\frac{\vartheta''}{\vartheta} - \vartheta_2^2\vartheta_3^2 \int_0^u \frac{\vartheta_1^2 u}{\vartheta^2 u} du = u\frac{\vartheta_2''}{\vartheta_2} + \vartheta^2\vartheta_3^2 \int_0^u \frac{\vartheta_3^2 u}{\vartheta^2 u} du$$
$$= u\frac{\vartheta_3''}{\vartheta_3} + \vartheta^2\vartheta_2^2 \int_0^u \frac{\vartheta_2^2 u}{\vartheta^2 u} du$$

$$\frac{\vartheta_2' u}{\vartheta_2 u} = u\frac{\vartheta''}{\vartheta} - \vartheta_2^2\vartheta_3^2 \int_0^u \frac{\vartheta_3^2 u}{\vartheta_2^2 u} du = u\frac{\vartheta''}{\vartheta_2} - \vartheta^2\vartheta_3^2 \int_0^u \frac{\vartheta_1^2 u}{\vartheta_2^2 u} du$$
$$= u\frac{\vartheta_3''}{\vartheta_3} - \vartheta^2\vartheta_2^2 \int_0^u \frac{\vartheta^2 u}{\vartheta_2^2 u} du$$

$$\frac{\vartheta_3' u}{\vartheta_3 u} = u\frac{\vartheta''}{\vartheta} - \vartheta_2^2\vartheta_3^2\int_0^u \frac{\vartheta_2^2 u}{\vartheta_3^2 u}\,du = u\frac{\vartheta_2''}{\vartheta_2} + \vartheta^2\vartheta_3^2\int_0^u \frac{\vartheta^2 u}{\vartheta_3^2 u}\,du$$
$$= u\frac{\vartheta_3''}{\vartheta_3} + \vartheta^2\vartheta_2^2\int_0^u \frac{\vartheta_1^2 u}{\vartheta_3^2 u}\,du$$

während durch Integration zwischen den Grenzen u und $\frac{1}{2}\pi$ sich die Formeln

$$\frac{\vartheta' u}{\vartheta u} = -\left(\frac{\pi}{2}-u\right)\frac{\vartheta''}{\vartheta} + \vartheta_2^2\vartheta_3^2\int_u^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\vartheta_1^2 u}{\vartheta^2 u}\,du = -\left(\frac{\pi}{2}-u\right)\frac{\vartheta_2''}{\vartheta_2} - \vartheta^2\vartheta_3^2\int_u^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\vartheta_3^2 u}{\vartheta^2 u}\,du$$
$$= -\left(\frac{\pi}{2}-u\right)\frac{\vartheta_3''}{\vartheta_3} - \vartheta^2\vartheta_2^2\int_u^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\vartheta_2^2 u}{\vartheta^2 u}\,du$$
$$\frac{\vartheta_1' u}{\vartheta_1 u} = -\left(\frac{\pi}{2}-u\right)\frac{\vartheta''}{\vartheta} + \vartheta_2^2\vartheta_3^2\int_u^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\vartheta^2 u}{\vartheta_1^2 u}\,du = -\left(\frac{\pi}{2}-u\right)\frac{\vartheta_2''}{\vartheta_2} + \vartheta^2\vartheta_3^2\int_u^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\vartheta_2^2 u}{\vartheta_1^2 u}\,du$$
$$= -\left(\frac{\pi}{2}-u\right)\frac{\vartheta_3''}{\vartheta_3} + \vartheta^2\vartheta_2^2\int_u^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\vartheta_3^2 u}{\vartheta_1^2 u}\,du$$
$$\frac{\vartheta_3' u}{\vartheta_3 u} = -\left(\frac{\pi}{2}-u\right)\frac{\vartheta''}{\vartheta} + \vartheta_2^2\vartheta_3^2\int_u^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\vartheta_2^2 u}{\vartheta_3^2 u}\,du = -\left(\frac{\pi}{2}-u\right)\frac{\vartheta_2''}{\vartheta_2} - \vartheta^2\vartheta_3^2\int_u^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\vartheta^2 u}{\vartheta_3^2 u}\,du$$
$$= -\left(\frac{\pi}{2}-u\right)\frac{\vartheta_3''}{\vartheta_3} - \vartheta^2\vartheta_2^2\int_u^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\vartheta_1^2 u}{\vartheta_3^2 u}\,du$$

ergeben. Mithin folgen die Werthe der *ganzen* Integrale zweiter Gattung

$$\frac{\vartheta'' 0}{\vartheta 0} = -4q\frac{\vartheta' q}{\vartheta q} = \frac{2}{\pi}\vartheta_2^2\vartheta_3^2\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\vartheta_1^2 u}{\vartheta^2 u}\,du = \frac{2}{\pi}\vartheta_2^2\vartheta_3^2\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\vartheta_2^2 u}{\vartheta_3^2 u}\,du$$
$$\frac{\vartheta_2'' 0}{\vartheta_2 0} = -4q\frac{\vartheta_2' q}{\vartheta_2 q} = -\frac{2}{\pi}\vartheta^2\vartheta_3^2\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\vartheta_3^2 u}{\vartheta^2 u}\,du = -\frac{2}{\pi}\vartheta^2\vartheta_3^2\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\vartheta^2 u}{\vartheta_3^2 u}\,du$$
$$\frac{\vartheta_3'' 0}{\vartheta_3 0} = -4q\frac{\vartheta_3' q}{\vartheta_3 q} = -\frac{2}{\pi}\vartheta^2\vartheta_2^2\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\vartheta_2^2 u}{\vartheta^2 u}\,du = -\frac{2}{\pi}\vartheta^2\vartheta_2^2\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\vartheta_1^2 u}{\vartheta_3^2 u}\,du$$

nebst

$$\vartheta^4 = \frac{\vartheta_3''}{\vartheta_3} - \frac{\vartheta_2''}{\vartheta_2}, \qquad \vartheta_2^4 = \frac{\vartheta''}{\vartheta} - \frac{\vartheta_3''}{\vartheta_3}, \qquad \vartheta_3^4 = \frac{\vartheta''}{\vartheta} - \frac{\vartheta_2''}{\vartheta_2}$$

Dazu kommen die Differentialformeln des Art. 33, welche sich offenbar in der Gestalt schreiben lassen

$$\frac{\vartheta_1' u}{\vartheta_1 u} - \frac{\vartheta' u}{\vartheta u} = \vartheta^2\frac{\vartheta_2 u\,\vartheta_3 u}{\vartheta u\,\vartheta_1 u}, \qquad \frac{\vartheta_3' u}{\vartheta_3 u} - \frac{\vartheta_2' u}{\vartheta_2 u} = \vartheta^2\frac{\vartheta u\,\vartheta_1 u}{\vartheta_2 u\,\vartheta_3 u}$$
$$\frac{\vartheta_1' u}{\vartheta_1 u} - \frac{\vartheta_2' u}{\vartheta_2 u} = \vartheta_2^2\frac{\vartheta u\,\vartheta_3 u}{\vartheta_1 u\,\vartheta_2 u}, \qquad \frac{\vartheta' u}{\vartheta u} - \frac{\vartheta_3' u}{\vartheta_3 u} = \vartheta_2^2\frac{\vartheta_1 u\,\vartheta_2 u}{\vartheta u\,\vartheta_3 u}$$
$$\frac{\vartheta_1' u}{\vartheta_1 u} - \frac{\vartheta_3' u}{\vartheta_3 u} = \vartheta_3^2\frac{\vartheta u\,\vartheta_2 u}{\vartheta_1 u\,\vartheta_3 u}, \qquad \frac{\vartheta' u}{\vartheta u} - \frac{\vartheta_2' u}{\vartheta_2 u} = \vartheta_3^2\frac{\vartheta_1 u\,\vartheta_3 u}{\vartheta u\,\vartheta_2 u}$$

so dass sämmtliche Integrale zweiter Gattung nach Belieben von einem der vier logarithmischen Differentialquotienten der Thetafunctionen abhängig gemacht werden können.

45.

Setzt man

$$v = \int_0^u y^2\,du\,, \qquad \mathfrak{v} = \int_u^{\frac{1}{2}\pi} y^2\,du$$

so erhält man für $y = \sin\varphi$

$$v = \frac{1}{\vartheta_2^4}\left(u\frac{\vartheta''}{\vartheta} - \frac{\vartheta' u}{\vartheta u}\right) = \frac{1}{\vartheta_2^4}\left(u\frac{\vartheta''}{\vartheta} - \frac{\vartheta_1' u}{\vartheta_1 u} + \vartheta^2\frac{\vartheta_2 u\,\vartheta_3 u}{\vartheta u\,\vartheta_1 u}\right)$$

$$= \frac{1}{\vartheta_2^4}\left(u\frac{\vartheta''}{\vartheta} - \frac{\vartheta_2' u}{\vartheta_2 u} - \vartheta_3^2\frac{\vartheta_1 u\,\vartheta_3 u}{\vartheta u\,\vartheta_2 u}\right) = \frac{1}{\vartheta_2^4}\left(u\frac{\vartheta''}{\vartheta} - \frac{\vartheta_3' u}{\vartheta_3 u} - \vartheta_2^2\frac{\vartheta_1 u\,\vartheta_2 u}{\vartheta u\,\vartheta_3 u}\right)$$

u. s. w. In der folgenden Tabelle soll nur der erste Werth aufgeführt werden. Man findet die zusammengehörigen Ausdrücke:

$$y = \sin\varphi\,,\quad v = \frac{1}{\vartheta_2^4}\left(u\frac{\vartheta''}{\vartheta} - \frac{\vartheta' u}{\vartheta u}\right),\quad \mathfrak{v} = \frac{1}{\vartheta_2^4}\left(\frac{\vartheta' u}{\vartheta u} + \left(\frac{\pi}{2} - u\right)\frac{\vartheta''}{\vartheta}\right)$$

$$y = \frac{1}{\sin\varphi}\,,\quad \mathfrak{v} = \frac{1}{\vartheta_3^4}\left(\frac{\vartheta_1' u}{\vartheta_1 u} + \left(\frac{\pi}{2} - u\right)\frac{\vartheta''}{\vartheta}\right)$$

$$y = \cos\varphi\,,\quad v = \frac{1}{\vartheta_2^4}\left(\frac{\vartheta' u}{\vartheta u} - u\frac{\vartheta_3''}{\vartheta_3}\right),\quad \mathfrak{v} = -\frac{1}{\vartheta_2^4}\left(\frac{\vartheta' u}{\vartheta u} + \left(\frac{\pi}{2} - u\right)\frac{\vartheta_3''}{\vartheta_3}\right)$$

$$y = \frac{1}{\cos\varphi}\,,\quad v = \frac{1}{\vartheta^4}\left(u\frac{\vartheta_3''}{\vartheta_3} - \frac{\vartheta_2' u}{\vartheta_2 u}\right),$$

$$y = \varDelta\varphi\,,\quad v = \frac{1}{\vartheta_3^4}\left(\frac{\vartheta' u}{\vartheta u} - u\frac{\vartheta_2''}{\vartheta_2}\right),\quad \mathfrak{v} = -\frac{1}{\vartheta_3^4}\left(\frac{\vartheta' u}{\vartheta u} + \left(\frac{\pi}{2} - u\right)\frac{\vartheta_2''}{\vartheta_2}\right)$$

$$y = \frac{1}{\varDelta\varphi}\,,\quad v = \frac{1}{\vartheta^4}\left(\frac{\vartheta_3' u}{\vartheta_3 u} - u\frac{\vartheta_2''}{\vartheta_2}\right),\quad \mathfrak{v} = -\frac{1}{\vartheta^4}\left(\frac{\vartheta_3' u}{\vartheta_3 u} + \left(\frac{\pi}{2} - u\right)\frac{\vartheta_2''}{\vartheta_2}\right)$$

$$y = \operatorname{tg}\varphi\,,\quad v = \frac{1}{\vartheta^4}\left(u\frac{\vartheta_2''}{\vartheta_2} - \frac{\vartheta_2' u}{\vartheta_2 u}\right),$$

$$y = \frac{1}{\operatorname{tg}\varphi}\,,\quad \mathfrak{v} = \frac{1}{\vartheta_3^4}\left(\frac{\vartheta_1' u}{\vartheta_1 u} + \left(\frac{\pi}{2} - u\right)\frac{\vartheta_2''}{\vartheta_2}\right)$$

$$y = \frac{\sin\varphi}{\varDelta\varphi}\,,\quad v = \frac{\vartheta_3^4}{\vartheta^4\vartheta_2^4}\left(\frac{\vartheta_3' u}{\vartheta_3 u} - u\frac{\vartheta_3''}{\vartheta_3}\right),\quad \mathfrak{v} = -\frac{\vartheta_3^4}{\vartheta^4\vartheta_2^4}\left(\frac{\vartheta_3' u}{\vartheta_3 u} + \left(\frac{\pi}{2} - u\right)\frac{\vartheta_3''}{\vartheta_3}\right)$$

$$y = \frac{\varDelta\varphi}{\sin\varphi}\,,\quad \mathfrak{v} = \frac{1}{\vartheta_3^4}\left(\frac{\vartheta_1' u}{\vartheta_1 u} + \left(\frac{\pi}{2} - u\right)\frac{\vartheta_3''}{\vartheta_3}\right)$$

$$y = \frac{\cos\varphi}{\Delta\varphi}\,, \qquad v = \frac{1}{\vartheta_2^4}\left(u\frac{\vartheta''}{\vartheta} - \frac{\vartheta_3' u}{\vartheta_3 u}\right)\,, \qquad \mathfrak{v} = \frac{1}{\vartheta_2^4}\left(\frac{\vartheta_3' u}{\vartheta_3 u} + \left(\frac{\pi}{2} - u\right)\frac{\vartheta''}{\vartheta}\right)$$

$$y = \frac{\Delta\varphi}{\cos\varphi}\,, \qquad v = \frac{1}{\vartheta_3^4}\left(u\frac{\vartheta''}{\vartheta} - \frac{\vartheta_2' u}{\vartheta_2 u}\right)$$

Die offen gelassenen Stellen würden unendliche Werthe enthalten.

Hiezu kommen die Werthe der sechs g a n z e n Integrale:

$$\frac{\vartheta''}{\vartheta} = \frac{2}{\pi}\vartheta_2^4\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\sin^2\varphi\, du = \frac{2}{\pi}\vartheta_2^4\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{\cos^2\varphi}{\Delta^2\varphi}du$$

$$\frac{\vartheta_2''}{\vartheta_2} = -\frac{2}{\pi}\vartheta_3^4\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\Delta^2\varphi\, du = -\frac{2}{\pi}\vartheta^4\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{du}{\Delta^2\varphi}$$

$$\frac{\vartheta_3''}{\vartheta_3} = -\frac{2}{\pi}\vartheta_2^4\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\cos^2\varphi\, du = -\frac{2}{\pi}\frac{\vartheta^4\vartheta_2^4}{\vartheta_3^4}\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{\sin^2\varphi}{\Delta^2\varphi}du$$

Es ist leicht, diese Ausdrücke numerisch zu berechnen, entweder direct durch die Reihen

$$\vartheta'' = 8(q - 4q^4 + 9q^9 - 16q^{16} \pm \ldots)$$

$$\vartheta_2'' = -2q^{\frac{1}{4}}(1 + 9q^2 + 25q^6 + 49q^{12} + \ldots)$$

$$\vartheta_3'' = -8(q + 4q^4 + 9q^9 + 16q^{16} + \ldots)$$

oder mittelst der Hülfsgrössen l und λ des Art. 38. Hierzu bilde man mit JACOBI*) die Summe

$$\vartheta'' + \vartheta_3'' = -64q^4(1 + 4q^{12} + 9q^{32} + \ldots)$$

$$= (\vartheta + \vartheta_3)\frac{\vartheta''}{\vartheta} - \vartheta_2^4\vartheta_3$$

$$= (\vartheta + \vartheta_3)\frac{\vartheta_2''}{\vartheta_2} + \vartheta\vartheta_3(\vartheta^3 + \vartheta_3^3)$$

$$= (\vartheta + \vartheta_3)\frac{\vartheta_3''}{\vartheta_3} + \vartheta\vartheta_2^4$$

wodurch mit Vernachlässigung von $4q^{12}$

$$\lg\frac{\vartheta''}{\vartheta} = 4\lg\vartheta_2 - \lg(1 + \sqrt{\varkappa'}) + \lg\left(1 - \frac{64q^4}{\vartheta_2^4\vartheta_3}\right)$$

$$\lg\left(-\frac{\vartheta_2''}{\vartheta_2}\right) = 4\lg\vartheta_3 - \lg\frac{1 + \sqrt{\varkappa'}}{\varkappa'\varkappa' + \sqrt{\varkappa'}} + \lg\left(1 + \frac{64q^4}{\vartheta_3^5(\varkappa'\varkappa' + \sqrt{\varkappa'})}\right)$$

$$\lg\left(-\frac{\vartheta_3''}{\vartheta_3}\right) = 4\lg\vartheta_2 - \lg\left(1 + \frac{1}{\sqrt{\varkappa'}}\right) + \lg\left(1 + \frac{64q^4}{\vartheta\vartheta_2^4}\right)$$

---

*) Vergl. JACOBI in der bereits citirten Abhandlung CRELLE's Journal, Bd. 26, S. 96, so wie die Habilitationsschrift des Verf. *Ueber die Berechnung einer Gattung von Functionen etc.* 1853, S. 28.

Hier hat man

$$\lg(1+\sqrt{x'}) = \frac{1}{2}\lg(1+x')(1+x'_1) = \frac{1}{2}(\lambda+\lambda_1)$$

während

$$\varDelta = -\lg\left(1-\frac{64q^4}{\vartheta_2^4\vartheta_3}\right) = \lg\frac{x}{x-1}$$

in der Tafel der sogenannten Subtractionslogarithmen zum Argumente

$$L = \lg x = \lg\frac{\vartheta_2^4\vartheta_3}{64q^4} = 6(\lambda-\lg\varkappa)+\frac{1}{4}(l+10l_1+6\lambda_2-5l_3)-\varrho$$

gehört*). Analog wird

$$\lg\left(1+\frac{1}{\sqrt{x'}}\right) = \frac{1}{2}(l+\lambda+\lambda_1)$$

$$\lg\left(1+\frac{64q^4}{\vartheta\vartheta_2^4}\right) = \lg\left(1+\frac{1}{x}\right),$$

letzterer Werth aus der Tafel der Additionslogarithmen zum Argumente

$$\lg x = L-\frac{1}{2}l$$

zu entnehmen. Der Werth von $\frac{\vartheta''_2}{\vartheta_2}$ wird wohl bequemer mittelst der Gleichung berechnet

$$\lg\left(-\frac{\vartheta''_2}{\vartheta_2}\right) = 4\lg\vartheta_3+\lg\left(1-\frac{\vartheta''}{\vartheta\vartheta_3^4}\right)$$

wo $-\lg\left(1-\frac{\vartheta''}{\vartheta\vartheta_3^4}\right)$ in der Subtractionstafel dem Argumente

$$\lg\frac{\vartheta\vartheta_3^4}{\vartheta''} = \varDelta-2\lg\varkappa+\frac{1}{2}(\lambda+\lambda_1)$$

entspricht. Ebenso kann man setzen

$$\lg\left(-\frac{\vartheta''_3}{\vartheta_3}\right) = 4\lg\vartheta_2+\lg\left(1-\frac{\vartheta''}{\vartheta\vartheta_2^4}\right)$$

$$\lg\frac{\vartheta\vartheta_2^4}{\vartheta''} = \varDelta+\frac{1}{2}(\lambda+\lambda_1)$$

---

*) Die oben durch ϱ bezeichnete Grösse

$$\varrho = \lg(1+4q^{12}+9q^{32}\ldots)+\frac{1}{2}l_4+\frac{7}{8}l_5\ldots$$

darf in dem Argumente L unbedenklich vernachlässigt werden, falls $\varkappa^2$ der Einheit nicht äusserst nahe liegt.

46.

Die im Eingange des Art. 34 entwickelten Gleichungen gestatten gewisse Umformungen, deren Richtigkeit sofort in die Augen springt. Man erhält

$$\left(\frac{\vartheta_2 u}{\vartheta_2}\right)^2 \frac{\Delta\varphi}{\cos\varphi} = \frac{\vartheta_2(u, q^{\frac{1}{2}})}{\vartheta_2(q^{\frac{1}{2}})} \qquad \text{nebst} \qquad \frac{\vartheta_2 u}{\vartheta_2} = \frac{\vartheta_2^2(u, q^2)}{\vartheta_2^2(q^2)} \frac{\Delta\chi}{\cos\chi}$$

$$\left(\frac{\vartheta_1 u}{\vartheta_2}\right)^2 \frac{1}{\sin\varphi} = \frac{\vartheta_1(u, q^{\frac{1}{2}})}{\vartheta_2(q^{\frac{1}{2}})} \qquad \frac{\vartheta_1 u}{\vartheta_2} = \frac{\vartheta_1^2(u, q^2)}{\vartheta_2^2(q^2)} \frac{1}{\sin\chi}$$

$$\left(\frac{\vartheta u}{\vartheta}\right)^2 \Delta\varphi = \frac{\vartheta(2u, q^2)}{\vartheta(q^2)} \qquad \frac{\vartheta u}{\vartheta} = \frac{\vartheta^2(\frac{1}{2}u, q^{\frac{1}{2}})}{\vartheta^2(q^{\frac{1}{2}})} \Delta\psi'$$

$$\left(\frac{\vartheta_1 u}{\vartheta}\right)^2 \frac{1}{\operatorname{tg}\varphi} = \frac{\vartheta_1(2u, q^2)}{\vartheta(q^2)} \qquad \frac{\vartheta_1 u}{\vartheta} = \frac{\vartheta_1^2(\frac{1}{2}u, q^{\frac{1}{2}})}{\vartheta^2(q^{\frac{1}{2}})} \frac{1}{\operatorname{tg}\psi'}$$

$$\left(\frac{\vartheta_2 u}{\vartheta_2}\right)^2 \frac{1}{\cos\varphi} = \frac{\vartheta_2(u, iq^{\frac{1}{2}})}{\vartheta_2(iq^{\frac{1}{2}})} \qquad \frac{\vartheta_2 u}{\vartheta_2} = \frac{\vartheta_2^2(u, -q^2)}{\vartheta_2^2(-q^2)} \frac{1}{\cos\omega}$$

$$\left(\frac{\vartheta_1 u}{\vartheta_2}\right)^2 \frac{\Delta\varphi}{\varkappa'\sin\varphi} = \frac{\vartheta_1(u. iq^{\frac{1}{2}})}{\vartheta_2(iq^{\frac{1}{2}})} \qquad \frac{\vartheta_1 u}{\vartheta_2} = \frac{\vartheta_1^2(u, -q^2)}{\vartheta_2^2(-q^2)} \frac{\Delta\omega}{\varrho'\sin\omega}$$

und hieraus durch logarithmische Differentiation

$$\frac{\vartheta_2' u}{\vartheta_2 u} = \frac{1}{2}\frac{\vartheta_2'(u, q^{\frac{1}{2}})}{\vartheta_2(u, q^{\frac{1}{2}})} - \frac{\Lambda\lambda'}{\pi}\operatorname{tg}\chi' = 2\frac{\vartheta_2'(u, q^2)}{\vartheta_2(u, q^2)} + \frac{2K\varkappa'}{\pi}\operatorname{tg}\varphi$$

$$\frac{\vartheta_1' u}{\vartheta_1 u} = \frac{1}{2}\frac{\vartheta_1'(u, q^{\frac{1}{2}})}{\vartheta_1(u, q^{\frac{1}{2}})} + \frac{\Lambda}{\pi}\cot\chi' = 2\frac{\vartheta_1'(u, q^2)}{\vartheta_1(u, q^2)} - \frac{2K}{\pi}\cot\varphi$$

$$\frac{\vartheta' u}{\vartheta u} = \frac{\vartheta'(2u, q^2)}{\vartheta(2u, q^2)} + \frac{2M\mu}{\pi}\sin\psi = \frac{\vartheta'(\frac{1}{2}u, q^{\frac{1}{2}})}{\vartheta(\frac{1}{2}u, q^{\frac{1}{2}})} - \frac{2K\varkappa}{\pi}\sin\varphi$$

$$\frac{\vartheta_1' u}{\vartheta_1 u} = \frac{\vartheta_1'(2u, q^2)}{\vartheta_1(2u, q^2)} + \frac{2M}{\pi}\frac{1}{\sin\psi} = \frac{\vartheta_1'(\frac{1}{2}u, q^{\frac{1}{2}})}{\vartheta_1(\frac{1}{2}u, q^{\frac{1}{2}})} - \frac{2K}{\pi}\frac{1}{\sin\varphi}$$

$$\frac{\vartheta_2' u}{\vartheta_2 u} = \frac{1}{2}\frac{\vartheta_2'(u, iq^{\frac{1}{2}})}{\vartheta_2(u, iq^{\frac{1}{2}})} - \frac{N\nu'}{\pi}\operatorname{tg}\omega' = 2\frac{\vartheta_2'(u, -q^2)}{\vartheta_2(u, -q^2)} + \frac{2K\varkappa'}{\pi}\operatorname{tg}\varphi$$

$$\frac{\vartheta_1' u}{\vartheta_1 u} = \frac{1}{2}\frac{\vartheta_1'(u, iq^{\frac{1}{2}})}{\vartheta_1(u, iq^{\frac{1}{2}})} + \frac{N}{\pi}\cot\omega' = 2\frac{\vartheta_1'(u, -q^2)}{\vartheta_1(u, -q^2)} - \frac{2K}{\pi}\cot\varphi$$

Den entwickelten Formeln stehen die folgenden zur Seite

$$\left(\frac{\vartheta_3 u}{\vartheta_3}\right)^2 \frac{\cos\varphi}{\Delta\varphi} = \frac{\vartheta_3(u, q^{\frac{1}{2}})}{\vartheta_3(q^{\frac{1}{2}})} \frac{\cos\chi'}{\Delta\chi'}, \qquad \frac{\vartheta_3 u}{\vartheta_3} \frac{\cos\varphi}{\Delta\varphi} = \frac{\vartheta_3^2(u, q^2)}{\vartheta_3^2(q^2)} \frac{\cos\chi}{\Delta\chi}$$

$$\left(\frac{\vartheta u}{\vartheta}\right)^2 \varkappa' \sin\varphi = \frac{\vartheta(u, q^{\frac{1}{2}})}{\vartheta(q^{\frac{1}{2}})} \sqrt{\lambda'} \sin\chi', \qquad \frac{\vartheta u}{\vartheta} \sqrt{\varkappa'} \sin\varphi = \frac{\vartheta^2(u, q^2)}{\vartheta^2(q^2)} \mu' \sin\chi$$

$$\left(\frac{\vartheta_3 u}{\vartheta_3}\right)^2 \frac{1}{\Delta\varphi} = \frac{\vartheta_3(2u, q^2)}{\vartheta_3(q^2)} \frac{1}{\Delta\psi}, \qquad \frac{\vartheta_3 u}{\vartheta_3} \frac{1}{\Delta\varphi} = \frac{\vartheta_3^2(\frac{1}{2}u, q^{\frac{1}{2}})}{\vartheta_3^2(q^{\frac{1}{2}})} \frac{1}{\Delta\psi'}$$

$$\left(\frac{\vartheta_2 u}{\vartheta_2}\right)^2 \varkappa \operatorname{tg}\varphi = \frac{\vartheta_2(2u, q^2)}{\vartheta_2(q^2)} \sqrt{\mu} \operatorname{tg}\psi, \qquad \frac{\vartheta_2 u}{\vartheta_2} \sqrt{\varkappa} \operatorname{tg}\varphi = \frac{\vartheta_2^2(\frac{1}{2}u, q^{\frac{1}{2}})}{\vartheta_2^2(q^{\frac{1}{2}})} \lambda \operatorname{tg}\psi'$$

$$\left(\frac{\vartheta u}{\vartheta}\right)^2 \cos\varphi = \frac{\vartheta(u, iq^{\frac{1}{2}})}{\vartheta(iq^{\frac{1}{2}})} \cos\omega', \qquad \frac{\vartheta u}{\vartheta} \cos\varphi = \frac{\vartheta^2(u, -q^2)}{\vartheta^2(-q^2)} \cos\omega$$

$$\left(\frac{\vartheta_3 u}{\vartheta_3}\right)^2 \frac{\sin\varphi}{\Delta\varphi} = \frac{\vartheta_3(u, iq^{\frac{1}{2}})}{\vartheta_3(iq^{\frac{1}{2}})} \sqrt{\nu'} \frac{\sin\omega'}{\Delta\omega'}, \qquad \frac{\vartheta_3 u}{\vartheta_3} \sqrt{\varkappa'} \frac{\sin\varphi}{\Delta\varphi} = \frac{\vartheta_3^2(u, -q^2)}{\vartheta_3^2(-q^2)} \frac{\sin\omega}{\Delta\omega}$$

welche differentiirt ergeben

$$\frac{\vartheta_3' u}{\vartheta_3 u} = \frac{1}{2} \frac{\vartheta_3'(u, q^{\frac{1}{2}})}{\vartheta_3(u, q^{\frac{1}{2}})} + \frac{\Lambda\lambda'}{\pi} \operatorname{tg}\chi' - \frac{\Lambda_1 \lambda_1'}{\pi} \operatorname{tg}\chi_1'$$

$$= 2 \frac{\vartheta_3'(u, q^2)}{\vartheta_3(u, q^2)} + \frac{2\Lambda\lambda'}{\pi} \operatorname{tg}\chi' - \frac{2K\varkappa'}{\pi} \operatorname{tg}\varphi$$

$$\frac{\vartheta' u}{\vartheta u} = \frac{1}{2} \frac{\vartheta'(u, q^{\frac{1}{2}})}{\vartheta(u, q^{\frac{1}{2}})} - \frac{\Lambda}{\pi} \cot\chi' + \frac{\Lambda_1}{\pi} \cot\chi_1'$$

$$= 2 \frac{\vartheta'(u, q^2)}{\vartheta(u, q^2)} - \frac{2\Lambda}{\pi} \cot\chi' + \frac{2K}{\pi} \cot\varphi$$

$$\frac{\vartheta_3' u}{\vartheta_3 u} = \frac{\vartheta_3'(2u, q^2)}{\vartheta_3(2u, q^2)} - \frac{2M\mu}{\pi} \sin\psi + \frac{2M_1\mu_1}{\pi} \sin\psi_1$$

$$= \frac{\vartheta_3'(\frac{1}{2}u, q^{\frac{1}{2}})}{\vartheta_3(\frac{1}{2}u, q^{\frac{1}{2}})} - \frac{4M\mu}{\pi} \sin\psi + \frac{4K\varkappa}{\pi} \sin\varphi$$

$$\frac{\vartheta_2' u}{\vartheta_2 u} = \frac{\vartheta_2'(2u, q^2)}{\vartheta_2(2u, q^2)} - \frac{2M}{\pi} \frac{1}{\sin\psi} + \frac{2M_1}{\pi} \frac{1}{\sin\psi_1}$$

$$= \frac{\vartheta_2'(\frac{1}{2}u, q^{\frac{1}{2}})}{\vartheta_2(\frac{1}{2}u, q^{\frac{1}{2}})} - \frac{4M}{\pi} \frac{1}{\sin\psi} + \frac{4K}{\pi} \frac{1}{\sin\varphi}$$

$$\frac{\vartheta' u}{\vartheta u} = \frac{1}{2}\frac{\vartheta'(u, iq^{\frac{1}{2}})}{\vartheta(u, iq^{\frac{1}{2}})} + \frac{N\nu'}{\pi}\operatorname{tg}\omega' - \frac{N_1\nu_1'}{\pi}\operatorname{tg}\omega_1'$$

$$= 2\frac{\vartheta'(u, -q^2)}{\vartheta(u, -q^2)} + \frac{2N\nu'}{\pi}\operatorname{tg}\omega' - \frac{2K\varkappa'}{\pi}\operatorname{tg}\varphi$$

$$\frac{\vartheta_3' u}{\vartheta_3 u} = \frac{1}{2}\frac{\vartheta_3'(u, iq^{\frac{1}{2}})}{\vartheta_3(u, iq^{\frac{1}{2}})} - \frac{N}{\pi}\cot\omega' + \frac{N_1}{\pi}\cot\omega_1'$$

$$= 2\frac{\vartheta_3'(u, -q^2)}{\vartheta_3(u, -q^2)} - \frac{2N}{\pi}\cot\omega' + \frac{2K}{\pi}\cot\varphi$$

Hier gehen durch den Uebergang von q in q^2 aus einander hervor

$$\ldots \chi_2' \; \chi_1' \; \chi' \; \varphi \; \chi \; \chi_1 \; \chi_2 \ldots$$
$$\ldots \lambda_2 \; \lambda_1 \; \lambda \; \varkappa \; \mu \; \mu_1 \; \mu_2 \ldots$$

während bei gleichzeitiger Verdoppelung von u die Reihenfolge gilt

$$\ldots \psi_2' \; \psi_1' \; \psi' \; \varphi \; \psi \; \psi_1 \; \psi_2 \ldots$$
$$\ldots \lambda_2 \; \lambda_1 \; \lambda \; \varkappa \; \mu \; \mu_1 \; \mu_2 \ldots$$

Die Verwandlung von q in $-q^2$ dagegen liefert die entsprechenden Werthe

$$\ldots \omega_2' \; \omega_1' \; \omega \; \varphi \; \omega \; \omega_1 \; \omega_2 \ldots$$
$$\ldots \nu_2 \; \nu_1 \; \nu \; \varkappa \; \varrho \; \varrho_1 \; \varrho_2 \ldots$$

für welche die Gleichungen gelten

$$\varrho' = \frac{1}{\mu'}, \quad \Delta\omega = \frac{1}{\Delta\chi}, \quad \varrho_1' = \frac{1}{\mu_1'}, \quad \Delta\omega_1 = \frac{1}{\Delta\chi_1} \ldots$$

$$\varrho = \frac{\mu i}{\mu'}, \quad \sin\omega = \frac{\mu'\sin\chi}{\Delta\chi}, \quad \cos\omega = \frac{\cos\chi}{\Delta\chi}, \quad \operatorname{tg}\omega = \mu'\operatorname{tg}\chi$$

47.

Die Ausdrücke des vorigen Artikels können dazu dienen, um die Logarithmen der Thetafunctionen und ihre Differentialquotienten in Reihen zu entwickeln. Wir erläutern diess an dem Beispiele von $\lg \vartheta u$ und $\frac{\vartheta' u}{\vartheta u}$. Man findet sogleich für $n = 2^p$

$$\frac{\vartheta u}{\vartheta} = \Delta^{-\frac{1}{2}}\varphi\, \Delta^{-\frac{1}{4}}\psi\, \Delta^{-\frac{1}{8}}\psi_1 \ldots \Delta^{-\frac{1}{n}}\psi_{p-2} \left[\frac{\vartheta(nu, q^n)}{\vartheta(q^n)}\right]^{\frac{1}{n}}$$

$$= \Delta\psi'\, \Delta^2\psi_1'\, \Delta^4\psi_2' \ldots \Delta^{\frac{n}{2}}\psi_{p-1}' \left[\frac{\vartheta\left(\frac{u}{n}, q^{\frac{1}{n}}\right)}{\vartheta(q^{\frac{1}{n}})}\right]^n$$

$$= \left(\frac{\sqrt{\lambda'}}{\varkappa'}\frac{\sin\chi'}{\sin\varphi}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{\sqrt{\lambda_1'}\sin\chi_1'}{\lambda'\sin\chi'}\right)^{\frac{1}{4}} \left(\frac{\sqrt{\lambda_2'}\sin\chi_2'}{\lambda_1'\sin\chi_1'}\right)^{\frac{1}{8}} \ldots \left(\frac{\sqrt{\lambda_{p-1}'}\sin\chi_{p-1}'}{\lambda_{p-2}'\sin\chi_{p-2}'}\right)^{\frac{1}{n}} \left[\frac{\vartheta(u, q^{\frac{1}{n}})}{\vartheta(q^{\frac{1}{n}})}\right]^{\frac{1}{n}}$$

$$= \frac{\mu'}{\sqrt{\varkappa'}}\frac{\sin\chi}{\sin\varphi} \left(\frac{\mu_1'\sin\chi_1}{\sqrt{\mu'}\sin\chi}\right)^2 \left(\frac{\mu_2'\sin\chi_2}{\sqrt{\mu_1'}\sin\chi_1}\right)^4 \ldots \left(\frac{\mu_{p-1}'\sin\chi_{p-1}}{\sqrt{\mu_{p-2}'}\sin\chi_{p-2}}\right)^{\frac{n}{2}} \left[\frac{\vartheta(u, q^n)}{\vartheta(q^n)}\right]^n$$

Berücksichtigt man die Gleichungen

$$\frac{\sqrt{\lambda'}}{\varkappa'}\frac{\sin\chi'}{\sin\varphi} = \frac{1 + \Delta\chi'}{2}, \qquad \frac{\mu'\sin\chi}{\sqrt{\varkappa'}\sin\varphi} = \frac{2}{1 + \Delta\varphi}$$

so folgt

$$\lg\frac{\vartheta u}{\vartheta} = -\frac{1}{2}\lg\Delta\varphi - \frac{1}{4}\lg\Delta\psi - \frac{1}{8}\lg\Delta\psi_1 \ldots - \frac{1}{n}\lg\Delta\psi_{p-2} + \frac{1}{n}\lg\frac{\vartheta(nu, q^n)}{\vartheta(q^n)}$$

$$= \lg\Delta\psi' + 2\lg\Delta\psi_1' + 4\lg\Delta\psi_2' \ldots + \frac{n}{2}\lg\Delta\psi_{p-1}' + n\lg\frac{\vartheta\left(\frac{u}{n}, q^{\frac{1}{n}}\right)}{\vartheta(q^{\frac{1}{n}})}$$

$$= \frac{1}{2}\lg(1 + \Delta\chi') + \frac{1}{4}\lg(1 + \Delta\chi_1') \;. + \frac{1}{n}\lg(1 + \Delta\chi_{p-1}') - \left(1 - \frac{1}{n}\right)\lg 2$$
$$+ \frac{1}{n}\lg\frac{\vartheta(u, q^{\frac{1}{n}})}{\vartheta(q^{\frac{1}{n}})}$$

$$= \lg\frac{2}{1 + \Delta\varphi} + 2\lg\frac{2}{1 + \Delta\chi} + 4\lg\frac{2}{1 + \Delta\chi_1} \ldots + \frac{n}{2}\lg\frac{2}{1 + \Delta\chi_{p-2}}$$
$$+ n\lg\frac{\vartheta(u, q^n)}{\vartheta(q^n)}$$

Die Convergenz dieser Ausdrücke für wachsende Werthe von p resp. n wird von der Beschaffenheit der Grenzwerthe der Restglieder abhängen. Da für $q < 1$ $\lim nq^n$ verschwindet, so hat man nicht allein

$$\lim\lg\frac{\vartheta(nu, q^n)}{\vartheta(q^n)} = 0 \qquad \text{sondern auch} \qquad \lim n\lg\frac{\vartheta(u, q^n)}{\vartheta(q^n)} = 0$$

so wie
$$\lim n\lg\frac{\vartheta(u, -q^n)}{\vartheta(-q^n)} = \lim n\lg\frac{\vartheta_3(u, q^n)}{\vartheta_3(q^n)} = 0$$

Um den Grenzwerth von $\frac{1}{n}\lg\frac{\vartheta(u, q^{\frac{1}{n}})}{\vartheta(q^{\frac{1}{n}})}$ zu finden, kann man sich der Ausdrücke des Art. 39 bedienen, welche

$$\lg\vartheta(u,q) = \lg\varpi - \frac{uu'}{\pi} + \lg\theta_2(u',q') \qquad \text{für} \qquad u' = \frac{\pi u}{\lg\frac{1}{q}}\,, \qquad \lg q' = \frac{\pi^2}{\lg q}$$

und folglich

$$\lg\frac{\vartheta(u,q^{\frac{1}{n}})}{\vartheta(q^{\frac{1}{n}})} = -\frac{nuu'}{\pi} + \lg\frac{\theta_2(nu',q'^n)}{\theta_2(q'^n)}$$

$$\frac{1}{n}\lg\frac{\vartheta(u,q^{\frac{1}{n}})}{\vartheta(q^{\frac{1}{n}})} = -\frac{uu'}{\pi} + \frac{1}{n}\lg\frac{(e^{nu'}+e^{-nu'}) + q'^{2n}(e^{3nu'}+e^{-3nu'}) + \ldots}{2(1+q'^{2n}+q'^{6n}\ldots)}$$

liefern. Für wachsende Werthe von n und $u' > 0$ ergibt sich daraus ohne Schwierigkeit

$$\lim\frac{1}{n}\lg\frac{\vartheta(u,q^{\frac{1}{n}})}{\vartheta(q^{\frac{1}{n}})} = -\frac{uu'}{\pi} + u' = \frac{u(\pi-u)}{\lg\frac{1}{q}} = u'\left(1+\frac{u'}{\lg q'}\right)$$

und eine nähere Untersuchung zeigt, da die linke Seite die Periode π besitzt*), dass die Gültigkeit dieser Gleichung auf das Intervall $0 < u \leqq \pi$ beschränkt ist.

Der zweite der oben gefundenen Ausdrücke für $\lg\frac{\vartheta u}{\vartheta}$ lässt offenbar kein unbeschränktes Wachsen von n zu; die übrigen ergeben die convergirenden Entwickelungen

$$\lg\frac{\vartheta u}{\vartheta} = -\frac{1}{2}\lg\varDelta\varphi - \frac{1}{4}\lg\varDelta\psi - \frac{1}{8}\lg\varDelta\psi_1 - \frac{1}{16}\lg\varDelta\psi_2 - \ldots$$

$$= \lg\frac{2}{1+\varDelta\varphi} + 2\lg\frac{2}{1+\varDelta\chi} + 4\lg\frac{2}{1+\varDelta\chi_1} + 8\lg\frac{2}{1+\varDelta\chi_2} + \ldots$$

$$= \frac{u(\pi-u)}{\lg\frac{1}{q}} - \lg 2 + \frac{1}{2}\lg(1+\varDelta\chi') + \frac{1}{4}\lg(1+\varDelta\chi_1') + \frac{1}{8}\lg(1+\varDelta\chi_2') + \ldots$$

letztere für $0 < \varphi < \pi$. Die beiden ersten Formeln hat Jacobi**) in der Gestalt

$$\frac{\vartheta u}{\vartheta} = \frac{2m}{m+\varDelta}\left(\frac{2m'}{m'+\varDelta'}\right)^2\left(\frac{2m''}{m''+\varDelta''}\right)^4\left(\frac{2m'''}{m'''+\varDelta'''}\right)^8\ldots$$

$$= \sqrt{\frac{m}{\varDelta}}\sqrt[4]{\frac{m'}{\varDelta_1}}\sqrt[8]{\frac{m''}{\varDelta_2}}\sqrt[16]{\frac{m'''}{\varDelta_3}}\ldots$$

$$\frac{\varDelta}{m} = \varDelta\varphi\,, \qquad \frac{\varDelta'}{m'} = \varDelta\chi\,, \qquad \frac{\varDelta_1}{m'} = \varDelta\psi\,, \qquad \ldots$$

---

*) In der vorhergehenden Formel für $\lg\vartheta(u,q)$ kommt auch der rechten Seite die Periode π zu.

**) Cf. Werke Bd. I, S. 16 u. 19.

gegeben, wobei zu bemerken, dass wegen $\Delta\varphi = \cos(2\psi' - \varphi)$, $\Delta\psi = \cos(2\varphi - \psi)$, etc. a. a. O. das Product

$$\cos^{-\frac{1}{2}}(2\varphi - \varphi_1)\cos^{-\frac{1}{4}}(2\varphi_1 - \varphi_2)\cos^{-\frac{1}{8}}(2\varphi_2 - \varphi_3)\ldots$$

den Werth von $\frac{\vartheta(2u, q^2)}{\vartheta(q^2)}$ darstellt, während *Fundam.* S. 151 die Entwickelung für $\frac{\vartheta}{\vartheta u}$ steht. Die dritte Formel ist besonders bequem, wenn $\varkappa$ der Einheit sehr nahe liegt.

Die directe Differentiation ergibt die Werthe der logarithmischen Differentialquotienten

$$\frac{\vartheta' u}{\vartheta u} = \frac{K\varkappa^2}{\pi}\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{\Delta\varphi}\ldots = \frac{K(1-\varkappa')}{\pi}\sin\psi\ldots = \frac{2M\mu}{\pi}\sin\psi\ldots$$

$$= \frac{2K\varkappa^2}{\pi}\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{1+\Delta\varphi}\ldots = \frac{2K(1-\varkappa')}{\pi}\cos\varphi\sin\chi\ldots = -\frac{2\Lambda}{\pi}\cot\chi' + \frac{2K}{\pi}\cot\varphi\ldots$$

$$\frac{\vartheta' u}{\vartheta u} + \frac{\pi - 2u}{\lg q} = -\frac{\Lambda\lambda^2}{\pi}\frac{\sin\chi'\cos\chi'}{1+\Delta\chi}\ldots = -\frac{2K\varkappa}{\pi}\sin\varphi\cos\chi'\ldots$$

$$= -\frac{\Lambda}{\pi}\cot\chi' + \frac{\Lambda_1}{\pi}\cot\chi_1'\ldots$$

in Uebereinstimmung mit den Resultaten des vorigen Artikels, und damit die Reihenentwickelungen für die unbestimmten Integrale zweiter Gattung:

$$\frac{\vartheta' u}{\vartheta u} = \frac{K(1-\varkappa')}{\pi}\left\{\sin\psi + \tfrac{1}{2}\sqrt{\mu_1}\sin\psi_1 + \tfrac{1}{4}\sqrt{\mu_1\mu_2}\sin\psi_2 + \tfrac{1}{8}\sqrt{\mu_1\mu_2\mu_3}\sin\psi_3\ldots\right\}$$

$$= \frac{2K(1-\varkappa')}{\pi}\left\{\cos\varphi\sin\chi + \sqrt{\mu_1}\cos\chi\sin\chi_1 + \sqrt{\mu_1\mu_2}\cos\chi_1\sin\chi_2 + \right.$$
$$\left. + \sqrt{\mu_1\mu_2\mu_3}\cos\chi_2\sin\chi_3\ldots\right\}$$

$$= \frac{\pi - 2u}{\lg\frac{1}{q}} - \frac{2K\varkappa}{\pi}\left\{\sin\varphi\cos\chi' + \frac{1}{\sqrt{\varkappa}}\sin\chi'\cos\chi_1' + \frac{1}{\sqrt{\varkappa\lambda}}\sin\chi_1'\cos\chi_2' + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{\sqrt{\varkappa\lambda\lambda_1}}\sin\chi_2'\cos\chi_3'\ldots\right\}$$

Die erste und zweite Formel kommen mit den von Legendre und Gauss gegebenen Entwickelungen überein*), die dritte Gleichung ist wiederum an die Bedingung $0 < \varphi < \pi$ geknüpft.

---

*) Legendre, *Traité des fonctions ellipt. T. I, p.* 109/13; Gauss, *Determ. attract. p.* 47, vergl. Jacobi, Werke Bd. I, S. 15 u. 18.

48.

Um ohne den Uebergang von q zu q' den Grenzwerth von $\frac{1}{n}\lg\frac{\vartheta(u, q^{\frac{1}{n}})}{\vartheta(q^{\frac{1}{n}})}$ zu finden, benutzen wir die Function

$$X(\omega, q) = 1-\omega\cdot 1-q\omega\cdot 1-q^2\omega\ldots = \prod_{p=0}^{\infty}(1-q^p\omega)$$

für welche bereits Euler die aus der Functionalgleichung

$$X(\omega, q) = (1-\omega)X(q\omega, q)$$

entspringenden Reihenentwickelungen

$$X\omega = \sum_0^{\infty}\frac{(-1)^n q^{\frac{1}{2}n(n-1)}\omega^n}{1-q\cdot 1-q^2\ldots 1-q^n}$$

$$\frac{1}{X\omega} = \sum_0^{\infty}\frac{\omega^n}{1-q\cdot 1-q^2\ldots 1-q^n}$$

angegeben hat. Mittelst derselben ergibt sich die Relation

$$X\left(\omega, \frac{1}{q}\right) = \frac{1}{X(q\omega, q)}$$

und ich habe bei einer früheren Gelegenheit angemerkt*), dass hieraus die Gleichungen

$$\chi\left(\frac{1}{q}\right) = \frac{1}{\chi(q)}, \qquad \chi_2\left(\frac{1}{q}\right) = \frac{1}{2\chi_2(q)}, \qquad \chi_3\left(\frac{1}{q}\right) = \frac{1}{\chi_3(q)}$$

hervorgehen, während

$$\frac{1}{\chi_1\left(\frac{1}{q}\right)} = 1-\frac{1}{1-q^2}+\frac{q^2}{1-q^2\cdot 1-q^4}-\frac{q^6}{1-q^2\cdot 1-q^4\cdot 1-q^6}\pm\ldots = 0$$

wird. Dieser Ausdruck hört somit auf, eine Function von q zu sein, so dass die Transscendente χ_1 für $\mathrm{mod}\, q > 1$ keinen Sinn mehr hat. Dasselbe gilt folglich von den vier Thetafunctionen, welche χ_1 als Factor enthalten.

Anders verhält es sich mit den vier Quotienten

$$\frac{\vartheta(u, q)}{\chi_1(q)}, \quad \frac{\vartheta_1(u, q)}{\chi_1(q)}, \quad \frac{\vartheta_2(u, q)}{\chi_1(q)} \quad \text{und} \quad \frac{\vartheta_3(u, q)}{\chi_1(q)}$$

welche sämmtlich gleichzeitig mit q in ihre reciproken Werthe übergehen, also der Functionalgleichung

*) S. Leipziger Berichte, 1862, S. 115.

$$f(q)\,f\left(\frac{1}{q}\right) = 1$$

genügen. Man darf daraus indessen nicht schliessen, dass für $q = 1$ diese Functionen der Einheit gleich werden. Vielmehr lehrt die Gleichung

$$\lg X(\omega, q) = \sum_{p=0}^{\infty} \lg(1 - q^p \omega) = -\sum_{p=1}^{\infty} \frac{\omega^p}{p(1-q^p)}$$

dass nicht allein $\lg X(\omega, \frac{1}{q}) = -\lg X(q\omega, q)$, sondern auch*)

$$\lim_{q=1} (1-q) \lg X(\omega, q) = -\left\{\omega + \frac{1}{4}\omega^2 + \frac{1}{9}\omega^3 + \frac{1}{16}\omega^4 + \ldots\right\}$$

Es geht also $\lg X(\omega, q)$ für $q = 1$ durch $\pm\infty$ hindurch.

Nun hat man für $\omega = e^{2ui}$

$$\lg \frac{\vartheta(u, q)}{\chi_1(q)} = \lg X(q\omega, q^2) + \lg X\left(\frac{q}{\omega}, q^2\right)$$

$$\lg \frac{\vartheta_1(u, q)}{\chi_1(q)} = \lg(2q^{\frac{1}{4}} \sin u) + \lg X(q^2\omega, q^2) + \lg X\left(\frac{q^2}{\omega}, q^2\right)$$

$$\lg \frac{\vartheta_2(u, q)}{\chi_1(q)} = \lg(2q^{\frac{1}{4}} \cos u) + \lg X(-q^2\omega, q^2) + \lg X\left(-\frac{q^2}{\omega}, q^2\right)$$

$$\lg \frac{\vartheta_3(u, q)}{\chi_1(q)} = \lg X(-q\omega, q^2) + \lg X\left(-\frac{q}{\omega}, q^2\right)$$

folglich

$$\frac{1}{n} \lg \frac{\vartheta(u, q^{\frac{1}{n}})}{\vartheta(q^{\frac{1}{n}})} = \frac{1}{n(1-q^{\frac{2}{n}})} (1-q^{\frac{2}{n}}) \left\{\lg X(q^{\frac{1}{n}}\omega, q^{\frac{2}{n}}) + \lg X\left(\frac{q^{\frac{1}{n}}}{\omega}, q^{\frac{2}{n}}\right) - 2\lg\chi(q^{\frac{1}{n}})\right\}$$

$$\frac{1}{n} \lg \frac{\vartheta_1(u, q^{\frac{1}{n}})}{\vartheta_1'(q^{\frac{1}{n}})} = \frac{1}{n(1-q^{\frac{2}{n}})} (1-q^{\frac{2}{n}}) \left\{\lg \sin u + \lg X(q^{\frac{2}{n}}\omega, q^{\frac{2}{n}}) + \lg X\left(\frac{q^{\frac{2}{n}}}{\omega}, q^{\frac{2}{n}}\right) - \right.$$
$$\left. - 2\lg\chi_1(q^{\frac{1}{n}})\right\}$$

$$\frac{1}{n} \lg \frac{\vartheta_2(u, q^{\frac{1}{n}})}{\vartheta_2(q^{\frac{1}{n}})} = \frac{1}{n(1-q^{\frac{2}{n}})} (1-q^{\frac{2}{n}}) \left\{\lg \cos u + \lg X(-q^{\frac{2}{n}}\omega, q^{\frac{2}{n}}) + \right.$$
$$\left. + \lg X\left(-\frac{q^{\frac{2}{n}}}{\omega}, q^{\frac{2}{n}}\right) - 2\lg\chi_2(q^{\frac{1}{n}})\right\}$$

$$\frac{1}{n} \lg \frac{\vartheta_3(u, q^{\frac{1}{n}})}{\vartheta_3(q^{\frac{1}{n}})} = \frac{1}{n(1-q^{\frac{2}{n}})} (1-q^{\frac{2}{n}}) \left\{\lg X(-q^{\frac{1}{n}}\omega, q^{\frac{2}{n}}) + \lg X\left(-\frac{q^{\frac{1}{n}}}{\omega}, q^{\frac{2}{n}}\right) - \right.$$
$$\left. - 2\lg\chi_3(q^{\frac{1}{n}})\right\}$$

und wegen*)

*) Vergl. Leipziger Berichte, 1862, S. 112.

$$\lim_{n=\infty} n(1-q^{\frac{2}{n}}) = 2\lg\frac{1}{q}$$

$$\lim_{q=1}(1-q)\lg\chi(q) = \lim(1-q)\lg\chi_1(q) = -\frac{1}{12}\pi^2$$

$$\lim(1-q)\lg\chi_2(q) = \lim(1-q)\lg\chi_3(q) = \frac{1}{24}\pi^2$$

$$\lim\frac{1}{n}\lg\frac{\vartheta(u, q^{\frac{1}{n}})}{\vartheta(q^{\frac{1}{n}})} = \frac{1}{\lg\frac{1}{q}}\left\{\frac{\pi^2}{6} - \cos 2u - \frac{1}{4}\cos 4u - \frac{1}{9}\cos 6u - \text{etc.}\right\}$$

Die Cosinusreihe stellt in dem Intervalle $0 \leqq u \leqq \pi$ den Werth $u(\pi - u)$ dar, so dass

$$\lim\frac{1}{n}\lg\frac{\vartheta(u, q^{\frac{1}{n}})}{\vartheta(q^{\frac{1}{n}})} = \lim\frac{1}{n}\lg\frac{\vartheta_1(u, q^{\frac{1}{n}})}{\vartheta_1'(q^{\frac{1}{n}})} = \frac{u(\pi-u)}{\lg\frac{1}{q}}$$

$$\lim\frac{1}{n}\lg\frac{\vartheta_1(u, q^{\frac{1}{n}})}{\vartheta_2(q^{\frac{1}{n}})} = \lim\frac{1}{n}\lg\frac{\vartheta_1(u, q^{\frac{1}{n}})}{\vartheta_3(q^{\frac{1}{n}})} = \frac{\left(u-\frac{\pi}{2}\right)^2}{\lg q}$$

ferner

$$\lim\frac{1}{n}\lg\frac{\vartheta_2(u, q^{\frac{1}{n}})}{\vartheta_2(q^{\frac{1}{n}})} = \lim\frac{1}{n}\lg\frac{\vartheta_3(u, q^{\frac{1}{n}})}{\vartheta_3(q^{\frac{1}{n}})} = \frac{u^2}{\lg q}$$

Letzterer Werth entsteht aus der Reihe

$$\frac{\pi^2}{12} - \cos 2u + \frac{1}{4}\cos 4u - \frac{1}{9}\cos 6u \pm \text{etc.}$$

und gilt desshalb in dem Intervalle $-\frac{\pi}{2} \leqq u \leqq \frac{\pi}{2}$.

Durch Differentiation nach u endlich erhält man

$$\lim\frac{1}{n}\frac{\vartheta'(u, q^{\frac{1}{n}})}{\vartheta(u, q^{\frac{1}{n}})} = \lim\frac{1}{n}\frac{\vartheta_1'(u, q^{\frac{1}{n}})}{\vartheta_1(u, q^{\frac{1}{n}})} = \frac{2u-\pi}{\lg q}, \qquad 0 < u < \pi$$

$$\lim\frac{1}{n}\frac{\vartheta_2'(u, q^{\frac{1}{n}})}{\vartheta_2(u, q^{\frac{1}{n}})} = \lim\frac{1}{n}\frac{\vartheta_3'(u, q^{\frac{1}{n}})}{\vartheta_3(u, q^{\frac{1}{n}})} = \frac{2u}{\lg q}, \qquad -\frac{\pi}{2} < u < \frac{\pi}{2}$$

49.

Differentiirt man die Gleichungen

$$\lg\vartheta(u, q) = \lg\varpi - \frac{uu'}{\pi} + \lg\theta_2(u', q')$$

$$\lg\vartheta_1(u, q) = \lg\varpi - \frac{uu'}{\pi} + \lg\theta_1(u', q')$$

$$\lg \vartheta_2(u,q) = \lg \varpi - \frac{uu'}{\pi} + \lg \theta(u',q')$$

$$\lg \vartheta_3(u,q) = \lg \varpi - \frac{uu'}{\pi} + \lg \theta_3(u',q')$$

so ergeben sich sogleich die Ausdrücke

$$\frac{\vartheta' u}{\vartheta u} = \varpi^2 \frac{\theta_2' u'}{\theta_2 u'} - \frac{2u'}{\pi}, \qquad \frac{\vartheta_1' u}{\vartheta_1 u} = \varpi^2 \frac{\theta_1' u'}{\theta_1 u'} - \frac{2u'}{\pi}$$

$$\frac{\vartheta_2' u}{\vartheta_2 u} = \varpi^2 \frac{\theta' u'}{\theta u'} - \frac{2u'}{\pi}, \qquad \frac{\vartheta_3' u}{\vartheta_3 u} = \varpi^2 \frac{\theta_3' u'}{\theta_3 u'} - \frac{2u'}{\pi}$$

für

$$\varpi^2 = \frac{\pi}{\lg \frac{1}{q}} = \frac{\lg \frac{1}{q'}}{\pi}, \qquad u' = \varpi^2 u$$

und durch Wiederholung der Differentiation

$$\lg \frac{1}{q} \left\{ \frac{\vartheta'' u}{\vartheta u} - \left(\frac{\vartheta' u}{\vartheta u} \right)^2 \right\} = \lg \frac{1}{q'} \left\{ \frac{\theta_2'' u'}{\theta_2 u'} - \left(\frac{\theta_2' u'}{\theta_2 u'} \right)^2 \right\} - 2 \qquad \text{u. s. w.}$$

Für $u = 0$ folgt einfach

$$\frac{\vartheta''}{\vartheta} \lg q = \frac{\theta_2''}{\theta_2} \lg q' + 2, \qquad \frac{\vartheta_2''}{\vartheta_2} \lg q = \frac{\theta''}{\theta} \lg q' + 2, \qquad \frac{\vartheta_3''}{\vartheta_3} \lg q = \frac{\theta_3''}{\theta_3} \lg q' + 2$$

Man findet aber leicht neben

$$\theta(0,q') = \vartheta(0,q'), \qquad \theta''(0,q') = -\vartheta''(0,q')$$

$$\theta_2(0,q') = \vartheta_2(0,q'), \qquad \theta_2''(0,q') = -\vartheta_2''(0,q')$$

$$\theta_3(0,q') = \vartheta_3(0,q'), \qquad \theta_3''(0,q') = -\vartheta_3''(0,q')$$

mithin

$$\frac{\vartheta''(0,q)}{\vartheta(0,q)} \lg q + \frac{\vartheta_2''(0,q')}{\vartheta_2(0,q')} \lg q' = \frac{\vartheta_2''(0,q)}{\vartheta_2(0,q)} \lg q + \frac{\vartheta''(0,q')}{\vartheta(0,q')} \lg q' =$$

$$= \frac{\vartheta_3''(0,q)}{\vartheta_3(0,q)} \lg q + \frac{\vartheta_3''(0,q')}{\vartheta_3(0,q')} \lg q' = 2$$

eine Gleichung, welche mit der bekannten LEGENDRE'schen Formel*)

$$\frac{\pi}{2} = \mathrm{KE'} + \mathrm{K'E} - \mathrm{KK'} = 2\varkappa^2\varkappa'^2 \left(\mathrm{K'} \frac{\partial \mathrm{K}}{\partial \varkappa^2} + \mathrm{K} \frac{\partial \mathrm{K'}}{\partial \varkappa'^2} \right)$$

übereinkommt, wenn man $\mathrm{E} = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \Delta(\varphi, \varkappa)\, d\varphi$, $\mathrm{E'} = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \Delta(\varphi, \varkappa')\, d\varphi$ einführt.

---

*) *Traité, T. I, p.* 61.

Die Tabelle des Art. 45 kann jetzt in der Gestalt geschrieben werden:

$$y = \sin\varphi\,, \qquad v = \frac{1}{\varpi^2\theta^4}\left(u'\frac{\theta_2''}{\theta_2} - \frac{\theta_2'u'}{\theta_2u'}\right)$$

$$y = \cos\varphi\,, \qquad v = \frac{1}{\varpi^2\theta^4}\left(\frac{\theta_2'u'}{\theta_2u'} - u'\frac{\theta_3''}{\theta_3}\right)$$

$$y = \frac{1}{\cos\varphi}\,, \qquad v = \frac{1}{\varpi^2\theta_3^4}\left(u'\frac{\theta_3''}{\theta_3} - \frac{\theta'u'}{\theta u'}\right)$$

$$y = \varDelta\varphi\,, \qquad v = \frac{1}{\varpi^2\theta_3^4}\left(\frac{\theta_2'u'}{\theta_2u'} - u'\frac{\theta''}{\theta}\right)$$

$$y = \frac{1}{\varDelta\varphi}\,, \qquad v = \frac{1}{\varpi^2\theta_2^4}\left(\frac{\theta_3'u'}{\theta_3u'} - u'\frac{\theta''}{\theta}\right)$$

$$y = \operatorname{tg}\varphi\,, \qquad v = \frac{1}{\varpi^2\theta_2^4}\left(u'\frac{\theta''}{\theta} - \frac{\theta'u'}{\theta u'}\right)$$

$$y = \frac{\sin\varphi}{\varDelta\varphi}\,, \qquad v = \frac{\theta_3^4}{\varpi^2\theta^4\theta_2^4}\left(\frac{\theta_3'u'}{\theta_3u'} - u'\frac{\theta_3''}{\theta_3}\right)$$

$$y = \frac{\cos\varphi}{\varDelta\varphi}\,, \qquad v = \frac{1}{\varpi^2\theta^4}\left(u'\frac{\theta_2''}{\theta_2} - \frac{\theta_3'u'}{\theta_3u'}\right)$$

$$y = \frac{\varDelta\varphi}{\cos\varphi}\,, \qquad v = \frac{1}{\varpi^2\theta_3^4}\left(u'\frac{\theta_2''}{\theta_2} - \frac{\theta'u'}{\theta u'}\right)$$

Die entsprechenden Ausdrücke für die complementären Integrale $\mathfrak{v} = \int_u^{\frac{1}{2}\pi} y^2\,du$ werden etwas complicirter.

50.

Zur Ableitung der **Integrale dritter Gattung** gehen wir aus von dem JACOBI'schen Formelsystem, welches zwischen den Producten von vier Thetafunctionen verschiedener Argumente aufgestellt werden kann*).

$$
\begin{aligned}
1.\quad & 2\vartheta_3w\,\vartheta_3x\,\vartheta_3y\,\vartheta_3z = \Pi + \Pi_1 + \Pi_2 + \Pi_3\,, && \Pi = \vartheta_3\varpi\,\vartheta_3\xi\,\vartheta_3\eta\,\vartheta_3\zeta \\
& 2\vartheta_2w\,\vartheta_2x\,\vartheta_2y\,\vartheta_2z = \Pi + \Pi_1 - \Pi_2 - \Pi_3\,, && \Pi_1 = \vartheta_2\varpi\,\vartheta_2\xi\,\vartheta_2\eta\,\vartheta_2\zeta \\
& 2\vartheta_1w\,\vartheta_1x\,\vartheta_1y\,\vartheta_1z = \Pi - \Pi_1 + \Pi_2 - \Pi_3\,; && \Pi_2 = \vartheta_1\varpi\,\vartheta_1\xi\,\vartheta_1\eta\,\vartheta_1\zeta \\
& 2\vartheta w\,\vartheta x\,\vartheta y\,\vartheta z = \Pi - \Pi_1 - \Pi_2 + \Pi_3\,, && \Pi_3 = \vartheta\varpi\,\vartheta\xi\,\vartheta\eta\,\vartheta\zeta
\end{aligned}
$$

---

*) Ueber diese von JACOBI in seinen Vorlesungen gegebenen Formeln vergl. JACOBI's Brief an HERMITE (Math. Werke, Bd. I, S. 358; CRELLE's Journal, Bd. 32, S. 177; LIOUVILLE's Journal, Bd. XI, S. 98) und ROSENHAIN in seiner Pariser Preisschrift, S. 371.

2. $$2\vartheta w\,\vartheta x\,\vartheta_3 y\,\vartheta_3 z = \Pi+\Pi_1+\Pi_2+\Pi_3\,, \qquad \Pi = \vartheta\varpi\,\vartheta\xi\,\vartheta_3\eta\,\vartheta_3\zeta$$
$$2\vartheta_1 w\,\vartheta_1 x\,\vartheta_2 y\,\vartheta_2 z = \Pi+\Pi_1-\Pi_2-\Pi_3\,, \qquad \Pi_1 = \vartheta_1\varpi\,\vartheta_1\xi\,\vartheta_2\eta\,\vartheta_2\zeta$$
$$2\vartheta_2 w\,\vartheta_2 x\,\vartheta_1 y\,\vartheta_1 z = \Pi-\Pi_1+\Pi_2-\Pi_3\,, \qquad \Pi_2 = \vartheta_2\varpi\,\vartheta_2\xi\,\vartheta_1\eta\,\vartheta_1\zeta$$
$$2\vartheta_3 w\,\vartheta_3 x\,\vartheta y\,\vartheta z = \Pi-\Pi_1-\Pi_2+\Pi_3\,, \qquad \Pi_3 = \vartheta_3\varpi\,\vartheta_3\xi\,\vartheta\eta\,\vartheta\zeta$$

---

3. $$2\vartheta w\,\vartheta x\,\vartheta_2 y\,\vartheta_2 z = \Pi+\Pi_1+\Pi_2+\Pi_3\,, \qquad \Pi = \vartheta\varpi\,\vartheta\xi\,\vartheta_2\eta\,\vartheta_2\zeta$$
$$2\vartheta_1 w\,\vartheta_1 x\,\vartheta_3 y\,\vartheta_2 z = \Pi+\Pi_1-\Pi_2-\Pi_3\,, \qquad \Pi_1 = \vartheta_1\varpi\,\vartheta_1\xi\,\vartheta_3\eta\,\vartheta_3\zeta$$
$$2\vartheta_2 w\,\vartheta_2 x\,\vartheta y\,\vartheta z = \Pi-\Pi_1+\Pi_2-\Pi_3\,, \qquad \Pi_2 = \vartheta_2\varpi\,\vartheta_2\xi\,\vartheta\eta\,\vartheta\zeta$$
$$2\vartheta_3 w\,\vartheta_3 x\,\vartheta_1 y\,\vartheta_1 z = \Pi-\Pi_1-\Pi_2+\Pi_3\,, \qquad \Pi_3 = \vartheta_3\varpi\,\vartheta_3\xi\,\vartheta_1\eta\,\vartheta_1\zeta$$

---

4. $$2\vartheta_3 w\,\vartheta_3 x\,\vartheta_2 y\,\vartheta_2 z = \Pi+\Pi_1+\Pi_2+\Pi_3\,, \qquad \Pi = \vartheta_3\varpi\,\vartheta_3\xi\,\vartheta_2\eta\,\vartheta_2\zeta$$
$$2\vartheta_2 w\,\vartheta_2 x\,\vartheta_3 y\,\vartheta_3 z = \Pi+\Pi_1-\Pi_2-\Pi_3\,, \qquad \Pi_1 = \vartheta_2\varpi\,\vartheta_2\xi\,\vartheta_3\eta\,\vartheta_3\zeta$$
$$2\vartheta_1 w\,\vartheta_1 x\,\vartheta y\,\vartheta z = \Pi-\Pi_1+\Pi_2-\Pi_3\,, \qquad \Pi_2 = \vartheta_1\varpi\,\vartheta_1\xi\,\vartheta\eta\,\vartheta\zeta$$
$$2\vartheta w\,\vartheta x\,\vartheta_1 y\,\vartheta_1 z = \Pi-\Pi_1-\Pi_2+\Pi_3\,, \qquad \Pi_3 = \vartheta\varpi\,\vartheta\xi\,\vartheta_1\eta\,\vartheta_1\zeta$$

---

5. $$2\vartheta_1 w\,\vartheta x\,\vartheta_2 y\,\vartheta_3 z = \Pi+\Pi_1+\Pi_2+\Pi_3\,, \qquad \Pi = \vartheta_1\varpi\,\vartheta\xi\,\vartheta_2\eta\,\vartheta_3\zeta$$
$$2\vartheta w\,\vartheta_1 x\,\vartheta_3 y\,\vartheta_2 z = \Pi+\Pi_1-\Pi_2-\Pi_3\,, \qquad \Pi_1 = \vartheta\varpi\,\vartheta_1\xi\,\vartheta_3\eta\,\vartheta_2\zeta$$
$$2\vartheta_2 w\,\vartheta_3 x\,\vartheta_1 y\,\vartheta z = \Pi-\Pi_1+\Pi_2-\Pi_3\,, \qquad \Pi_2 = \vartheta_2\varpi\,\vartheta_3\xi\,\vartheta_1\eta\,\vartheta\zeta$$
$$2\vartheta_3 w\,\vartheta_2 x\,\vartheta y\,\vartheta_1 z = \Pi-\Pi_1-\Pi_2+\Pi_3\,, \qquad \Pi_3 = \vartheta_3\varpi\,\vartheta_2\xi\,\vartheta\eta\,\vartheta_1\zeta$$

In diesen fünf Gruppen von Formelquaternionen sind die Argumente der Thetaproducte auf der rechten und linken Seite durch die reciproken Gleichungen mit einander verbunden

a) $$2w = \varpi+\xi+\eta+\zeta\,, \qquad 2\varpi = w+x+y+z$$
b) $$2x = \varpi+\xi-\eta-\zeta\,, \qquad 2\xi = w+x-y-z$$
c) $$2y = \varpi-\xi+\eta-\zeta\,, \qquad 2\eta = w-x+y-z$$
d) $$2z = \varpi-\xi-\eta+\zeta\,; \qquad 2\zeta = w-x-y+z$$

folglich auch

$$w+x = \varpi+\xi\,, \qquad y-z = \eta-\zeta$$
$$w+y = \varpi+\eta\,, \qquad z-x = \zeta-\xi$$
$$w+z = \varpi+\zeta\,, \qquad x-y = \xi-\eta$$

$$w - x = \eta + \zeta\,, \qquad y + z = \varpi - \xi$$
$$w - y = \zeta + \xi\,, \qquad z + x = \varpi - \eta$$
$$w - z = \xi + \eta\,, \qquad x + y = \varpi - \zeta$$

$$wx - yz = \varpi\xi - \eta\zeta$$
$$wy - zx = \varpi\eta - \zeta\xi$$
$$wz - xy = \varpi\zeta - \xi\eta$$

$$w^2 + x^2 + y^2 + z^2 = \varpi^2 + \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2$$

$$w^2 + x^2 - y^2 - z^2 = 2(\varpi\xi + \eta\zeta)\,, \qquad 2(wx + yz) = \varpi^2 + \xi^2 - \eta^2 - \zeta^2$$
$$w^2 - x^2 + y^2 - z^2 = 2(\varpi\eta + \zeta\xi)\,, \qquad 2(wy + zx) = \varpi^2 - \xi^2 + \eta^2 - \zeta^2$$
$$w^2 - x^2 - y^2 + z^2 = 2(\varpi\zeta + \xi\eta)\,, \qquad 2(wz + xy) = \varpi^2 - \xi^2 - \eta^2 + \zeta^2$$

Da die Gleichungen *a*) *b*) *c*) *d*) zwischen den Argumenten genau die nämliche Form haben, wie die Gleichungen zwischen den Producten Π der einzelnen Quaternionen, so folgt daraus, dass auch zu jeder der übrigen Argumentenrelationen eine entsprechende Formel zwischen den bezüglichen Thetaproducten, und zwar in jeder Quaternion, existiren muss. Wir dürfen uns indess der Mühe des Hinschreibens überheben, da über die Zusammensetzung solcher Formeln kein Zweifel obwalten kann.

51.

Aus den Formeln des vorstehenden Artikels erhält man sogleich, da die Werthe $w = u + v$, $x = u - v$, $y = z = 0$, $\varpi = \xi = u$, $\eta = \zeta = v$ einander entsprechen, das speciellere System

$$\vartheta_3^2\vartheta_3(u+v)\,\vartheta_3(u-v) = \vartheta_3^2 u\,\vartheta_3^2 v + \vartheta_1^2 u\,\vartheta_1^2 v = \vartheta_2^2 u\,\vartheta_2^2 v + \vartheta^2 u\,\vartheta^2 u$$
$$\vartheta_2^2\vartheta_2(u+v)\,\vartheta_2(u-v) = \vartheta_3^2 u\,\vartheta_3^2 v - \vartheta^2 u\,\vartheta^2 v = \vartheta_2^2 u\,\vartheta_2^2 v - \vartheta_1^2 u\,\vartheta_1^2 v$$
$$\vartheta^2\,\vartheta\,(u+v)\,\vartheta\,(u-v) = \vartheta_3^2 u\,\vartheta_3^2 v - \vartheta_2^2 u\,\vartheta_2^2 v = \vartheta^2 u\,\vartheta^2 v - \vartheta_1^2 u\,\vartheta_1^2 v$$
$$\vartheta_3^2\,\vartheta\,(u+v)\,\vartheta\,(u-v) = \vartheta^2 u\,\vartheta_3^2 v + \vartheta_2^2 u\,\vartheta_1^2 v = \vartheta_3^2 u\,\vartheta^2 v + \vartheta_1^2 u\,\vartheta_2^2 v$$
$$\vartheta_2^2\vartheta_1(u+v)\,\vartheta_1(u-v) = \vartheta^2 u\,\vartheta_3^2 v - \vartheta_3^2 u\,\vartheta^2 v = \vartheta_1^2 u\,\vartheta_2^2 v - \vartheta_2^2 u\,\vartheta_1^2 v$$
$$\vartheta^2\vartheta_3(u+v)\,\vartheta_3(u-v) = \vartheta^2 u\,\vartheta_3^2 v - \vartheta_1^2 u\,\vartheta_2^2 v = \vartheta_3^2 u\,\vartheta^2 v - \vartheta_2^2 u\,\vartheta_1^2 v$$

$$\vartheta_2^2\,\vartheta\,(u+v)\,\vartheta\,(u-v) = \vartheta^2 u\,\vartheta_2^2 v + \vartheta_3^2 u\,\vartheta_1^2 v = \vartheta_2^2 u\,\vartheta^2 v + \vartheta_1^2 u\,\vartheta_3^2 v$$
$$\vartheta_3^2\vartheta_1(u+v)\,\vartheta_1(u-v) = \vartheta^2 u\,\vartheta_2^2 v - \vartheta_2^2 u\,\vartheta^2 v = \vartheta_1^2 u\,\vartheta_3^2 v - \vartheta_3^2 u\,\vartheta_1^2 v$$
$$\vartheta^2\vartheta_2(u+v)\,\vartheta_2(u-v) = \vartheta^2 u\,\vartheta_2^2 v - \vartheta_1^2 u\,\vartheta_3^2 v = \vartheta_2^2 u\,\vartheta^2 v - \vartheta_3^2 u\,\vartheta_1^2 v$$
$$\vartheta_2^2\vartheta_3(u+v)\,\vartheta_3(u-v) = \vartheta_3^2 u\,\vartheta_2^2 v + \vartheta^2 u\,\vartheta_1^2 v = \vartheta_2^2 u\,\vartheta_3^2 v + \vartheta_1^2 u\,\vartheta^2 v$$
$$\vartheta_3^2\vartheta_2(u+v)\,\vartheta_2(u-v) = \vartheta_3^2 u\,\vartheta_2^2 v - \vartheta_1^2 u\,\vartheta^2 v = \vartheta_2^2 u\,\vartheta_3^2 v - \vartheta^2 u\,\vartheta_1^2 v$$
$$\vartheta^2\vartheta_1(u+v)\,\vartheta_1(u-v) = \vartheta_3^2 u\,\vartheta_2^2 v - \vartheta_2^2 u\,\vartheta_3^2 v = \vartheta_1^2 u\,\vartheta^2 v - \vartheta^2 u\,\vartheta_1^2 v$$

ferner

$$\vartheta_2\vartheta_3\,\vartheta_3(u+v)\,\vartheta_2(u-v) = \vartheta_2 u\,\vartheta_3 u\,\vartheta_2 v\,\vartheta_3 v + \vartheta u\,\vartheta_1 u\,\vartheta v\,\vartheta_1 v$$
$$\vartheta\,\vartheta_3\,\vartheta\,(u+v)\,\vartheta_3(u-v) = \vartheta u\,\vartheta_3 u\,\vartheta v\,\vartheta_3 v + \vartheta_1 u\,\vartheta_2 u\,\vartheta_1 v\,\vartheta_2 v$$
$$\vartheta\,\vartheta_2\,\vartheta\,(u+v)\,\vartheta_2(u-v) = \vartheta u\,\vartheta_2 u\,\vartheta v\,\vartheta_2 v + \vartheta_1 u\,\vartheta_3 u\,\vartheta_1 v\,\vartheta_3 v$$
$$\vartheta_2\vartheta_3\,\vartheta_1(u+v)\,\vartheta\,(u-v) = \vartheta u\,\vartheta_1 u\,\vartheta_2 v\,\vartheta_3 v + \vartheta_2 u\,\vartheta_3 u\,\vartheta v\,\vartheta_1 v$$
$$\vartheta\,\vartheta_3\,\vartheta_1(u+v)\,\vartheta_2(u-v) = \vartheta_1 u\,\vartheta_2 u\,\vartheta v\,\vartheta_3 v + \vartheta u\,\vartheta_3 u\,\vartheta_1 v\,\vartheta_2 v$$
$$\vartheta\,\vartheta_2\,\vartheta_1(u+v)\,\vartheta_3(u-v) = \vartheta_1 u\,\vartheta_3 u\,\vartheta v\,\vartheta_2 v + \vartheta u\,\vartheta_2 u\,\vartheta_1 v\,\vartheta_3 v$$

nebst den analogen durch Umkehr des Vorzeichens von v hervorgehenden Gleichungen

$$\vartheta_2\vartheta_3\,\vartheta_2(u+v)\,\vartheta_3(u-v) = \vartheta_2 u\,\vartheta_3 u\,\vartheta_2 v\,\vartheta_3 v - \vartheta u\,\vartheta_1 u\,\vartheta v\,\vartheta_1 v$$
$$\vartheta\,\vartheta_3\,\vartheta_3(u+v)\,\vartheta\,(u-v) = \vartheta u\,\vartheta_3 u\,\vartheta v\,\vartheta_3 v - \vartheta_1 u\,\vartheta_2 u\,\vartheta_1 v\,\vartheta_2 v$$
$$\vartheta\,\vartheta_2\,\vartheta_2(u+v)\,\vartheta\,(u-v) = \vartheta u\,\vartheta_2 u\,\vartheta v\,\vartheta_2 v - \vartheta_1 u\,\vartheta_3 u\,\vartheta_1 v\,\vartheta_3 v$$
$$\vartheta_2\vartheta_3\,\vartheta\,(u+v)\,\vartheta_1(u-v) = \vartheta u\,\vartheta_1 u\,\vartheta_2 v\,\vartheta_3 v - \vartheta_2 u\,\vartheta_3 u\,\vartheta v\,\vartheta_1 v$$
$$\vartheta\,\vartheta_3\,\vartheta_2(u+v)\,\vartheta_1(u-v) = \vartheta_1 u\,\vartheta_2 u\,\vartheta v\,\vartheta_3 v - \vartheta u\,\vartheta_3 u\,\vartheta_1 v\,\vartheta_2 v$$
$$\vartheta\,\vartheta_2\,\vartheta_3(u+v)\,\vartheta_1(u-v) = \vartheta_1 u\,\vartheta_3 u\,\vartheta v\,\vartheta_2 v - \vartheta u\,\vartheta_2 u\,\vartheta_1 v\,\vartheta_3 v$$

Durch Division der geeigneten Formeln verificirt man ohne Mühe die im Art. 17 aufgestellten Werthe für $\sin\psi$, $\cos\psi$ und $\Delta\psi$.

Wenn man die Logarithmen der obigen Gleichungen nach v differentiirt und alsdann nach u integrirt, so folgt

$$\lg\frac{\vartheta_3(u+v)}{\vartheta_3(u-v)} = \int_0^u du\,\frac{\partial}{\partial v}\lg(\vartheta_3^2 u\,\vartheta_3^2 v + \vartheta_1^2 u\,\vartheta_1^2 v) = \int_0^u du\,\frac{\partial}{\partial v}\lg(\vartheta_2^2 u\,\vartheta_2^2 v + \vartheta^2 u\,\vartheta^2 v)$$
$$= \int_0^u du\,\frac{\partial}{\partial v}\lg(\vartheta^2 u\,\vartheta_3^2 v - \vartheta_1^2 u\,\vartheta_2^2 v) = \int_0^u du\,\frac{\partial}{\partial v}\lg(\vartheta_3^2 u\,\vartheta^2 v - \vartheta_2^2 u\,\vartheta_1^2 v)$$
$$= \int_0^u du\,\frac{\partial}{\partial v}\lg(\vartheta_3^2 u\,\vartheta_2^2 v + \vartheta^2 u\,\vartheta_1^2 v) = \int_0^u du\,\frac{\partial}{\partial v}\lg(\vartheta_2^2 u\,\vartheta_3^2 v + \vartheta_1^2 u\,\vartheta^2 v)$$

nebst entsprechenden Formeln für die übrigen Thetafunctionen. Man kann diese Ausdrücke auf die folgende Form bringen:

$$\lg\frac{\vartheta_3(u+v)}{\vartheta_3(u-v)} =$$

$$= 2u\frac{\vartheta_3' v}{\vartheta_3 v} + \int_0^u du \frac{\partial}{\partial v}\lg\left(\frac{\vartheta_3^2 u}{\vartheta_1^2 u} + \frac{\vartheta_1^2 v}{\vartheta_3^2 v}\right) = 2u\frac{\vartheta_1' v}{\vartheta_1 v} + \int_0^u du \frac{\partial}{\partial v}\lg\left(\frac{\vartheta_1^2 u}{\vartheta_3^2 u} + \frac{\vartheta_3^2 v}{\vartheta_1^2 v}\right)$$

$$= 2u\frac{\vartheta_2' v}{\vartheta_2 v} + \int_0^u du \frac{\partial}{\partial v}\lg\left(\frac{\vartheta_2^2 u}{\vartheta^2 u} + \frac{\vartheta^2 v}{\vartheta_2^2 v}\right) = 2u\frac{\vartheta' v}{\vartheta v} + \int_0^u du \frac{\partial}{\partial v}\lg\left(\frac{\vartheta^2 u}{\vartheta_2^2 u} + \frac{\vartheta_2^2 v}{\vartheta^2 v}\right)$$

$$= 2u\frac{\vartheta' v}{\vartheta v} + \int_0^u du \frac{\partial}{\partial v}\lg\left(\frac{\vartheta_3^2 u}{\vartheta_2^2 u} - \frac{\vartheta_1^2 v}{\vartheta^2 v}\right) = 2u\frac{\vartheta_1' v}{\vartheta_1 v} + \int_0^u du \frac{\partial}{\partial v}\lg\left(\frac{\vartheta_2^2 u}{\vartheta_3^2 u} - \frac{\vartheta^2 v}{\vartheta_1^2 v}\right)$$

$$= 2u\frac{\vartheta_3' v}{\vartheta_3 v} + \int_0^u du \frac{\partial}{\partial v}\lg\left(\frac{\vartheta^2 u}{\vartheta_1^2 u} - \frac{\vartheta_2^2 v}{\vartheta_3^2 v}\right) = 2u\frac{\vartheta_2' v}{\vartheta_2 v} + \int_0^u du \frac{\partial}{\partial v}\lg\left(\frac{\vartheta_1^2 u}{\vartheta^2 u} - \frac{\vartheta_3^2 v}{\vartheta_2^2 v}\right)$$

$$= 2u\frac{\vartheta_3' v}{\vartheta_3 v} + \int_0^u du \frac{\partial}{\partial v}\lg\left(\frac{\vartheta_2^2 u}{\vartheta_1^2 u} + \frac{\vartheta^2 v}{\vartheta_3^2 v}\right) = 2u\frac{\vartheta' v}{\vartheta v} + \int_0^u du \frac{\partial}{\partial v}\lg\left(\frac{\vartheta_1^2 u}{\vartheta_2^2 u} + \frac{\vartheta_3^2 v}{\vartheta^2 v}\right)$$

$$= 2u\frac{\vartheta_2' v}{\vartheta_2 v} + \int_0^u du \frac{\partial}{\partial v}\lg\left(\frac{\vartheta_3^2 u}{\vartheta^2 u} + \frac{\vartheta_1^2 v}{\vartheta_2^2 v}\right) = 2u\frac{\vartheta_1' v}{\vartheta_1 v} + \int_0^u du \frac{\partial}{\partial v}\lg\left(\frac{\vartheta^2 u}{\vartheta_3^2 u} + \frac{\vartheta_2^2 v}{\vartheta_1^2 v}\right)$$

$$\lg\frac{\vartheta_2(u+v)}{\vartheta_2(u-v)} =$$

$$= 2u\frac{\vartheta_3' v}{\vartheta_3 v} + \int_0^u du \frac{\partial}{\partial v}\lg\left(\frac{\vartheta_3^2 u}{\vartheta^2 u} - \frac{\vartheta^2 v}{\vartheta_3^2 v}\right) = 2u\frac{\vartheta' v}{\vartheta v} + \int_0^u du \frac{\partial}{\partial v}\lg\left(\frac{\vartheta^2 u}{\vartheta_3^2 u} - \frac{\vartheta_3^2 v}{\vartheta^2 v}\right)$$

$$= 2u\frac{\vartheta_2' v}{\vartheta_2 v} + \int_0^u du \frac{\partial}{\partial v}\lg\left(\frac{\vartheta_2^2 u}{\vartheta_1^2 u} - \frac{\vartheta_1^2 v}{\vartheta_2^2 v}\right) = 2u\frac{\vartheta_1' v}{\vartheta_1 v} + \int_0^u du \frac{\partial}{\partial v}\lg\left(\frac{\vartheta_1^2 u}{\vartheta_2^2 u} - \frac{\vartheta_2^2 v}{\vartheta_1^2 v}\right)$$

$$= 2u\frac{\vartheta' v}{\vartheta v} + \int_0^u du \frac{\partial}{\partial v}\lg\left(\frac{\vartheta_2^2 u}{\vartheta_3^2 u} - \frac{\vartheta_1^2 v}{\vartheta^2 v}\right) = 2u\frac{\vartheta_1' v}{\vartheta_1 v} + \int_0^u du \frac{\partial}{\partial v}\lg\left(\frac{\vartheta_3^2 u}{\vartheta_2^2 u} - \frac{\vartheta^2 v}{\vartheta_1^2 v}\right)$$

$$= 2u\frac{\vartheta_2' v}{\vartheta_2 v} + \int_0^u du \frac{\partial}{\partial v}\lg\left(\frac{\vartheta^2 u}{\vartheta_1^2 u} - \frac{\vartheta_3^2 v}{\vartheta_2^2 v}\right) = 2u\frac{\vartheta_3' v}{\vartheta_3 v} + \int_0^u du \frac{\partial}{\partial v}\lg\left(\frac{\vartheta_1^2 u}{\vartheta^2 u} - \frac{\vartheta_2^2 v}{\vartheta_3^2 v}\right)$$

$$= 2u\frac{\vartheta_3' v}{\vartheta_3 v} + \int_0^u du \frac{\partial}{\partial v}\lg\left(\frac{\vartheta_2^2 u}{\vartheta^2 u} - \frac{\vartheta_1^2 v}{\vartheta_3^2 v}\right) = 2u\frac{\vartheta_1' v}{\vartheta_1 v} + \int_0^u du \frac{\partial}{\partial v}\lg\left(\frac{\vartheta^2 u}{\vartheta_2^2 u} - \frac{\vartheta_3^2 v}{\vartheta_1^2 v}\right)$$

$$= 2u\frac{\vartheta_2' v}{\vartheta_2 v} + \int_0^u du \frac{\partial}{\partial v}\lg\left(\frac{\vartheta_3^2 u}{\vartheta_1^2 u} - \frac{\vartheta^2 v}{\vartheta_2^2 v}\right) = 2u\frac{\vartheta' v}{\vartheta v} + \int_0^u du \frac{\partial}{\partial v}\lg\left(\frac{\vartheta_1^2 u}{\vartheta_3^2 u} - \frac{\vartheta_2^2 v}{\vartheta^2 v}\right)$$

$$\lg\frac{\vartheta_1(u+v)}{\vartheta_1(v-u)} =$$

$$= 2u\frac{\vartheta_1' v}{\vartheta_1 v} + \int_0^u du \frac{\partial}{\partial v}\lg\left(\frac{\vartheta_2^2 u}{\vartheta_1^2 u} - \frac{\vartheta_2^2 v}{\vartheta_1^2 v}\right) = 2u\frac{\vartheta_2' v}{\vartheta_2 v} + \int_0^u du \frac{\partial}{\partial v}\lg\left(\frac{\vartheta_1^2 u}{\vartheta_2^2 u} - \frac{\vartheta_1^2 v}{\vartheta_2^2 v}\right)$$

$$= 2u\frac{\vartheta' v}{\vartheta v} + \int_0^u du \frac{\partial}{\partial v}\lg\left(\frac{\vartheta_3^2 u}{\vartheta^2 u} - \frac{\vartheta_3^2 v}{\vartheta^2 v}\right) = 2u\frac{\vartheta_3' v}{\vartheta_3 v} + \int_0^u du \frac{\partial}{\partial v}\lg\left(\frac{\vartheta^2 u}{\vartheta_3^2 u} - \frac{\vartheta^2 v}{\vartheta_3^2 v}\right)$$

$$= 2u\frac{\vartheta' v}{\vartheta v} + \int_0^u du \frac{\partial}{\partial v}\lg\left(\frac{\vartheta_2^2 u}{\vartheta^2 u} - \frac{\vartheta_2^2 v}{\vartheta^2 v}\right) = 2u\frac{\vartheta_2' v}{\vartheta_2 v} + \int_0^u du \frac{\partial}{\partial v}\lg\left(\frac{\vartheta^2 u}{\vartheta_2^2 u} - \frac{\vartheta^2 v}{\vartheta_2^2 v}\right)$$

$$= 2u\frac{\vartheta_1' v}{\vartheta_1 v} + \int_0^u du \frac{\partial}{\partial v}\lg\left(\frac{\vartheta_3^2 u}{\vartheta_1^2 u} - \frac{\vartheta_3^2 v}{\vartheta_1^2 v}\right) = 2u\frac{\vartheta_3' v}{\vartheta_3 v} + \int_0^u du \frac{\partial}{\partial v}\lg\left(\frac{\vartheta_1^2 u}{\vartheta_3^2 u} - \frac{\vartheta_1^2 v}{\vartheta_3^2 v}\right)$$

$$= 2u\frac{\vartheta_3' v}{\vartheta_3 v} + \int_0^u du \frac{\partial}{\partial v}\lg\left(\frac{\vartheta_2^2 u}{\vartheta_3^2 u} - \frac{\vartheta_2^2 v}{\vartheta_3^2 v}\right) = 2u\frac{\vartheta_2' v}{\vartheta_2 v} + \int_0^u du \frac{\partial}{\partial v}\lg\left(\frac{\vartheta_3^2 u}{\vartheta_2^2 u} - \frac{\vartheta_3^2 v}{\vartheta_2^2 v}\right)$$

$$= 2u\frac{\vartheta_1' v}{\vartheta_1 v} + \int_0^u du \frac{\partial}{\partial v}\lg\left(\frac{\vartheta^2 u}{\vartheta_1^2 u} - \frac{\vartheta^2 v}{\vartheta_1^2 v}\right) = 2u\frac{\vartheta' v}{\vartheta v} + \int_0^u du \frac{\partial}{\partial v}\lg\left(\frac{\vartheta_1^2 u}{\vartheta^2 u} - \frac{\vartheta_1^2 v}{\vartheta^2 v}\right)$$

$$\lg \frac{\vartheta(u+v)}{\vartheta(u-v)} =$$

$$= 2u \frac{\vartheta_3' v}{\vartheta_3 v} + \int_0^u du \frac{\partial}{\partial v} \lg \left(\frac{\vartheta_3^2 u}{\vartheta_2^2 u} - \frac{\vartheta_2^2 v}{\vartheta_3^2 v} \right) = 2u \frac{\vartheta_2' v}{\vartheta_2 v} + \int_0^u du \frac{\partial}{\partial v} \lg \left(\frac{\vartheta_2^2 u}{\vartheta_3^2 u} - \frac{\vartheta_3^2 v}{\vartheta_2^2 v} \right)$$

$$= 2u \frac{\vartheta' v}{\vartheta v} + \int_0^u du \frac{\partial}{\partial v} \lg \left(\frac{\vartheta^2 u}{\vartheta_1^2 u} - \frac{\vartheta_1^2 v}{\vartheta^2 v} \right) = 2u \frac{\vartheta_1' v}{\vartheta_1 v} + \int_0^u du \frac{\partial}{\partial v} \lg \left(\frac{\vartheta_1^2 u}{\vartheta^2 u} - \frac{\vartheta^2 v}{\vartheta_1^2 v} \right)$$

$$= 2u \frac{\vartheta' v}{\vartheta v} + \int_0^u du \frac{\partial}{\partial v} \lg \left(\frac{\vartheta_3^2 u}{\vartheta_1^2 u} + \frac{\vartheta_2^2 v}{\vartheta^2 v} \right) = 2u \frac{\vartheta_2' v}{\vartheta_2 v} + \int_0^u du \frac{\partial}{\partial v} \lg \left(\frac{\vartheta_1^2 u}{\vartheta_3^2 u} + \frac{\vartheta^2 v}{\vartheta_2^2 v} \right)$$

$$= 2u \frac{\vartheta_3' v}{\vartheta_3 v} + \int_0^u du \frac{\partial}{\partial v} \lg \left(\frac{\vartheta^2 u}{\vartheta_2^2 u} + \frac{\vartheta_1^2 v}{\vartheta_3^2 v} \right) = 2u \frac{\vartheta_1' v}{\vartheta_1 v} + \int_0^u du \frac{\partial}{\partial v} \lg \left(\frac{\vartheta_2^2 u}{\vartheta^2 u} + \frac{\vartheta_3^2 v}{\vartheta_1^2 v} \right)$$

$$= 2u \frac{\vartheta' v}{\vartheta v} + \int_0^u du \frac{\partial}{\partial v} \lg \left(\frac{\vartheta_2^2 u}{\vartheta_1^2 u} + \frac{\vartheta_3^2 v}{\vartheta^2 v} \right) = 2u \frac{\vartheta_3' v}{\vartheta_3 v} + \int_0^u du \frac{\partial}{\partial v} \lg \left(\frac{\vartheta_1^2 u}{\vartheta_2^2 u} + \frac{\vartheta^2 v}{\vartheta_3^2 v} \right)$$

$$= 2u \frac{\vartheta_2' v}{\vartheta_2 v} + \int_0^u du \frac{\partial}{\partial v} \lg \left(\frac{\vartheta^2 u}{\vartheta_3^2 u} + \frac{\vartheta_1^2 v}{\vartheta_2^2 v} \right) = 2u \frac{\vartheta_1' v}{\vartheta_1 v} + \int_0^u du \frac{\partial}{\partial v} \lg \left(\frac{\vartheta_3^2 u}{\vartheta^2 u} + \frac{\vartheta_2^2 v}{\vartheta_1^2 v} \right)$$

52.

Den vorstehenden Gleichungen reihen sich die folgenden an. Die Formel

$$\vartheta_2 \vartheta_3 \, \vartheta_3(u+v) \, \vartheta_2(u-v) = \vartheta_2 u \, \vartheta_3 u \, \vartheta_2 v \, \vartheta_3 v + \vartheta u \, \vartheta_1 u \, \vartheta v \, \vartheta_1 v$$

liefert mittelst logarithmischer Differentiation nach v und Integration nach u

$$\lg \frac{\vartheta_3(u+v)\, \vartheta_2 v}{\vartheta_2(u-v)\, \vartheta_3 v} = \int_0^u du \frac{\partial}{\partial v} \lg (\vartheta_2 u \, \vartheta_3 u \, \vartheta_2 v \, \vartheta_3 v + \vartheta u \, \vartheta_1 u \, \vartheta v \, \vartheta_1 v)$$

$$= u \left(\frac{\vartheta_2' v}{\vartheta_2 v} + \frac{\vartheta_3' v}{\vartheta_3 v} \right) + \int_0^u du \frac{\partial}{\partial v} \lg \left(\frac{\vartheta_2 u \, \vartheta_3 u}{\vartheta u \, \vartheta_1 u} + \frac{\vartheta v \, \vartheta_1 v}{\vartheta_2 v \, \vartheta_3 v} \right)$$

$$= u \left(\frac{\vartheta' v}{\vartheta v} + \frac{\vartheta_1' v}{\vartheta_1 v} \right) + \int_0^u du \frac{\partial}{\partial v} \lg \left(\frac{\vartheta u \, \vartheta_1 u}{\vartheta_2 u \, \vartheta_3 u} + \frac{\vartheta_2 v \, \vartheta_3 v}{\vartheta v \, \vartheta_1 v} \right)$$

$$= u \frac{\vartheta_2'(v, q^{\frac{1}{2}})}{\vartheta_2(v, q^{\frac{1}{2}})} + \int_0^u du \frac{\partial}{\partial v} \lg \left(\frac{\vartheta_2(u, q^{\frac{1}{2}})}{\vartheta_1(u, q^{\frac{1}{2}})} + \frac{\vartheta_1(v, q^{\frac{1}{2}})}{\vartheta_2(v, q^{\frac{1}{2}})} \right)$$

$$= u \frac{\vartheta_1'(v, q^{\frac{1}{2}})}{\vartheta_1(v, q^{\frac{1}{2}})} + \int_0^u du \frac{\partial}{\partial v} \lg \left(\frac{\vartheta_1(u, q^{\frac{1}{2}})}{\vartheta_2(u, q^{\frac{1}{2}})} + \frac{\vartheta_2(v, q^{\frac{1}{2}})}{\vartheta_1(v, q^{\frac{1}{2}})} \right)$$

Führt man nun den Gleichungen des Art. 35

$$\frac{2Ku}{\pi} = \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\Delta(\varphi\, \varkappa)}, \qquad \frac{2\Lambda u}{\pi} = \int_0^{\chi'} \frac{d\varphi}{\Delta(\varphi\, \lambda)}$$

$$\frac{4Mu}{\pi} = \int_0^{\psi} \frac{d\varphi}{\Delta(\varphi\, \mu)}, \qquad \frac{2Nu}{\pi} = \int_0^{\omega'} \frac{d\varphi}{\Delta(\varphi\, \nu)}$$

analog die Bezeichnungen ein

$$\frac{2Kv}{\pi} = \int_0^{\varpi} \frac{d\varphi}{\Delta(\varphi\,\varkappa)}, \qquad \frac{2\Lambda v}{\pi} = \int_0^{\varrho'} \frac{d\varphi}{\Delta(\varphi\,\lambda)}$$

$$\frac{4Mv}{\pi} = \int_0^{\sigma} \frac{d\varphi}{\Delta(\varphi\,\mu)}, \qquad \frac{2Nv}{\pi} = \int_0^{\tau'} \frac{d\varphi}{\Delta(\varphi\,\nu)}$$

so erhält man durch eine leichte Reduction

$$\lg\frac{\vartheta_3(u+v)\,\vartheta_2 v}{\vartheta_2(u-v)\,\vartheta_3 v} = u\frac{\vartheta_2'(v, q^{\frac{1}{2}})}{\vartheta_2(v, q^{\frac{1}{2}})} + \frac{2\Lambda\lambda'}{\pi}\frac{\Delta\varrho'}{\cos^2\varrho'}\int_0^u \frac{du}{\cot\chi' + \lambda'\operatorname{tg}\varrho'}$$

$$= u\frac{\vartheta_1'(v, q^{\frac{1}{2}})}{\vartheta_1(v, q^{\frac{1}{2}})} - \frac{2\Lambda}{\pi}\frac{\Delta\varrho'}{\sin^2\varrho'}\int_0^u \frac{du}{\lambda'\operatorname{tg}\chi' + \cot\varrho'}$$

und wenn man q mit q^2 vertauscht

$$\lg\frac{\vartheta_3(u+v, q^2)\,\vartheta_2(v, q^2)}{\vartheta_2(u-v, q^2)\,\vartheta_3(v, q^2)} = u\frac{\vartheta_2' v}{\vartheta_2 v} + \frac{2K\varkappa'}{\pi}\frac{\Delta\varpi}{\cos^2\varpi}\int_0^u \frac{du}{\cot\varphi + \varkappa'\operatorname{tg}\varpi} \tag{1}$$

$$= u\frac{\vartheta_1' v}{\vartheta_1 v} - \frac{2K}{\pi}\frac{\Delta\varpi}{\sin^2\varpi}\int_0^u \frac{du}{\varkappa'\operatorname{tg}\varphi + \cot\varpi} \tag{2}$$

In derselben Weise ergeben sich die zugehörigen Gleichungen

$$\lg\frac{\vartheta_1(u+v, q^2)\,\vartheta(v, q^2)}{\vartheta(u-v, q^2)\,\vartheta_1(v, q^2)} = u\frac{\vartheta_2' v}{\vartheta_2 v} + \frac{2K}{\pi}\frac{\Delta\varpi}{\cos^2\varpi}\int_0^u \frac{du}{\operatorname{tg}\varphi + \operatorname{tg}\varpi} \tag{3}$$

$$= u\frac{\vartheta_1' v}{\vartheta_1 v} - \frac{2K}{\pi}\frac{\Delta\varpi}{\sin^2\varpi}\int_0^u \frac{du}{\cot\varphi + \cot\varpi} \tag{4}$$

ferner

$$\lg\frac{\vartheta(u+v)\,\vartheta_3 v}{\vartheta_3(u-v)\,\vartheta v} = 2u\frac{\vartheta'(2v, q^2)}{\vartheta(2v, q^2)} + \frac{4M\mu}{\pi}\cos\sigma\,\Delta\sigma\int_0^u \frac{du}{\frac{1}{\sin\psi} + \mu\sin\sigma}$$

$$= 2u\frac{\vartheta_1'(2v, q^2)}{\vartheta_1(2v, q^2)} - \frac{4M\cos\sigma\,\Delta\sigma}{\pi\ \sin^2\sigma}\int_0^u \frac{du}{\mu\sin\psi + \operatorname{cosec}\sigma}$$

$$\lg\frac{\vartheta(u+v)\,\vartheta_2 v}{\vartheta_2(u-v)\,\vartheta v} = u\frac{\vartheta_2'(v, iq^{\frac{1}{2}})}{\vartheta_2(v, iq^{\frac{1}{2}})} + \frac{2N\nu'}{\pi}\frac{\Delta\tau'}{\cos^2\tau'}\int_0^u \frac{du}{\cot\omega' + \nu'\operatorname{tg}\tau'}$$

$$= u\frac{\vartheta_1'(v, iq^{\frac{1}{2}})}{\vartheta_1(v, iq^{\frac{1}{2}})} - \frac{2N}{\pi}\frac{\Delta\tau'}{\sin^2\tau'}\int_0^u \frac{du}{\nu'\operatorname{tg}\omega' + \cot\tau'}$$

u. s. w. Die letzteren Gleichungen führen wieder auf (1) und (2) zurück, wenn man q mit $-q^2$ vertauscht, während die ersteren beim Uebergang von u, v, q in $\frac{1}{2}u$, $\frac{1}{2}v$ und $\sqrt{q}$ die weiteren Formeln liefern

$$(5)\quad \lg \frac{\vartheta(\tfrac{1}{2}\overline{u+v}, q^{\frac{1}{2}})\,\vartheta_3(\tfrac{1}{2}v, q^{\frac{1}{2}})}{\vartheta_3(\tfrac{1}{2}\overline{u-v}, q^{\frac{1}{2}})\,\vartheta(\tfrac{1}{2}v, q^{\frac{1}{2}})} = u\frac{\vartheta' v}{\vartheta v} + \frac{2K\varkappa}{\pi}\cos\varpi\,\Delta\varpi \int_0^u \frac{du}{\frac{1}{\sin\varphi} + \varkappa\sin\varpi}$$

$$(6)\quad = u\frac{\vartheta_1' v}{\vartheta_1 v} - \frac{2K}{\pi}\frac{\cos\varpi\,\Delta\varpi}{\sin^2\varpi}\int_0^u \frac{du}{\varkappa\sin\varphi + \frac{1}{\sin\varpi}}$$

$$(7)\quad \lg \frac{\vartheta_1(\tfrac{1}{2}\overline{u+v}, q^{\frac{1}{2}})\,\vartheta_2(\tfrac{1}{2}v, q^{\frac{1}{2}})}{\vartheta_2(\tfrac{1}{2}\overline{u-v}, q^{\frac{1}{2}})\,\vartheta_1(\tfrac{1}{2}v, q^{\frac{1}{2}})} = u\frac{\vartheta' v}{\vartheta v} + \frac{2K}{\pi}\cos\varpi\,\Delta\varpi \int_0^u \frac{du}{\sin\varphi + \sin\varpi}$$

$$(8)\quad = u\frac{\vartheta_1' v}{\vartheta_1 v} - \frac{2K}{\pi}\frac{\cos\varpi\,\Delta\varpi}{\sin^2\varpi}\int_0^u \frac{du}{\frac{1}{\sin\varphi} + \frac{1}{\sin\varpi}}$$

Durch eine Umkehr der Vorzeichen von v und ϖ werden keine wesentlich verschiedenen Formeln erhalten.

53.

Wenn man die hier abgeleiteten Ausdrücke für elliptische Integrale dritter Gattung von der Form $\int \frac{du}{y-p}$ auf die canonische Form $w = \int_0^u \frac{du}{y^2-p}$ anwenden will, so erhält man (Art. 43)

$$w = \frac{1}{2\sqrt{p}}\left\{\int_0^u \frac{du}{y-\sqrt{p}} - \int_0^u \frac{du}{y+\sqrt{p}}\right\}$$

und hat folglich mit

$$y = \cot\varphi\,,\quad \varkappa'\operatorname{tg}\varphi\,,\quad \operatorname{tg}\varphi\,,\quad \cot\varphi\,,\quad \frac{1}{\sin\varphi}\,,\quad \varkappa\sin\varphi\,,\quad \sin\varphi\,,\quad \frac{1}{\sin\varphi}$$

die correspondirenden Parameterwerthe

$$\pm\sqrt{p} = \varkappa'\operatorname{tg}\varpi\,,\quad \cot\varpi\,,\quad \operatorname{tg}\varpi\,;\quad \cot\varpi\,,\quad \varkappa\sin\varpi\,,\quad \frac{1}{\sin\varpi}\,,\quad \sin\varpi\,,\quad \frac{1}{\sin\varpi}$$

zu verbinden. Man sieht, dass hier namentlich das Beispiel des Art. 24 in Betracht kommt.

Dabei entspricht dem doppelten Vorzeichen von $\sqrt{p}$ einfach die Umkehr des Vorzeichens von v und ϖ, während für negative Werthe von p das Argument v rein imaginär wird. In der That hatten wir

$$\sqrt{\varkappa'}\operatorname{tg}\varpi = \frac{\vartheta_1 v}{\vartheta_2 v}\,,\qquad \sqrt{\varkappa}\sin\varpi = \frac{\vartheta_1 v}{\vartheta v}$$

welche Werthe resp. in $i\frac{\theta_1 v}{\theta_2 v}$ und $i\frac{\theta_1 v}{\theta v}$ übergehen, wenn man vi für v schreibt. Da nun für

$$\frac{2Kv}{\pi} = \frac{2K'v'}{\pi} = \int_0^{\varpi'} \frac{d\varphi}{\Delta(\varphi\,\varkappa')}$$

nach Art. 39

$$\theta(v,q) = \sqrt{\frac{K}{K'}}\, e^{\frac{vv'}{\pi}}\, \vartheta_2(v',q'), \qquad \theta_1(v,q) = \sqrt{\frac{K}{K'}}\, e^{\frac{vv'}{\pi}}\, \vartheta_1(v',q')$$

$$\theta_2(v,q) = \sqrt{\frac{K}{K'}}\, e^{\frac{vv'}{\pi}}\, \vartheta(v',q'), \qquad \theta_3(v,q) = \sqrt{\frac{K}{K'}}\, e^{\frac{vv'}{\pi}}\, \vartheta_3(v',q')$$

so treten die Werthe

$$\frac{i}{\sqrt{\varkappa'}}\frac{\vartheta_1(v',q')}{\vartheta(v',q')} = i\sin\varpi' \quad \text{und} \quad \frac{i}{\sqrt{\varkappa}}\frac{\vartheta_1(v',q')}{\vartheta_2(v',q')} = i\,\mathrm{tg}\,\varpi'$$

an die Stelle von $\mathrm{tg}\,\varpi$ und $\sin\varpi$, folglich auch resp. $i\,\mathrm{tg}\,\frac{1}{2}\varpi$, $\sec\varpi'$ und $\frac{\Delta(\varpi',\varkappa')}{\cos\varpi'}$ an die Stelle von $\mathrm{tg}\,\frac{1}{2}\varpi$, $\cos\varpi$ und $\Delta\varpi$ (vergl. Art. 35).

Es fragt sich noch, wie man den einem beliebigen complexen Parameter p entsprechenden complexen Werth $v = v_0 + v_1 i$ bestimmen kann. Dazu führt der folgende Satz:

»Wenn die conjugirten Werthe von v und ϖ durch $\bar{v}$ und $\bar{\varpi}$ bezeichnet werden, und man setzt

$$\mathrm{tg}\,\varpi\,\Delta\bar{\varpi} = \mathrm{tg}\,\tfrac{1}{2}h\, e^{h'i}, \qquad \frac{4Kv_0}{\pi} = \int_0^k \frac{d\varphi}{\Delta(\varphi\,\varkappa)}, \qquad \frac{4Kv_1}{\pi} = \int_0^{k'} \frac{d\varphi}{\Delta(\varphi\,\varkappa')}$$

so sind $h\ k\ k'$ Hypotenuse und Katheten eines rechtwinkligen sphärischen Dreiecks, in welchem die Seiten h und k den Winkel h' einschliessen.«

Man hat demnach mit Hülfe des gegebenen Werthes von $p = \alpha + \beta i$ die Winkel h und h' zu bestimmen, und findet alsdann die von JACOBI in seinen Vorlesungen abgeleiteten Formeln

$$\mathrm{tg}\,k = \mathrm{tg}\,h\cos h', \qquad \sin k' = \sin h \sin h'$$

woraus sich v_0 und v_1 in der gewöhnlichen Weise ergeben.

Den Beweis dieses Satzes erhält man auf folgendem Wege. Offenbar ist für $Kv_1 = K'v_1'$

$$\sqrt{\varkappa'}\,\mathrm{tg}\,k = \frac{\vartheta_1(2v_0,q)}{\vartheta_2(2v_0,q)}$$

$$\sqrt{\varkappa'}\sin k' = \frac{\vartheta_1(2v_1',q')}{\vartheta(2v_1',q')} = \frac{\theta_1(2v_1,q)}{\theta_2(2v_1,q)} = \frac{1}{i}\frac{\vartheta_1(2v_1 i,q)}{\vartheta_2(2v_1 i,q)}$$

wofür man wegen $v + \bar{v} = 2v_0$, $v - \bar{v} = 2v_1 i$ schreiben kann

$$\sqrt{\varkappa'}\,\mathrm{tg}\,k = \frac{\vartheta_1(v+\bar{v})}{\vartheta_2(v+\bar{v})}, \qquad i\sqrt{\varkappa'}\sin k' = \frac{\vartheta_1(v-\bar{v})}{\vartheta_2(v-\bar{v})}$$

Da nun nach den Gleichungen des Art. 51

$$\frac{\vartheta_1(v+\bar{v})}{\vartheta_2(v+\bar{v})} = \frac{\vartheta_1(v+\bar{v})\,\vartheta(v-\bar{v})}{\vartheta_2(v+\bar{v})\,\vartheta(v-\bar{v})} = \frac{\vartheta}{\vartheta_3}\cdot\frac{\vartheta v\,\vartheta_1 v\,\vartheta_2\bar{v}\,\vartheta_3\bar{v} + \vartheta_2 v\,\vartheta_3 v\,\vartheta\bar{v}\,\vartheta_1\bar{v}}{\vartheta v\,\vartheta_2 v\,\vartheta\bar{v}\,\vartheta_2\bar{v} - \vartheta_1 v\,\vartheta_3 v\,\vartheta_1\bar{v}\,\vartheta_3\bar{v}}$$

so folgt wegen $\mathrm{tg}\,\varpi\,\Delta\bar{\varpi} = \frac{\vartheta_1 v\,\vartheta_3\bar{v}}{\vartheta_2 v\,\vartheta\bar{v}}$

$$\mathrm{tg}\,k = \frac{\mathrm{tg}\,\varpi\,\Delta\bar{\varpi} + \mathrm{tg}\,\bar{\varpi}\,\Delta\varpi}{1 - \mathrm{tg}\,\varpi\,\Delta\bar{\varpi}\,\mathrm{tg}\,\bar{\varpi}\,\Delta\varpi}, \qquad \sin k' = \frac{\mathrm{tg}\,\varpi\,\Delta\bar{\varpi} - \mathrm{tg}\,\bar{\varpi}\,\Delta\varpi}{1 + \mathrm{tg}\,\varpi\,\Delta\bar{\varpi}\,\mathrm{tg}\,\bar{\varpi}\,\Delta\varpi}$$

und durch Substitution von

$$\mathrm{tg}\,\varpi\,\Delta\bar{\varpi} = \mathrm{tg}\,\tfrac{1}{2}h\,e^{h'i}, \qquad \mathrm{tg}\,\bar{\varpi}\,\Delta\varpi = \mathrm{tg}\,\tfrac{1}{2}h\,e^{-h'i}$$

$$\mathrm{tg}\,k = \mathrm{tg}\,h\cos h', \qquad \sin k' = \sin h\sin h'$$

q. e. d.

54.

Kehren wir zu den Formeln des Art. 51 zurück und führen unter dem Integralzeichen die Amplituden φ und ϖ ein, so können dieselben geschrieben werden, wenn zur Abkürzung gesetzt wird

$$\Pi = \frac{2K}{\pi}\sin\varpi\cos\varpi\,\Delta(\varpi\varkappa)$$

$$\frac{1}{2}\lg\frac{\vartheta_3(u+v)}{\vartheta_3(u-v)} =$$

$$= u\frac{\vartheta_3' v}{\vartheta_3 v} + \frac{\Pi}{\Delta^4\varpi}\int_0^u \frac{du}{\frac{\Delta^2\varphi}{\varkappa^2\varkappa'^2\sin^2\varphi} + \frac{\sin^2\varpi}{\Delta^2\varpi}} = u\frac{\vartheta_1' v}{\vartheta_1 v} - \frac{\Pi}{\sin^4\varpi}\int_0^u \frac{du}{\frac{\varkappa^2\varkappa'^2\sin^2\varphi}{\Delta^2\varphi} + \frac{\Delta^2\varpi}{\sin^2\varpi}}$$

$$= u\frac{\vartheta_2' v}{\vartheta_2 v} + \frac{\Pi}{\cos^4\varpi}\int_0^u \frac{du}{\frac{\varkappa^2}{\varkappa'^2}\cos^2\varphi + \sec^2\varpi} = u\frac{\vartheta' v}{\vartheta v} - \Pi\int_0^u \frac{du}{\frac{\varkappa'^2}{\varkappa}\sec^2\varphi + \cos^2\varpi}$$

$$= u\frac{\vartheta' v}{\vartheta v} - \Pi\int_0^u \frac{du}{\frac{\Delta^2\varphi}{\varkappa^2\cos^2\varphi} - \sin^2\varpi} = u\frac{\vartheta_1' v}{\vartheta_1 v} + \frac{\Pi}{\sin^4\varpi}\int_0^u \frac{du}{\frac{\varkappa^2\cos^2\varphi}{\Delta^2\varphi} - \frac{1}{\sin^2\varpi}}$$

$$= u\frac{\vartheta_3' v}{\vartheta_3 v} + \frac{\varkappa'^2\Pi}{\Delta^4\varpi}\int_0^u \frac{du}{\frac{1}{\varkappa^2\sin^2\varphi} - \frac{\cos^2\varpi}{\Delta^2\varpi}} = u\frac{\vartheta_2' v}{\vartheta_2 v} - \frac{\varkappa'^2\Pi}{\cos^4\varpi}\int_0^u \frac{du}{\varkappa^2\sin^2\varphi - \frac{\Delta^2\varpi}{\cos^2\varpi}}$$

$$= u\frac{\vartheta_3' v}{\vartheta_3 v} + \frac{\varkappa^2\Pi}{\Delta^4\varpi}\int_0^u \frac{du}{\frac{1}{\varkappa'^2}\cot^2\varphi + \frac{1}{\Delta^2\varpi}} = u\frac{\vartheta' v}{\vartheta v} - \varkappa^2\Pi\int_0^u \frac{du}{\varkappa'^2\mathrm{tg}^2\varphi + \Delta^2\varpi}$$

$$= u\frac{\vartheta_2' v}{\vartheta_2 v} + \frac{\Pi}{\cos^4\varpi}\int_0^u \frac{du}{\frac{1}{\varkappa'^2}\Delta^2\varphi + \mathrm{tg}^2\varpi} = u\frac{\vartheta_1' v}{\vartheta_1 v} - \frac{\Pi}{\sin^4\varpi}\int_0^u \frac{du}{\frac{\varkappa'^2}{\Delta^2\varphi} + \cot^2\varpi}$$

$$\frac{1}{2}\lg\frac{\vartheta_2(u+v)}{\vartheta_2(u-v)} =$$

$$= u\frac{\vartheta_3'v}{\vartheta_3 v} - \frac{\varkappa^2\Pi}{\varDelta^4\varpi}\int_0^u \frac{du}{\frac{1}{\varkappa'^2}\varDelta^2\varphi - \frac{1}{\varDelta^2\varpi}} \qquad = u\frac{\vartheta' v}{\vartheta v} + \varkappa^2\Pi\int_0^u \frac{du}{\frac{\varkappa'^2}{\varDelta^2\varphi} - \varDelta^2\varpi}$$

$$= u\frac{\vartheta_2'v}{\vartheta_2 v} - \frac{\Pi}{\cos^4\varpi}\int_0^u \frac{du}{\frac{1}{\varkappa'^2}\cot^2\varphi - \operatorname{tg}^2\varpi} \qquad = u\frac{\vartheta_1'v}{\vartheta_1 v} + \frac{\Pi}{\sin^4\varpi}\int_0^u \frac{du}{\varkappa'^2\operatorname{tg}^2\varphi - \cot^2\varpi}$$

$$= u\frac{\vartheta' v}{\vartheta v} - \Pi\int_0^u \frac{du}{\frac{\cos^2\varphi}{\varDelta^2\varphi} - \sin^2\varpi} \qquad = u\frac{\vartheta_1'v}{\vartheta_1 v} + \frac{\Pi}{\sin^4\varpi}\int_0^u \frac{du}{\frac{\varDelta^2\varphi}{\cos^2\varphi} - \frac{1}{\sin^2\varpi}}$$

$$= u\frac{\vartheta_2'v}{\vartheta_2 v} - \frac{\varkappa'^2\Pi}{\cos^4\varpi}\int_0^u \frac{du}{\frac{1}{\sin^2\varphi} - \frac{\varDelta^2\varpi}{\cos^2\varpi}} \qquad = u\frac{\vartheta_3'v}{\vartheta_3 v} + \frac{\varkappa'^2\Pi}{\varDelta^4\varpi}\int_0^u \frac{du}{\sin^2\varphi - \frac{\cos^2\varpi}{\varDelta^2\varpi}}$$

$$= u\frac{\vartheta_3'v}{\vartheta_3 v} - \frac{\Pi}{\varDelta^4\varpi}\int_0^u \frac{du}{\frac{1}{\varkappa'^2}\cos^2\varphi - \frac{\sin^2\varpi}{\varDelta^2\varpi}} \qquad = u\frac{\vartheta_1'v}{\vartheta_1 v} + \frac{\Pi}{\sin^4\varpi}\int_0^u \frac{du}{\varkappa'^2\sec^2\varphi - \frac{\varDelta^2\varpi}{\sin^2\varpi}}$$

$$= u\frac{\vartheta_2'v}{\vartheta_2 v} - \frac{\Pi}{\cos^4\varpi}\int_0^u \frac{du}{\frac{\varDelta^2\varphi}{\varkappa'^2\sin^2\varphi} - \sec^2\varpi} \qquad = u\frac{\vartheta' v}{\vartheta v} + \Pi\int_0^u \frac{du}{\frac{\varkappa'^2\sin^2\varphi}{\varDelta^2\varphi} - \cos^2\varpi}$$

$$\frac{1}{2}\lg\frac{\vartheta_1(u+v)}{\vartheta_1(v-u)} =$$

$$= u\frac{\vartheta_1'v}{\vartheta_1 v} + \frac{\Pi}{\sin^4\varpi}\int_0^u \frac{du}{\cot^2\varphi - \cot^2\varpi} \qquad = u\frac{\vartheta_2'v}{\vartheta_2 v} - \frac{\Pi}{\cos^4\varpi}\int_0^u \frac{du}{\operatorname{tg}^2\varphi - \operatorname{tg}^2\varpi}$$

$$= u\frac{\vartheta' v}{\vartheta v} + \varkappa^2\Pi\int_0^u \frac{du}{\varDelta^2\varphi - \varDelta^2\varpi} \qquad = u\frac{\vartheta_3'v}{\vartheta_3 v} - \frac{\varkappa^2\Pi}{\varDelta^4\varpi}\int_0^u \frac{du}{\frac{1}{\varDelta^2\varphi} - \frac{1}{\varDelta^2\varpi}}$$

$$= u\frac{\vartheta' v}{\vartheta v} + \Pi\int_0^u \frac{du}{\cos^2\varphi - \cos^2\varpi} \qquad = u\frac{\vartheta_2'v}{\vartheta_2 v} - \frac{\Pi}{\cos^4\varpi}\int_0^u \frac{du}{\sec^2\varphi - \sec^2\varpi}$$

$$= u\frac{\vartheta_1'v}{\vartheta_1 v} + \frac{\Pi}{\sin^4\varpi}\int_0^u \frac{du}{\frac{\varDelta^2\varphi}{\sin^2\varphi} - \frac{\varDelta^2\varpi}{\sin^2\varpi}} \qquad = u\frac{\vartheta_3'v}{\vartheta_3 v} - \frac{\Pi}{\varDelta^4\varpi}\int_0^u \frac{du}{\frac{\sin^2\varphi}{\varDelta^2\varphi} - \frac{\sin^2\varpi}{\varDelta^2\varpi}}$$

$$= u\frac{\vartheta_3'v}{\vartheta_3 v} + \frac{\varkappa'^2\Pi}{\varDelta^4\varpi}\int_0^u \frac{du}{\frac{\cos^2\varphi}{\varDelta^2\varphi} - \frac{\cos^2\varpi}{\varDelta^2\varpi}} \qquad = u\frac{\vartheta_2'v}{\vartheta_2 v} - \frac{\varkappa'^2\Pi}{\cos^4\varpi}\int_0^u \frac{du}{\frac{\varDelta^2\varphi}{\cos^2\varphi} - \frac{\varDelta^2\varpi}{\cos^2\varpi}}$$

$$= u\frac{\vartheta_1'v}{\vartheta_1 v} + \frac{\Pi}{\sin^4\varpi}\int_0^u \frac{du}{\frac{1}{\sin^2\varphi} - \frac{1}{\sin^2\varpi}} \qquad = u\frac{\vartheta' v}{\vartheta v} - \Pi\int_0^u \frac{du}{\sin^2\varphi - \sin^2\varpi}$$

$$\frac{1}{2}\lg\frac{\vartheta(u+v)}{\vartheta(u-v)} =$$

$$= u\frac{\vartheta_3'v}{\vartheta_3 v} + \frac{\varkappa'^2\Pi}{\varDelta^4\varpi}\int_0^u \frac{du}{\frac{\varDelta^2\varphi}{\varkappa^2\cos^2\varphi} - \frac{\cos^2\varpi}{\varDelta^2\varpi}} \qquad = u\frac{\vartheta_2'v}{\vartheta_2 v} - \frac{\varkappa'^2\Pi}{\cos^4\varpi}\int_0^u \frac{du}{\frac{\varkappa^2\cos^2\varphi}{\varDelta^2\varphi} - \frac{\varDelta^2\varpi}{\cos^2\varpi}}$$

$$= u\frac{\vartheta' v}{\vartheta v} - \Pi\int_0^u \frac{du}{\frac{1}{\varkappa^2\sin^2\varphi} - \sin^2\varpi} \qquad = u\frac{\vartheta_1'v}{\vartheta_1 v} + \frac{\Pi}{\sin^4\varpi}\int_0^u \frac{du}{\varkappa^2\sin^2\varphi - \frac{1}{\sin^2\varpi}}$$

$$= u\frac{\vartheta' v}{\vartheta v} - \Pi\int_0^u \frac{du}{\frac{\Delta^2\varphi}{\varkappa^2\sin^2\varphi} + \cos^2\varpi} \qquad = u\frac{\vartheta_2' v}{\vartheta_2 v} + \frac{\Pi}{\cos^4\varpi}\int_0^u \frac{du}{\frac{\varkappa^2\sin^2\varphi}{\Delta^2\varphi} + \sec^2\varpi}$$

$$= u\frac{\vartheta_3' v}{\vartheta_3 v} + \frac{\Pi}{\Delta^4\varpi}\int_0^u \frac{du}{\frac{1}{\varkappa^2}\sec^2\varphi + \frac{\sin^2\varpi}{\Delta^2\varpi}} \qquad = u\frac{\vartheta_1' v}{\vartheta_1 v} - \frac{\Pi}{\sin^4\varpi}\int_0^u \frac{du}{\varkappa^2\cos^2\varphi + \frac{\Delta^2\varpi}{\sin^2\varpi}}$$

$$= u\frac{\vartheta' v}{\vartheta v} - \varkappa^2\Pi\int_0^u \frac{du}{\cot^2\varphi + \Delta^2\varpi} \qquad = u\frac{\vartheta_3' v}{\vartheta_3 v} + \frac{\varkappa^2\Pi}{\Delta^4\varpi}\int_0^u \frac{du}{\mathrm{tg}^2\varphi + \frac{1}{\Delta^2\varpi}}$$

$$= u\frac{\vartheta_2' v}{\vartheta_2 v} + \frac{\Pi}{\cos^4\varpi}\int_0^u \frac{du}{\frac{1}{\Delta^2\varphi} + \mathrm{tg}^2\varpi} \qquad = u\frac{\vartheta_1' v}{\vartheta_1 v} - \frac{\Pi}{\sin^4\varpi}\int_0^u \frac{du}{\Delta^2\varphi + \cot^2\varpi}$$

Man sieht, dass von den in diesen 48 Formeln auftretenden Integralen dritter Gattung je d r e i nur der Form nach verschieden sind, wie z. B.

$$\int_0^u \frac{du}{\frac{\Delta^2\varphi}{\sin^2\varphi} + \varkappa^2\varkappa'^2\frac{\sin^2\varpi}{\Delta^2\varpi}} = \int_0^u \frac{du}{\frac{1}{\sin^2\varphi} - \varkappa^2\frac{\cos^2\varpi}{\Delta^2\varpi}} = \int_0^u \frac{du}{\cot^2\varphi + \frac{\varkappa'^2}{\Delta^2\varpi}}$$

oder

$$\int_0^u \frac{du}{\frac{1}{\sin^2\varphi} - \varkappa^2\sin^2\varpi} = \int_0^u \frac{du}{\frac{\Delta^2\varphi}{\sin^2\varphi} + \varkappa^2\cos^2\varpi} = \int_0^u \frac{du}{\cot^2\varphi + \Delta^2\varpi}$$

In dem bekannten von Jacobi aufgestellten Tableau für Integrale dritter Gattung*) sind desswegen bloss sechszehn Gleichungen enthalten.

55.

In der folgenden Tabelle sollen die Integrale $w = \int_0^u \frac{du}{y^2 - p}$ nach den Werthen von y geordnet, und die zugehörigen Intervalle der r e e l l e n Parameter p angegeben werden.

1. $y = \sin\varphi$

$$\Pi w = u\frac{\vartheta' v}{\vartheta v} - \frac{1}{2}\lg\frac{\vartheta_1(u+v)}{\vartheta_1(v-u)}\,, \qquad 0 < p = \sin^2\varpi < 1$$

$$\frac{\Pi}{\varkappa^2\sin^4\varpi}w = -u\frac{\vartheta_1' v}{\vartheta_1 v} + \frac{1}{2}\lg\frac{\vartheta(u+v)}{\vartheta(u-v)}\,, \qquad \frac{1}{\varkappa^2} < p = \frac{1}{\varkappa^2\sin^2\varpi} < \infty$$

$$\frac{\varkappa'^2\Pi}{\varkappa^2\cos^4\varpi}w = u\frac{\vartheta_2' v}{\vartheta_2 v} - \frac{1}{2}\lg\frac{\vartheta_3(u+v)}{\vartheta_3(u-v)}\,, \qquad \frac{1}{\varkappa^2} < p = \frac{\Delta^2\varpi}{\varkappa^2\cos^2\varpi} < \infty$$

$$\frac{\varkappa'^2\Pi}{\Delta^4\varpi}w = -u\frac{\vartheta_3' v}{\vartheta_3 v} + \frac{1}{2}\lg\frac{\vartheta_2(u+v)}{\vartheta_2(u-v)}\,, \qquad 0 < p = \frac{\cos^2\varpi}{\Delta^2\varpi} < 1$$

*) *Sur la rotation d'un corps*, Math. Werke Bd. 2, S. 186.

$$2. \quad y = \frac{1}{\sin\varphi}$$

$$\kappa^2 \Pi w = u\frac{\vartheta' v}{\vartheta v} - \frac{1}{2}\lg\frac{\vartheta(u+v)}{\vartheta(u-v)}, \qquad 0 < p = \kappa^2 \sin^2\varpi < \kappa^2$$

$$\frac{\Pi}{\sin^4\varpi} w = -u\frac{\vartheta_1' v}{\vartheta_1 v} + \frac{1}{2}\lg\frac{\vartheta_1(u+v)}{\vartheta_1(v-u)}, \qquad 1 < p = \frac{1}{\sin^2\varpi} < \infty$$

$$\frac{\kappa'^2 \Pi}{\cos^4\varpi} w = u\frac{\vartheta_2' v}{\vartheta_2 v} - \frac{1}{2}\lg\frac{\vartheta_2(u+v)}{\vartheta_2(u-v)}, \qquad 1 < p = \frac{\Delta^2\varpi}{\cos^2\varpi} < \infty$$

$$\frac{\kappa^2\kappa'^2 \Pi}{\Delta^4\varpi} w = -u\frac{\vartheta_3' v}{\vartheta_3 v} + \frac{1}{2}\lg\frac{\vartheta_3(u+v)}{\vartheta_3(u-v)}, \qquad 0 < p = \frac{\kappa^2\cos^2\varpi}{\Delta^2\varpi} < \kappa^2$$

$$3. \quad y = \cos\varphi$$

$$\Pi w = -u\frac{\vartheta' v}{\vartheta v} + \frac{1}{2}\lg\frac{\vartheta_1(u+v)}{\vartheta_1(v-u)}, \qquad 0 < p = \cos^2\varpi < 1$$

$$\frac{\Pi}{\kappa^2\sin^4\varpi} w = u\frac{\vartheta_1' v}{\vartheta_1 v} - \frac{1}{2}\lg\frac{\vartheta(u+v)}{\vartheta(u-v)}, \qquad -\infty < p = -\frac{\Delta^2\varpi}{\kappa^2\sin^2\varpi} < -\frac{\kappa'^2}{\kappa^2}$$

$$\frac{\kappa'^2 \Pi}{\kappa^2\cos^4\varpi} w = -u\frac{\vartheta_2' v}{\vartheta_2 v} + \frac{1}{2}\lg\frac{\vartheta_3(u+v)}{\vartheta_3(u-v)}, \qquad -\infty < p = -\frac{\kappa'^2}{\kappa^2\cos^2\varpi} < -\frac{\kappa'^2}{\kappa^2}$$

$$\frac{\kappa'^2 \Pi}{\Delta^4\varpi} w = u\frac{\vartheta_3' v}{\vartheta_3 v} - \frac{1}{2}\lg\frac{\vartheta_2(u+v)}{\vartheta_2(u-v)}, \qquad 0 < p = \frac{\kappa'^2\sin^2\varpi}{\Delta^2\varpi} < 1$$

$$4. \quad y = \frac{1}{\cos\varphi}$$

$$\frac{\kappa^2}{\kappa'^2}\Pi w = u\frac{\vartheta' v}{\vartheta v} - \frac{1}{2}\lg\frac{\vartheta_3(u+v)}{\vartheta_3(u-v)}, \qquad -\frac{\kappa^2}{\kappa'^2} < p = -\frac{\kappa^2}{\kappa'^2}\cos^2\varpi < 0$$

$$\frac{\Pi}{\kappa'^2\sin^4\varpi} w = -u\frac{\vartheta_1' v}{\vartheta_1 v} + \frac{1}{2}\lg\frac{\vartheta_2(u+v)}{\vartheta_2(u-v)}, \qquad 1 < p = \frac{\Delta^2\varpi}{\kappa'^2\sin^2\varpi} < \infty$$

$$\frac{\Pi}{\cos^4\varpi} w = u\frac{\vartheta_2' v}{\vartheta_2 v} - \frac{1}{2}\lg\frac{\vartheta_1(u+v)}{\vartheta_1(v-u)}, \qquad 1 < p = \sec^2\varpi < \infty$$

$$\frac{\kappa^2 \Pi}{\Delta^4\varpi} w = -u\frac{\vartheta_3' v}{\vartheta_3 v} + \frac{1}{2}\lg\frac{\vartheta(u+v)}{\vartheta(u-v)}, \qquad -\frac{\kappa^2}{\kappa'^2} < p = -\frac{\kappa^2\sin^2\varpi}{\Delta^2\varpi} < 0$$

$$5. \quad y = \Delta\varphi$$

$$\kappa^2 \Pi w = -u\frac{\vartheta' v}{\vartheta v} + \frac{1}{2}\lg\frac{\vartheta_1(u+v)}{\vartheta_1(v-u)}, \qquad \kappa'^2 < p = \Delta^2\varpi < 1$$

$$\frac{\Pi}{\sin^4\varpi} w = u\frac{\vartheta_1' v}{\vartheta_1 v} - \frac{1}{2}\lg\frac{\vartheta(u+v)}{\vartheta(u-v)}, \qquad -\infty < p = -\cot^2\varpi < 0$$

$$\frac{\kappa'^2 \Pi}{\cos^4\varpi} w = -u\frac{\vartheta_2' v}{\vartheta_2 v} + \frac{1}{2}\lg\frac{\vartheta_3(u+v)}{\vartheta_3(u-v)}, \qquad -\infty < p = -\kappa'^2\operatorname{tg}^2\varpi < 0$$

$$\frac{\kappa^2\kappa'^2 \Pi}{\Delta^4\varpi} w = u\frac{\vartheta_3' v}{\vartheta_3 v} - \frac{1}{2}\lg\frac{\vartheta_2(u+v)}{\vartheta_2(u-v)}, \qquad \kappa'^2 < p = \frac{\kappa'^2}{\Delta^2\varpi} < 1$$

$$6.\quad y=\frac{1}{\Delta\varphi}$$

$$\frac{\varkappa^2}{\varkappa'^2}\Pi w=-u\frac{\vartheta' v}{\vartheta v}+\frac{1}{2}\lg\frac{\vartheta_2(u+v)}{\vartheta_2(u-v)}\,,\qquad 1<p=\frac{1}{\varkappa'^2}\Delta^2\varpi<\frac{1}{\varkappa'^2}$$

$$\frac{\Pi}{\varkappa'^2\sin^4\varpi}w=u\frac{\vartheta_1' v}{\vartheta_1 v}-\frac{1}{2}\lg\frac{\vartheta_3(u+v)}{\vartheta_3(u-v)}\,,\qquad -\infty<p=-\frac{1}{\varkappa'^2}\cot^2\varpi<0$$

$$\frac{\Pi}{\cos^4\varpi}w=-u\frac{\vartheta_2' v}{\vartheta_2 v}+\frac{1}{2}\lg\frac{\vartheta(u+v)}{\vartheta(u-v)}\,,\qquad -\infty<p=-\operatorname{tg}^2\varpi<0$$

$$\frac{\varkappa^2\Pi}{\Delta^4\varpi}w=u\frac{\vartheta_3' v}{\vartheta_3 v}-\frac{1}{2}\lg\frac{\vartheta_1(u+v)}{\vartheta_1(v-u)}\,,\qquad 1<p=\frac{1}{\Delta^2\varpi}<\frac{1}{\varkappa'^2}$$

$$7.\quad y=\operatorname{tg}\varphi$$

$$\frac{\varkappa^2}{\varkappa'^2}\Pi w=u\frac{\vartheta' v}{\vartheta v}-\frac{1}{2}\lg\frac{\vartheta_3(u+v)}{\vartheta_3(u-v)}\,,\qquad -\frac{1}{\varkappa'^2}<p=-\frac{1}{\varkappa'^2}\Delta^2\varpi<-1$$

$$\frac{\Pi}{\varkappa'^2\sin^4\varpi}w=-u\frac{\vartheta_1' v}{\vartheta_1 v}+\frac{1}{2}\lg\frac{\vartheta_2(u+v)}{\vartheta_2(u-v)}\,,\qquad 0<p=\frac{1}{\varkappa'^2}\cot^2\varpi<\infty$$

$$\frac{\Pi}{\cos^4\varpi}w=u\frac{\vartheta_2' v}{\vartheta_2 v}-\frac{1}{2}\lg\frac{\vartheta_1(u+v)}{\vartheta_1(v-u)}\,,\qquad 0<p=\operatorname{tg}^2\varpi<\infty$$

$$\frac{\varkappa^2\Pi}{\Delta^4\varpi}w=-u\frac{\vartheta_3' v}{\vartheta_3 v}+\frac{1}{2}\lg\frac{\vartheta(u+v)}{\vartheta(u-v)}\,,\qquad -\frac{1}{\varkappa'^2}<p=-\frac{1}{\Delta^2\varpi}<-1$$

$$8.\quad y=\cot\varphi$$

$$\varkappa^2\Pi w=u\frac{\vartheta' v}{\vartheta v}-\frac{1}{2}\lg\frac{\vartheta(u+v)}{\vartheta(u-v)}\,,\qquad -1<p=-\Delta^2\varpi<-\varkappa'^2$$

$$\frac{\Pi}{\sin^4\varpi}w=-u\frac{\vartheta_1' v}{\vartheta_1 v}+\frac{1}{2}\lg\frac{\vartheta_1(u+v)}{\vartheta_1(v-u)}\,,\qquad 0<p=\cot^2\varpi<\infty$$

$$\frac{\varkappa'^2\Pi}{\cos^4\varpi}w=u\frac{\vartheta_2' v}{\vartheta_2 v}-\frac{1}{2}\lg\frac{\vartheta_2(u+v)}{\vartheta_2(u-v)}\,,\qquad 0<p=\varkappa'^2\operatorname{tg}^2\varpi<\infty$$

$$\frac{\varkappa^2\varkappa'^2\Pi}{\Delta^4\varpi}w=-u\frac{\vartheta_3' v}{\vartheta_3 v}+\frac{1}{2}\lg\frac{\vartheta_3(u+v)}{\vartheta_3(u-v)}\,,\qquad -1<p=-\frac{\varkappa'^2}{\Delta^2\varpi}<-\varkappa'^2$$

$$9.\quad y=\frac{\sin\varphi}{\Delta\varphi}$$

$$\frac{1}{\varkappa'^2}\Pi w=-u\frac{\vartheta' v}{\vartheta v}+\frac{1}{2}\lg\frac{\vartheta_2(u+v)}{\vartheta_2(u-v)}\,,\qquad 0<p=\frac{1}{\varkappa'^2}\cos^2\varpi<\frac{1}{\varkappa'^2}$$

$$\frac{\Pi}{\varkappa^2\varkappa'^2\sin^4\varpi}w=u\frac{\vartheta_1' v}{\vartheta_1 v}-\frac{1}{2}\lg\frac{\vartheta_3(u+v)}{\vartheta_3(u-v)}\,,\qquad -\infty<p=-\frac{\Delta^2\varpi}{\varkappa^2\varkappa'^2\sin^2\varpi}<-\frac{1}{\varkappa^2}$$

$$\frac{\Pi}{\varkappa^2\cos^4\varpi}w=-u\frac{\vartheta_2' v}{\vartheta_2 v}+\frac{1}{2}\lg\frac{\vartheta(u+v)}{\vartheta(u-v)}\,,\qquad -\infty<p=-\frac{1}{\varkappa^2}\sec^2\varpi<-\frac{1}{\varkappa^2}$$

$$\frac{\Pi}{\Delta^4\varpi}w=u\frac{\vartheta_3' v}{\vartheta_3 v}-\frac{1}{2}\lg\frac{\vartheta_1(u+v)}{\vartheta_1(v-u)}\,,\qquad 0<p=\frac{\sin^2\varpi}{\Delta^2\varpi}<\frac{1}{\varkappa'^2}$$

$$10.\quad y = \frac{\Delta\varphi}{\sin\varphi}$$

$$\varkappa^2 \Pi w = u\frac{\vartheta' v}{\vartheta v} - \frac{1}{2}\lg\frac{\vartheta(u+v)}{\vartheta(u-v)}\,, \qquad -\varkappa^2 < p = -\varkappa^2\cos^2\varpi < 0$$

$$\frac{\Pi}{\sin^4\varpi}w = -u\frac{\vartheta_1' v}{\vartheta_1 v} + \frac{1}{2}\lg\frac{\vartheta_1(u+v)}{\vartheta_1(v-u)}\,, \qquad \varkappa'^2 < p = \frac{\Delta^2\varpi}{\sin^2\varpi} < \infty$$

$$\frac{\varkappa'^2\Pi}{\cos^4\varpi}w = u\frac{\vartheta_2' v}{\vartheta_2 v} - \frac{1}{2}\lg\frac{\vartheta_2(u+v)}{\vartheta_2(u-v)}\,, \qquad \varkappa'^2 < p = \varkappa'^2\sec^2\varpi < \infty$$

$$\frac{\varkappa^2\varkappa'^2\Pi}{\Delta^4\varpi}w = -u\frac{\vartheta_3' v}{\vartheta_3 v} + \frac{1}{2}\lg\frac{\vartheta_3(u+v)}{\vartheta_3(u-v)}\,, \qquad -\varkappa^2 < p = -\frac{\varkappa^2\varkappa'^2\sin^2\varpi}{\Delta^2\varpi} < 0$$

$$11.\quad y = \frac{\cos\varphi}{\Delta\varphi}$$

$$\Pi w = u\frac{\vartheta' v}{\vartheta v} - \frac{1}{2}\lg\frac{\vartheta_2(u+v)}{\vartheta_2(u-v)}\,, \qquad 0 < p = \sin^2\varpi < 1$$

$$\frac{\Pi}{\varkappa^2\sin^4\varpi}w = -u\frac{\vartheta_1' v}{\vartheta_1 v} + \frac{1}{2}\lg\frac{\vartheta_3(u+v)}{\vartheta_3(u-v)}\,, \qquad \frac{1}{\varkappa^2} < p = \frac{1}{\varkappa^2\sin^2\varpi} < \infty$$

$$\frac{\varkappa'^2\Pi}{\varkappa^2\cos^4\varpi}w = u\frac{\vartheta_2' v}{\vartheta_2 v} - \frac{1}{2}\lg\frac{\vartheta(u+v)}{\vartheta(u-v)}\,, \qquad \frac{1}{\varkappa^2} < p = \frac{\Delta^2\varpi}{\varkappa^2\cos^2\varpi} < \infty$$

$$\frac{\varkappa'^2\Pi}{\Delta^4\varpi}w = -u\frac{\vartheta_3' v}{\vartheta_3 v} + \frac{1}{2}\lg\frac{\vartheta_1(u+v)}{\vartheta_1(v-u)}\,, \qquad 0 < p = \frac{\cos^2\varpi}{\Delta^2\varpi} < 1$$

$$12.\quad y = \frac{\Delta\varphi}{\cos\varphi}$$

$$\varkappa^2\Pi w = u\frac{\vartheta' v}{\vartheta v} - \frac{1}{2}\lg\frac{\vartheta_3(u+v)}{\vartheta_3(u-v)}\,, \qquad 0 < p = \varkappa^2\sin^2\varpi < \varkappa^2$$

$$\frac{\Pi}{\sin^4\varpi}w = -u\frac{\vartheta_1' v}{\vartheta_1 v} + \frac{1}{2}\lg\frac{\vartheta_2(u+v)}{\vartheta_2(u-v)}\,, \qquad 1 < p = \frac{1}{\sin^2\varpi} < \infty$$

$$\frac{\varkappa'^2\Pi}{\cos^4\varpi}w = u\frac{\vartheta_2' v}{\vartheta_2 v} - \frac{1}{2}\lg\frac{\vartheta_1(u+v)}{\vartheta_1(v-u)}\,, \qquad 1 < p = \frac{\Delta^2\varpi}{\cos^2\varpi} < \infty$$

$$\frac{\varkappa^2\varkappa'^2\Pi}{\Delta^4\varpi}w = -u\frac{\vartheta_3' v}{\vartheta_3 v} + \frac{1}{2}\lg\frac{\vartheta(u+v)}{\vartheta(u-v)}\,, \qquad 0 < p = \frac{\varkappa^2\cos^2\varpi}{\Delta^2\varpi} < \varkappa^2$$

Da die Integrale dritter Gattung unendlich werden, wenn innerhalb des Integrationsintervalles $y^2 = p$, so sind, wie leicht zu sehen, für reelle Werthe von φ und ϖ die von $\lg\frac{\vartheta_1(u+v)}{\vartheta_1(v-u)}$ abhängigen Formeln an die Bedingung $u < v$, dagegen die $\lg\frac{\vartheta_2(u+v)}{\vartheta_2(u-v)}$ enthaltenden an die Bedingung $u < \frac{\pi}{2} - v$ geknüpft.

56.

Legendre unterscheidet die Integrale w logarithmischen Charakters von denen trigonometrischen Charakters w'. Die letzteren gehen aus den vorstehenden Formeln hervor, wenn man v mit vi resp. $\operatorname{tg}\frac{1}{2}\varpi$ mit $i\operatorname{tg}\frac{1}{2}\varpi'$ vertauscht. Da hierdurch Π in $\frac{2K}{\pi}\frac{\sin\varpi'\cos\varpi'\Delta(\varpi'\varkappa')}{\cos^4\varpi'}i = \frac{\Pi' i}{\cos^4\varpi'}$ übergeht, so erhält man das correspondirende reelle Formelsystem:

1. $y = \sin\varphi$

$$\frac{\Pi'}{\cos^4\varpi'}w' = -u\frac{\theta' v}{\theta v} + \frac{1}{2i}\lg\frac{\theta_1(v+ui)}{\theta_1(v-ui)}, \qquad -\infty < p = -\operatorname{tg}^2\varpi' < 0$$

$$\frac{\Pi'}{\varkappa^2\sin^4\varpi'}w' = u\frac{\theta_1' v}{\theta_1 v} - \frac{1}{2i}\lg\frac{\theta(v+ui)}{\theta(v-ui)}, \qquad -\infty < p = -\frac{1}{\varkappa^2}\cot^2\varpi' < 0$$

$$\frac{\varkappa'^2}{\varkappa^2}\Pi' w' = -u\frac{\theta_2' v}{\theta_2 v} + \frac{1}{2i}\lg\frac{\theta_3(v+ui)}{\theta_3(v-ui)}, \qquad 1 < p = \frac{1}{\varkappa^2}\Delta^2\varpi' < \frac{1}{\varkappa^2}$$

$$\frac{\varkappa'^2\Pi'}{\Delta^4\varpi'}w' = u\frac{\theta_3' v}{\theta_3 v} - \frac{1}{2i}\lg\frac{\theta_2(v+ui)}{\theta_2(v-ui)}, \qquad 1 < p = \frac{1}{\Delta^2\varpi'} < \frac{1}{\varkappa^2}$$

2. $y = \frac{1}{\sin\varphi}$

$$\frac{\varkappa^2\Pi'}{\cos^4\varpi'}w' = -u\frac{\theta' v}{\theta v} + \frac{1}{2i}\lg\frac{\theta(v+ui)}{\theta(v-ui)}, \qquad -\infty < p = -\varkappa^2\operatorname{tg}^2\varpi' < 0$$

$$\frac{\Pi'}{\sin^4\varpi'}\varpi' = u\frac{\theta_1' v}{\theta_1 v} - \frac{1}{2i}\lg\frac{\theta_1(v+ui)}{\theta_1(v-ui)}, \qquad -\infty < p = -\cot^2\varpi' < 0$$

$$\varkappa'^2\Pi' w' = -u\frac{\theta_2' v}{\theta_2 v} + \frac{1}{2i}\lg\frac{\theta_2(v+ui)}{\theta_2(v-ui)}, \qquad \varkappa^2 < p = \Delta^2\varpi' < 1$$

$$\frac{\varkappa^2\varkappa'^2\Pi'}{\Delta^4\varpi'}w' = u\frac{\theta_3' v}{\theta_3 v} - \frac{1}{2i}\lg\frac{\theta_3(v+ui)}{\theta_3(v-ui)}, \qquad \varkappa^2 < p = \frac{\varkappa^2}{\Delta^2\varpi'} < 1$$

3. $y = \cos\varphi$

$$\frac{\Pi'}{\cos^4\varpi'}w' = u\frac{\theta' v}{\theta v} - \frac{1}{2i}\lg\frac{\theta_1(v+ui)}{\theta_1(v-ui)}, \qquad 1 < p = \sec^2\varpi' < \infty$$

$$\frac{\Pi'}{\varkappa^2\sin^4\varpi'}w' = -u\frac{\theta_1' v}{\theta_1 v} + \frac{1}{2i}\lg\frac{\theta(v+ui)}{\theta(v-ui)}, \qquad 1 < p = \frac{\Delta^2\varpi'}{\varkappa^2\sin^2\varpi'} < \infty$$

$$\frac{\varkappa'^2}{\varkappa^2}\Pi' w' = u\frac{\theta_2' v}{\theta_2 v} - \frac{1}{2i}\lg\frac{\theta_3(v+ui)}{\theta_3(v-ui)}, \qquad -\frac{\varkappa'^2}{\varkappa^2} < p = -\frac{\varkappa'^2}{\varkappa^2}\cos^2\varpi' < 0$$

$$\frac{\varkappa'^2\Pi'}{\Delta^4\varpi'}w' = -u\frac{\theta_3' v}{\theta_3 v} + \frac{1}{2i}\lg\frac{\theta_2(v+ui)}{\theta_2(v-ui)}, \qquad -\frac{\varkappa'^2}{\varkappa^2} < p = -\frac{\varkappa'^2\sin^2\varpi'}{\Delta^2\varpi'} < 0$$

4. $y = \frac{1}{\cos\varphi}$

$$\frac{\varkappa^2 \Pi'}{\varkappa'^2\cos^4\varpi'}\, w' = -u\frac{\theta' v}{\theta v} + \frac{1}{2i}\lg\frac{\theta_3(v+ui)}{\theta_3(v-ui)}\,, \qquad -\infty < p = -\frac{\varkappa^2}{\varkappa'^2\cos^2\varpi'} < -\frac{\varkappa^2}{\varkappa'^2}$$

$$\frac{\Pi'}{\varkappa'^2\sin^4\varpi'}\, w' = u\frac{\theta_1' v}{\theta_1 v} - \frac{1}{2i}\lg\frac{\theta_2(v+ui)}{\theta_2(v-ui)}\,, \qquad -\infty < p = -\frac{\Delta^2\varpi'}{\varkappa'^2\sin^2\varpi'} < -\frac{\varkappa^2}{\varkappa'^2}$$

$$\Pi' w' = -u\frac{\theta_2' v}{\theta_2 v} + \frac{1}{2i}\lg\frac{\theta_1(v+ui)}{\theta_1(v-ui)}\,, \qquad 0 < p = \cos^2\varpi' < 1$$

$$\frac{\varkappa^2\Pi'}{\Delta^4\varpi'}\, w' = u\frac{\theta_3' v}{\theta_3 v} - \frac{1}{2i}\lg\frac{\theta(v+ui)}{\theta(v-ui)}\,, \qquad 0 < p = \frac{\varkappa^2\sin^2\varpi'}{\Delta^2\varpi'} < 1$$

5. $y = \Delta\varphi$

$$\frac{\varkappa^2\Pi'}{\cos^4\varpi'}\, w' = u\frac{\theta' v}{\theta v} - \frac{1}{2i}\lg\frac{\theta_1(v+ui)}{\theta_1(v-ui)}\,, \qquad 1 < p = \frac{\Delta^2\varpi'}{\cos^2\varpi'} < \infty$$

$$\frac{\Pi'}{\sin^4\varpi'}\, w' = -u\frac{\theta_1' v}{\theta_1 v} + \frac{1}{2i}\lg\frac{\theta(v+ui)}{\theta(v-ui)}\,, \qquad 1 < p = \frac{1}{\sin^2\varpi'} < \infty$$

$$\varkappa'^2\Pi' w' = u\frac{\theta_2' v}{\theta_2 v} - \frac{1}{2i}\lg\frac{\theta_3(v+ui)}{\theta_3(v-ui)}\,, \qquad 0 < p = \varkappa'^2\sin^2\varpi' < \varkappa'^2$$

$$\frac{\varkappa^2\varkappa'^2\Pi'}{\Delta^4\varpi'}\, w' = -u\frac{\theta_3' v}{\theta_3 v} + \frac{1}{2i}\lg\frac{\theta_2(v+ui)}{\theta_2(v-ui)}\,, \qquad 0 < p = \frac{\varkappa'^2\cos^2\varpi'}{\Delta^2\varpi'} < \varkappa'^2$$

6. $y = \frac{1}{\Delta\varphi}$

$$\frac{\varkappa^2\Pi'}{\varkappa'^2\cos^4\varpi'}\, w' = u\frac{\theta' v}{\theta v} - \frac{1}{2i}\lg\frac{\theta_2(v+ui)}{\theta_2(v-ui)}\,, \qquad \frac{1}{\varkappa'^2} < p = \frac{\Delta^2\varpi'}{\varkappa'^2\cos^2\varpi'} < \infty$$

$$\frac{\Pi'}{\varkappa'^2\sin^4\varpi'}\, w' = -u\frac{\theta_1' v}{\theta_1 v} + \frac{1}{2i}\lg\frac{\theta_3(v+ui)}{\theta_3(v-ui)}\,, \qquad \frac{1}{\varkappa'^2} < p = \frac{1}{\varkappa'^2\sin^2\varpi'} < \infty$$

$$\Pi' w' = u\frac{\theta_2' v}{\theta_2 v} - \frac{1}{2i}\lg\frac{\theta(v+ui)}{\theta(v-ui)}\,, \qquad 0 < p = \sin^2\varpi' < 1$$

$$\frac{\varkappa^2\Pi'}{\Delta^4\varpi'}\, w' = -u\frac{\theta_3' v}{\theta_3 v} + \frac{1}{2i}\lg\frac{\theta_1(v+ui)}{\theta_1(v-ui)}\,, \qquad 0 < p = \frac{\cos^2\varpi'}{\Delta^2\varpi'} < 1$$

7. $y = \operatorname{tg}\varphi$

$$\frac{\varkappa^2\Pi'}{\varkappa'^2\cos^4\varpi'}\, w' = -u\frac{\theta' v}{\theta v} + \frac{1}{2i}\lg\frac{\theta_3(v+ui)}{\theta_3(v-ui)}\,, \qquad -\infty < p = -\frac{\Delta^2\varpi'}{\varkappa'^2\cos^2\varpi'} < -\frac{1}{\varkappa'^2}$$

$$\frac{\Pi'}{\varkappa'^2\sin^4\varpi'}\, w' = u\frac{\theta_1' v}{\theta_1 v} - \frac{1}{2i}\lg\frac{\theta_2(v+ui)}{\theta_2(v-ui)}\,, \qquad -\infty < p = -\frac{1}{\varkappa'^2\sin^2\varpi'} < -\frac{1}{\varkappa'^2}$$

$$\Pi' w' = -u\frac{\theta_2' v}{\theta_2 v} + \frac{1}{2i}\lg\frac{\theta_1(v+ui)}{\theta_1(v-ui)}\,, \qquad -1 < p = -\sin^2\varpi' < 0$$

$$\frac{\varkappa^2\Pi'}{\Delta^4\varpi'}\, w' = u\frac{\theta_3' v}{\theta_3 v} - \frac{1}{2i}\lg\frac{\theta(v+ui)}{\theta(v-ui)}\,, \qquad -1 < p = -\frac{\cos^2\varpi'}{\Delta^2\varpi'} < 0$$

8. $y = \cot\varphi$

$$\frac{\varkappa^2\Pi'}{\cos^4\varpi'}w' = -u\frac{\theta'v}{\theta v} + \frac{1}{2i}\lg\frac{\theta(v+ui)}{\theta(v-ui)}, \qquad -\infty < p = -\frac{\varDelta^2\varpi'}{\cos^2\varpi'} < -1$$

$$\frac{\Pi'}{\sin^4\varpi'}w' = u\frac{\theta_1'v}{\theta_1 v} - \frac{1}{2i}\lg\frac{\theta_1(v+ui)}{\theta_1(v-ui)}, \qquad -\infty < p = -\frac{1}{\sin^2\varpi'} < -1$$

$$\varkappa'^2\Pi'w' = -u\frac{\theta_2'v}{\theta_2 v} + \frac{1}{2i}\lg\frac{\theta_2(v+ui)}{\theta_2(v-ui)}, \qquad -\varkappa'^2 < p = -\varkappa'^2\sin^2\varpi' < 0$$

$$\frac{\varkappa^2\varkappa'^2\Pi'}{\varDelta^4\varpi'}w' = u\frac{\theta_3'v}{\theta_3 v} - \frac{1}{2i}\lg\frac{\theta_3(v+ui)}{\theta_3(v-ui)}, \qquad -\varkappa'^2 < p = -\frac{\varkappa'^2\cos^2\varpi'}{\varDelta^2\varpi'} < 0$$

9. $y = \frac{\sin\varphi}{\varDelta\varphi}$

$$\frac{\Pi'}{\varkappa'^2\cos^4\varpi'}w' = u\frac{\theta'v}{\theta v} - \frac{1}{2i}\lg\frac{\theta_2(v+ui)}{\theta_2(v-ui)}, \qquad \frac{1}{\varkappa'^2} < p = \frac{1}{\varkappa'^2\cos^2\varpi'} < \infty$$

$$\frac{\Pi'}{\varkappa^2\varkappa'^2\sin^4\varpi'}w' = -u\frac{\theta_1'v}{\theta_1 v} + \frac{1}{2i}\lg\frac{\theta_3(v+ui)}{\theta_3(v-ui)}, \qquad \frac{1}{\varkappa'^2} < p = \frac{\varDelta^2\varpi'}{\varkappa^2\varkappa'^2\sin^2\varpi'} < \infty$$

$$\frac{1}{\varkappa^2}\Pi'w' = u\frac{\theta_2'v}{\theta_2 v} - \frac{1}{2i}\lg\frac{\theta(v+ui)}{\theta(v-ui)}, \qquad -\frac{1}{\varkappa^2} < p = -\frac{1}{\varkappa^2}\cos^2\varpi' < 0$$

$$\frac{\Pi'}{\varDelta^4\varpi'}w' = -u\frac{\theta_3'v}{\theta_3 v} + \frac{1}{2i}\lg\frac{\theta_1(v+ui)}{\theta_1(v-ui)}, \qquad -\frac{1}{\varkappa^2} < p = -\frac{\sin^2\varpi'}{\varDelta^2\varpi'} < 0$$

10. $y = \frac{\varDelta\varphi}{\sin\varphi}$

$$\frac{\varkappa^2\Pi'}{\cos^4\varpi'}w' = -u\frac{\theta'v}{\theta v} + \frac{1}{2i}\lg\frac{\theta(v+ui)}{\theta(v-ui)}, \qquad -\infty < p = -\varkappa^2\sec^2\varpi' < -\varkappa^2$$

$$\frac{\Pi'}{\sin^4\varpi'}w' = u\frac{\theta_1'v}{\theta_1 v} - \frac{1}{2i}\lg\frac{\theta_1(v+ui)}{\theta_1(v-ui)}, \qquad -\infty < p = -\frac{\varDelta^2\varpi'}{\sin^2\varpi'} < -\varkappa^2$$

$$\varkappa'^2\Pi'w' = -u\frac{\theta_2'v}{\theta_2 v} + \frac{1}{2i}\lg\frac{\theta_2(v+ui)}{\theta_2(v-ui)}, \qquad 0 < p = \varkappa'^2\cos^2\varpi' < \varkappa'^2$$

$$\frac{\varkappa^2\varkappa'^2\Pi'}{\varDelta^4\varpi'}w' = u\frac{\theta_3'v}{\theta_3 v} - \frac{1}{2i}\lg\frac{\theta_3(v+ui)}{\theta_3(v-ui)}, \qquad 0 < p = \frac{\varkappa^2\varkappa'^2\sin^2\varpi'}{\varDelta^2\varpi'} < \varkappa'^2$$

11. $y = \frac{\cos\varphi}{\varDelta\varphi}$

$$\frac{\Pi'}{\cos^4\varpi'}w' = -u\frac{\theta'v}{\theta v} + \frac{1}{2i}\lg\frac{\theta_2(v+ui)}{\theta_2(v-ui)}, \qquad -\infty < p = -\operatorname{tg}^2\varpi' < 0$$

$$\frac{\Pi'}{\varkappa^2\sin^4\varpi'}w' = u\frac{\theta_1'v}{\theta_1 v} - \frac{1}{2i}\lg\frac{\theta_3(v+ui)}{\theta_3(v-ui)}, \qquad -\infty < p = -\frac{1}{\varkappa^2}\cot^2\varpi' < 0$$

$$\frac{\varkappa'^2}{\varkappa^2}\Pi'w' = -u\frac{\theta_2'v}{\theta_2 v} + \frac{1}{2i}\lg\frac{\theta(v+ui)}{\theta(v-ui)}, \qquad 1 < p = \frac{1}{\varkappa^2}\varDelta^2\varpi' < \frac{1}{\varkappa^2}$$

$$\frac{\varkappa'^2\Pi'}{\varDelta^4\varpi'}w' = u\frac{\theta_3'v}{\theta_3 v} - \frac{1}{2i}\lg\frac{\theta_1(v+ui)}{\theta_1(v-ui)}, \qquad 1 < p = \frac{1}{\varDelta^2\varpi'} < \frac{1}{\varkappa^2}$$

$$12. \quad y = \frac{\Delta\varphi}{\cos\varphi}$$

$$\frac{\varkappa^2 \Pi'}{\cos^4\varpi'} w' = -u\frac{\theta' v}{\theta v} + \frac{1}{2i}\lg\frac{\theta_3(v+ui)}{\theta_3(v-ui)}, \qquad -\infty < p = -\varkappa^2 \operatorname{tg}^2\varpi' < 0$$

$$\frac{\Pi'}{\sin^4\varpi'} w' = u\frac{\theta_1' v}{\theta_1 v} - \frac{1}{2i}\lg\frac{\theta_2(v+ui)}{\theta_2(v-ui)}, \qquad -\infty < p = -\cot^2\varpi' < 0$$

$$\varkappa'^2 \Pi' w' = -u\frac{\theta_2' v}{\theta_2 v} + \frac{1}{2i}\lg\frac{\theta_1(v+ui)}{\theta_1(v-ui)}, \qquad \varkappa^2 < p = \Delta^2\varpi' < 1$$

$$\frac{\varkappa^2\varkappa'^2 \Pi'}{\Delta^4\varpi'} w' = u\frac{\theta_3' v}{\theta_3 v} - \frac{1}{2i}\lg\frac{\theta(v+ui)}{\theta(v-ui)}, \qquad \varkappa^2 < p = \frac{\varkappa^2}{\Delta^2\varpi'} < 1$$

Selbstverständlich können die logarithmischen Glieder durch die reelle Form eines arctang ausgedrückt werden, wenn man für $\theta(v+ui) = \eta + \zeta i$

$$\frac{1}{2i}\lg\frac{\theta(v+ui)}{\theta(v-ui)} = \operatorname{arc}\left(\operatorname{tg} = \frac{1}{i}\,\frac{\theta(v+ui) - \theta(v-ui)}{\theta(v+ui)+\theta(v-ui)}\right) = \operatorname{arctg}\frac{\zeta}{\eta}$$

setzt. Von den vieldeutigen Werthen des Logarithmus oder arctg ist überall derjenige Werth zu nehmen, der mit u verschwindet, also mit u im ersten oder vierten Quadranten liegt. Ausserdem hat man

$$\begin{aligned}
\theta(v+ui) &= 1 - q(e^{2v}+e^{-2v})\cos 2u + q^4(e^{4v}+e^{-4v})\cos 4u \mp \ldots \\
&\quad - i\{q(e^{2v}-e^{-2v})\sin 2u - q^4(e^{4v}-e^{-4v})\sin 4u \pm \ldots\} \\
\theta_1(v+ui) &= q^{\frac14}(e^{v}-e^{-v})\cos u - q^{\frac94}(e^{3v}-e^{-3v})\cos 3u \pm \ldots \\
&\quad + i\{q^{\frac14}(e^{v}+e^{-v})\sin u - q^{\frac94}(e^{3v}+e^{-3v})\sin 3u \pm \ldots\} \\
\theta_2(v+ui) &= q^{\frac14}(e^{v}+e^{-v})\cos u + q^{\frac94}(e^{3v}+e^{-3v})\cos 3u + \ldots \\
&\quad + i\{q^{\frac14}(e^{v}-e^{-v})\sin u + q^{\frac94}(e^{3v}+\ {}^{-3v})\sin 3u + \ldots\} \\
\theta_3(v+ui) &= 1 + q(e^{2v}+e^{-2v})\cos 2u + q^4(e^{4v}+e^{-4v})\cos 4u + \ldots \\
&\quad + i\{q(e^{2v}-e^{-2v})\sin 2u + q^4(e^{4v}-e^{-4v})\sin 4u + \ldots\}
\end{aligned}$$

57.

Die Ausdrücke der Artt. 55 und 56 zeigen, dass für jeden der zwölf Werthe von y das zugehörige p für reelle ϖ oder ϖ' alle reellen Werthe zwischen $\pm\infty$, und zwar doppelt, durchläuft. Ersetzt man v durch $\frac{\pi}{2} - v$, so gehen die beiden dem gleichen Intervalle angehörigen Werthe von p des Art. 55 in einander über,

während in den Gleichungen des Art. 56 zu gleichem Zwecke $\frac{\pi}{2} - v'$ an die Stelle von v', oder was dasselbe ist, $\frac{\pi K'}{2K} - v$ an die Stelle von v zu treten hat.

Den Formeln des Art. 56 kann eine modificirte Gestalt gegeben werden, wenn man bei Ableitung derselben v unverändert lässt und dagegen u mit ui vertauscht. Dann entspringen z. B. aus der siebenten Quaternion die Gleichungen

$$y = \sin\varphi'$$

$$\frac{\varkappa^2}{\varkappa'^2}\Pi w = -u\frac{\vartheta' v}{\vartheta v} + \frac{1}{2i}\lg\frac{\vartheta_3(v+ui)}{\vartheta_3(v-ui)}, \qquad 1 < p = \frac{\Delta^2\varpi}{\varkappa'^2} < \frac{1}{\varkappa'^2}$$

$$\frac{\Pi}{\varkappa'^2\sin^4\varpi} w = u\frac{\vartheta_1' v}{\vartheta_1 v} - \frac{1}{2i}\lg\frac{\vartheta_2(v+ui)}{\vartheta_2(v-ui)}, \qquad -\infty < p = -\frac{1}{\varkappa'^2}\cot^2\varpi < 0$$

$$\frac{\Pi}{\cos^4\varpi} w = -u\frac{\vartheta_2' v}{\vartheta_2 v} + \frac{1}{2i}\lg\frac{\vartheta_1(v+ui)}{\vartheta_1(v-ui)}, \qquad -\infty < p = -\operatorname{tg}^2\varpi < 0$$

$$\frac{\varkappa^2\Pi}{\Delta^4\varpi} w = u\frac{\vartheta_3' v}{\vartheta_3 v} - \frac{1}{2i}\lg\frac{\vartheta(v+ui)}{\vartheta(v-ui)}, \qquad 1 < p = \frac{1}{\Delta^2\varpi} < \frac{1}{\varkappa'^2}$$

Lässt man hier $\varkappa\ u\ v$ in $\varkappa'\ u'\ v'$ übergehen, so ergeben sich die Ausdrücke

$$1.\quad y = \sin\varphi$$

$$\frac{\varkappa'^2}{\varkappa^2}\Pi' w' = -u'\frac{\vartheta'(v', q')}{\vartheta(v', q')} + \frac{1}{2i}\lg\frac{\vartheta_3(v'+u'i, q')}{\vartheta_3(v'-u'i, q')}, \qquad 1 < p = \frac{\Delta^2\varpi'}{\varkappa^2} < \frac{1}{\varkappa^2}$$

$$\frac{\Pi'}{\varkappa^2\sin^4\varpi'} w' = u'\frac{\vartheta_1'(v', q')}{\vartheta_1(v', q')} - \frac{1}{2i}\lg\frac{\vartheta_2(v'+u'i, q')}{\vartheta_2(v'-u'i, q')}, \qquad -\infty < p = -\frac{1}{\varkappa^2}\cot^2\varpi' < 0$$

$$\frac{\Pi'}{\cos^4\varpi'} w' = -u'\frac{\vartheta_2'(v', q')}{\vartheta_2(v', q')} + \frac{1}{2i}\lg\frac{\vartheta_1(v'+u'i, q')}{\vartheta_1(v'-u'i, q')}, \qquad -\infty < p = -\operatorname{tg}^2\varpi' < 0$$

$$\frac{\varkappa'^2\Pi'}{\Delta^4\varpi'} w' = u'\frac{\vartheta_3'(v', q')}{\vartheta_3(v', q')} - \frac{1}{2i}\lg\frac{\vartheta(v'+u'i, q')}{\vartheta(v'-u'i, q')}, \qquad 1 < p = \frac{1}{\Delta^2\varpi'} < \frac{1}{\varkappa^2}$$

deren Uebereinstimmung mit der früheren Form leicht direct zu verificiren ist.

Auch in den Ausdrücken des Art. 55 kann man, wenn $\varkappa$ der Einheit nahe liegt, mit Vortheil das Argument q' anstatt q einführen und erhält ohne Schwierigkeit

1. $y = \sin\varphi$

$$\Pi w = u'\frac{\theta_2'v'}{\theta_2 v'} - \frac{1}{2}\lg\frac{\theta_1(u'+v')}{\theta_1(v'-u')}\,, \qquad 0 < p = \sin^2\varpi < 1$$

$$\frac{\Pi}{\varkappa^2\sin^4\varpi}w = -u'\frac{\theta_1'v'}{\theta_1 v'} + \frac{1}{2}\lg\frac{\theta_2(u'+v')}{\theta_2(u'-v')}\,, \qquad \frac{1}{\varkappa^2} < p = \frac{1}{\varkappa^2\sin^2\varpi} < \infty$$

$$\frac{\varkappa'^2\Pi}{\varkappa^2\cos^4\varpi}w = u'\frac{\theta'v'}{\theta v'} - \frac{1}{2}\lg\frac{\theta_3(u'+v')}{\theta_3(u'-v')}\,, \qquad \frac{1}{\varkappa^2} < p = \frac{\Delta^2\varpi}{\varkappa^2\cos^2\varpi} < \infty$$

$$\frac{\varkappa'^2\Pi}{\Delta^4\varpi}w = -u'\frac{\theta_3'v'}{\theta_3 v'} + \frac{1}{2}\lg\frac{\theta(u'+v')}{\theta(u'-v')}\,, \qquad 0 < p = \frac{\cos^2\varpi}{\Delta^2\varpi} < 1$$

und entsprechend für die Formeln der übrigen Quaternionen.

Wenn es sich endlich um die Aufstellung der complementären Integrale

$$\mathfrak{w} = \int_u^{\frac{1}{2}\pi}\frac{du}{y^2 - p}$$

handelt, so wird man nur zu beachten haben, dass $\frac{d\mathfrak{w}}{du} = -\frac{dw}{du}$, und dass $\mathfrak{w}$ für $u = \frac{\pi}{2}$ verschwindet. Damit erhält man sogleich

1. $y = \sin\varphi$

$$\Pi\mathfrak{w} = \left(\frac{\pi}{2} - u\right)\frac{\vartheta'v}{\vartheta v} + \frac{1}{2}\lg\frac{\vartheta_1(u+v)}{\vartheta_1(u-v)}\,, \qquad 0 < p = \sin^2\varpi < 1$$

$$\frac{\Pi}{\varkappa^2\sin^4\varpi}\mathfrak{w} = -\left(\frac{\pi}{2} - u\right)\frac{\vartheta_1'v}{\vartheta_1 v} - \frac{1}{2}\lg\frac{\vartheta(u+v)}{\vartheta(u-v)}\,, \qquad \frac{1}{\varkappa^2} < p = \frac{1}{\varkappa^2\sin^2\varpi} < \infty$$

$$\frac{\varkappa'^2\Pi}{\varkappa^2\cos^4\varpi}\mathfrak{w} = \left(\frac{\pi}{2} - u\right)\frac{\vartheta_2'v}{\vartheta_2 v} + \frac{1}{2}\lg\frac{\vartheta_3(u+v)}{\vartheta_3(u-v)}\,, \qquad \frac{1}{\varkappa^2} < p = \frac{\Delta^2\varpi}{\varkappa^2\cos^2\varpi} < \infty$$

$$\frac{\varkappa'^2\Pi}{\Delta^4\varpi}\mathfrak{w} = -\left(\frac{\pi}{2} - u\right)\frac{\vartheta_3'v}{\vartheta_3 v} - \frac{1}{2}\lg\frac{-\vartheta_2(u+v)}{\vartheta_2(u-v)}\,. \qquad 0 < p = \frac{\cos^2\varpi}{\Delta^2\varpi} < 1$$

u. s. w. für die logarithmischen Integrale, sowie für die Integrale trigonometrischen Charakters die entsprechenden Gleichungen

1. $y = \sin\varphi$

$$\frac{\varkappa'^2}{\varkappa^2}\Pi'\mathfrak{w}' = -\left(\frac{\pi}{2} - u\right)\frac{\theta_2'v}{\theta_2 v} - \frac{1}{2i}\lg\frac{\theta_3(v+ui)}{\theta_3(v-ui)}\,, \qquad 1 < p = \frac{1}{\varkappa^2}\Delta^2\varpi' < \frac{1}{\varkappa^2}$$

$$\frac{\Pi'}{\varkappa^2\sin^4\varpi'}\mathfrak{w}' = \left(\frac{\pi}{2} - u\right)\frac{\theta_1'v}{\theta_1 v} + \frac{1}{2i}\lg\frac{\theta(v+ui)}{\theta(v-ui)}\,, \qquad -\infty < p = -\frac{1}{\varkappa^2}\cot^2\varpi' < 0$$

$$\frac{\Pi'}{\cos^4\varpi'}\mathfrak{w}' = -\left(\frac{\pi}{2} - u\right)\frac{\theta'v}{\theta v} - \frac{1}{2i}\lg\frac{i\theta_1(v+ui)}{-i\theta_1(v-ui)}\,, \qquad -\infty < p = -\operatorname{tg}^2\varpi' < 0$$

$$\frac{\varkappa'^2\Pi'}{\Delta^4\varpi'}\mathfrak{w}' = \left(\frac{\pi}{2} - u\right)\frac{\theta_3'v}{\theta_3 v} + \frac{1}{2i}\lg\frac{i\theta_2(v+ui)}{-i\theta_2(v-ui)}\,, \qquad 1 < p = \frac{1}{\Delta^2\varpi'} < \frac{1}{\varkappa^2}$$

u. s. w.

Während also in den Ausdrücken für das Integral w die Function ϑ_1 eine Art Ausnahmestellung einnahm, sofern

$$\lg\frac{\vartheta_1(u+v)}{\vartheta_1(v-u)} = \lg\frac{\vartheta_1(u+v)}{-\vartheta_1(u-v)} \quad \text{an Stelle von} \quad \lg\frac{\vartheta_1(u+v)}{\vartheta_1(u-v)}$$

auftrat*), so ist beim complementären Integral $\mathfrak{w}$, sowohl für reelle wie für imaginäre Werthe von v, $\lg\frac{\vartheta_2(u+v)}{\vartheta_2(u-v)}$ durch $\lg\frac{-\vartheta_2(u+v)}{\vartheta_2(u-v)}$ zu ersetzen. Im Zusammenhange damit steht die weitere Forderung, wonach wenigstens im logarithmischen Falle in den von $\lg\vartheta_1(u-v)$ abhängigen Formeln die Bedingung $u > v$, und in den Ausdrücken mit $\lg[-\vartheta_2(u+v)]$ die Ungleichung $u > \frac{\pi}{2} - v$ erfüllt sein muss, damit der Nenner $y^2 - p$ unter dem Integralzeichen nicht verschwinde.

58.

Die Werthe der ganzen Integrale dritter Gattung ergeben sich aus dem Früheren ohne Weiteres, wenn man in w $u = \frac{\pi}{2}$ oder in $\mathfrak{w}$ $u = 0$ setzt. Doch hat man dabei zu berücksichtigen, dass das ganze Integral $\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{du}{y^2-p}$ nur endlich bleibt, wenn p nicht mit y^2 zusammenfallen kann. Damit gehen für die sogen. logarithmischen Integrale — wenigstens unter Voraussetzung eines reellen Integrationswegs — folgende vierundzwanzig Gleichungen hervor

$$\frac{\pi}{2\varkappa^2\Pi}\frac{\vartheta' v}{\vartheta v} = \int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{du}{\frac{1}{\sin^2\varphi} - \varkappa^2\sin^2\varpi} = \int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{du}{\varkappa'^2\sec^2\varphi + \varkappa^2\cos^2\varpi}$$
$$= \int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{du}{\cot^2\varphi + \Delta^2\varpi} = \int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{du}{\varkappa'^2\operatorname{tg}^2\varphi + \Delta^2\varpi}$$
$$= \int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{du}{\frac{\Delta^2\varphi}{\sin^2\varphi} + \varkappa^2\cos^2\varpi} = \int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{du}{\frac{\Delta^2\varphi}{\cos^2\varphi} - \varkappa^2\sin^2\varpi}$$

---

*) Es liegt auf der Hand, dass in diesem Falle die Gleichförmigkeit sich hätte herstellen lassen, wenn man die Argumente der übrigen Thetafunctionen, was offenbar gestattet ist, in gleicher Weise abändern wollte.

$$\frac{\pi\sin^4\varpi}{2\Pi}\frac{\vartheta_1'v}{\vartheta_1 v}=\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{du}{\frac{1}{\sin^2\varpi}-\varkappa^2\sin^2\varphi}=\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{du}{\frac{\varkappa'^2}{\Delta^2\varphi}+\cot^2\varpi}$$

$$=\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{du}{\varkappa^2\cos^2\varphi+\frac{\Delta^2\varpi}{\sin^2\varpi}}=\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{du}{\varkappa^2\varkappa'^2\frac{\sin^2\varphi}{\Delta^2\varphi}+\frac{\Delta^2\varpi}{\sin^2\varpi}}$$

$$=\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{du}{\Delta^2\varphi+\cot^2\varpi}=\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{du}{\frac{1}{\sin^2\varpi}-\frac{\varkappa^2\cos^2\varphi}{\Delta^2\varphi}}$$

$$-\frac{\pi\cos^4\varpi}{2\varkappa'^2\Pi}\frac{\vartheta_2'v}{\vartheta_2 v}=\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{du}{\frac{\Delta^2\varpi}{\cos^2\varpi}-\varkappa^2\sin^2\varphi}=\frac{1}{\varkappa'^2}\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{du}{\frac{1}{\Delta^2\varphi}+\operatorname{tg}^2\varpi}$$

$$=\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{du}{\varkappa^2\cos^2\varphi+\varkappa'^2\sec^2\varpi}=\frac{1}{\varkappa'^2}\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{du}{\varkappa^2\frac{\sin^2\varphi}{\Delta^2\varphi}+\sec^2\varpi}$$

$$=\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{du}{\Delta^2\varphi+\varkappa'^2\operatorname{tg}^2\varpi}=\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{du}{\frac{\Delta^2\varpi}{\cos^2\varpi}-\varkappa^2\frac{\cos^2\varphi}{\Delta^2\varphi}}$$

$$-\frac{\pi\Delta^4\varpi}{2\varkappa^2\varkappa'^2\Pi}\frac{\vartheta_3'v}{\vartheta_3 v}=\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{du}{\frac{1}{\sin^2\varphi}-\frac{\varkappa^2\cos^2\varpi}{\Delta^2\varpi}}=\frac{1}{\varkappa'^2}\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{du}{\sec^2\varphi+\frac{\varkappa^2\sin^2\varpi}{\Delta^2\varpi}}$$

$$=\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{du}{\cot^2\varphi+\frac{\varkappa'^2}{\Delta^2\varpi}}=\frac{1}{\varkappa'^2}\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{du}{\operatorname{tg}^2\varphi+\frac{1}{\Delta^2\varpi}}$$

$$=\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{du}{\frac{\Delta^2\varphi}{\sin^2\varphi}+\frac{\varkappa^2\varkappa'^2\sin^2\varpi}{\Delta^2\varpi}}=\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{du}{\frac{\Delta^2\varphi}{\cos^2\varphi}-\frac{\varkappa^2\cos^2\varpi}{\Delta^2\varpi}}$$

Bei den Integralen trigonometrischen Charakters kann für reelle Werthe von u y^2 nicht mit p zusammenfallen, dagegen verschwinden jetzt für $u=\frac{\pi}{2}$ die logarithmischen Glieder nur bei den von ϑ und ϑ_3 abhängigen Argumenten, während

$$\frac{1}{2i}\lg\frac{\theta_1(v+ui)}{\theta_1(v-ui)}=\frac{1}{2i}\lg\frac{\vartheta_1(vi-u)}{\vartheta_1(vi+u)}\quad\text{und}\quad\frac{1}{2i}\lg\frac{\theta_2(v+ui)}{\theta_2(v-ui)}=\frac{1}{2i}\lg\frac{\vartheta_2(u-vi)}{\vartheta_2(u+vi)}$$

in

$$\frac{1}{2i}\lg(-1)=\left(m+\frac{1}{2}\right)\pi$$

übergehen, wo die ganze Zahl m für den reellen Integrationsweg zu bestimmen übrig bleibt. Man überzeugt sich aber leicht, dass m verschwinden muss, wenn man etwa $\varkappa=0$ und $\varpi'=\frac{\pi}{2}$ substituirt. Durch die erste Bedingung wird nicht allein $\varkappa'=1$, $K=\frac{\pi}{2}$, $q=0$, $u=\varphi$, $\Delta\varpi'=\cos\varpi'$, $\Pi'=\sin\varpi'\cos^2\varpi'$, sondern auch

$$v = \int_0^{\varpi'} \frac{d\varphi}{\cos\varphi} = \lg \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} + \varpi'\right) \qquad \text{oder} \qquad e^{-v} = \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} - \varpi'\right),$$

folglich

$$\frac{\theta' v}{\theta v} = 0\,, \qquad \frac{\theta_1' v}{\theta_1 v} = \frac{e^v + e^{-v}}{e^v - e^{-v}} = \frac{1}{\sin\varpi'}\,,$$

$$\frac{\theta_2' v}{\theta_2 v} = \frac{e^v - e^{-v}}{e^v + e^{-v}} = \sin\varpi'\,, \qquad \frac{\theta_3' v}{\theta_3 v} = 0$$

Damit erhält man die 48 Integralwerthe

$$-\frac{\pi\cos^4\varpi'}{2\varkappa^2\Pi'}\,\frac{\theta' v}{\theta v} = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{du}{\dfrac{1}{\sin^2\varphi} + \varkappa^2 \operatorname{tg}^2\varpi'} = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{du}{\varkappa'^2\sec^2\varphi + \varkappa^2\sec^2\varpi'}$$

$$= \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{du}{\cot^2\varphi + \dfrac{\varDelta^2\varpi'}{\cos^2\varpi'}} = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{du}{\varkappa'^2\operatorname{tg}^2\varphi + \dfrac{\varDelta^2\varpi'}{\cos^2\varpi'}}$$

$$= \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{du}{\dfrac{\varDelta^2\varphi}{\sin^2\varphi} + \varkappa^2\sec^2\varpi'} = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{du}{\dfrac{\varDelta^2\varphi}{\cos^2\varphi} + \varkappa^2\operatorname{tg}^2\varpi'}$$

$$\frac{\pi\cos^4\varpi'}{2\Pi'}\left(1 - \frac{\theta' v}{\theta v}\right) = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{du}{\sin^2\varphi + \operatorname{tg}^2\varpi'} = \varkappa^2\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{du}{\dfrac{\varDelta^2\varpi'}{\cos^2\varpi'} - \dfrac{\varkappa'^2}{\varDelta^2\varphi}}$$

$$= \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{du}{\sec^2\varpi' - \cos^2\varphi} = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{du}{\sec^2\varpi' - \dfrac{\sin^2\varphi}{\varDelta^2\varphi}}$$

$$= \varkappa^2\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{du}{\dfrac{\varDelta^2\varpi'}{\cos^2\varpi'} - \varDelta^2\varphi} = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{du}{\dfrac{\cos^2\varphi}{\varDelta^2\varphi} + \operatorname{tg}^2\varpi'}$$

$$\frac{\pi\sin^4\varpi'}{2\Pi'}\,\frac{\theta_1' v}{\theta_1 v} = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{du}{\varkappa^2\sin^2\varphi + \cot^2\varpi'} = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{du}{\dfrac{1}{\sin^2\varpi'} - \dfrac{\varkappa'^2}{\varDelta^2\varphi}}$$

$$= \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{du}{\dfrac{\varDelta^2\varpi'}{\sin^2\varpi'} - \varkappa^2\cos^2\varphi} = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{du}{\dfrac{\varDelta^2\varpi'}{\sin^2\varpi'} - \varkappa^2\varkappa'^2\dfrac{\sin^2\varphi}{\varDelta^2\varphi}}$$

$$= \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{du}{\dfrac{1}{\sin^2\varpi'} - \varDelta^2\varphi} = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{du}{\varkappa^2\dfrac{\cos^2\varphi}{\varDelta^2\varphi} + \cot^2\varpi'}$$

$$\frac{\pi\sin^4\varpi'}{2\Pi'}\left(\frac{\theta_1' v}{\theta_1 v} - 1\right) = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{du}{\dfrac{1}{\sin^2\varphi} + \cot^2\varpi'} = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{du}{\varkappa'^2\sec^2\varphi + \dfrac{\varDelta^2\varpi'}{\sin^2\varpi'}}$$

$$= \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{du}{\cot^2\varphi + \dfrac{1}{\sin^2\varpi'}} = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{du}{\varkappa'^2\operatorname{tg}^2\varphi + \dfrac{1}{\sin^2\varpi'}}$$

$$= \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{du}{\dfrac{\varDelta^2\varphi}{\sin^2\varphi} + \dfrac{\varDelta^2\varpi'}{\sin^2\varpi'}} = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{du}{\dfrac{\varDelta^2\varphi}{\cos^2\varphi} + \cot^2\varpi'}$$

$$\frac{\pi}{2\varkappa'^2\Pi'}\frac{\theta_2'v}{\theta_2 v}=\int_0^{\frac12\pi}\frac{du}{\Delta^2\varpi'-\varkappa^2\sin^2\varphi}=\frac{1}{\varkappa'^2}\int_0^{\frac12\pi}\frac{du}{\frac{1}{\Delta^2\varphi}-\sin^2\varpi'}$$

$$=\int_0^{\frac12\pi}\frac{du}{\varkappa^2\cos^2\varphi+\varkappa'^2\cos^2\varpi'}=\frac{1}{\varkappa'^2}\int_0^{\frac12\pi}\frac{du}{\varkappa^2\frac{\sin^2\varphi}{\Delta^2\varphi}+\cos^2\varpi'}$$

$$=\int_0^{\frac12\pi}\frac{du}{\Delta^2\varphi-\varkappa'^2\sin^2\varpi'}=\int_0^{\frac12\pi}\frac{du}{\Delta^2\varpi'-\varkappa^2\frac{\cos^2\varphi}{\Delta^2\varphi}}$$

$$\frac{\pi}{2\varkappa'^2\Pi'}\left(1-\frac{\theta_2'v}{\theta_2 v}\right)=\int_0^{\frac12\pi}\frac{du}{\frac{1}{\sin^2\varphi}-\Delta^2\varpi'}=\frac{1}{\varkappa'^2}\int_0^{\frac12\pi}\frac{du}{\sec^2\varphi-\cos^2\varpi'}$$

$$=\int_0^{\frac12\pi}\frac{du}{\cot^2\varphi+\varkappa'^2\sin^2\varpi'}=\frac{1}{\varkappa'^2}\int_0^{\frac12\pi}\frac{du}{\operatorname{tg}^2\varphi+\sin^2\varpi'}$$

$$=\int_0^{\frac12\pi}\frac{du}{\frac{\Delta^2\varphi}{\sin^2\varphi}-\varkappa'^2\cos^2\varpi'}=\int_0^{\frac12\pi}\frac{du}{\frac{\Delta^2\varphi}{\cos^2\varphi}-\Delta^2\varpi'}$$

$$\frac{\pi\Delta^4\varpi'}{2\varkappa^2\varkappa'^2\Pi'}\frac{\theta_3'v}{\theta_3 v}=\int_0^{\frac12\pi}\frac{du}{\frac{1}{\sin^2\varphi}-\frac{\varkappa^2}{\Delta^2\varpi'}}=\frac{1}{\varkappa'^2}\int_0^{\frac12\pi}\frac{du}{\sec^2\varphi-\varkappa^2\frac{\sin^2\varpi'}{\Delta^2\varpi'}}$$

$$=\int_0^{\frac12\pi}\frac{du}{\cot^2\varphi+\varkappa'^2\frac{\cos^2\varpi'}{\Delta^2\varpi'}}=\frac{1}{\varkappa'^2}\int_0^{\frac12\pi}\frac{du}{\operatorname{tg}^2\varphi+\frac{\cos^2\varpi'}{\Delta^2\varpi'}}$$

$$=\int_0^{\frac12\pi}\frac{du}{\frac{\Delta^2\varphi}{\sin^2\varphi}-\varkappa^2\varkappa'^2\frac{\sin^2\varpi'}{\Delta^2\varpi'}}=\int_0^{\frac12\pi}\frac{du}{\frac{\Delta^2\varphi}{\cos^2\varphi}-\frac{\varkappa^2}{\Delta^2\varpi'}}$$

$$\frac{\pi\Delta^4\varpi'}{2\varkappa'^2\Pi'}\left(1-\frac{\theta_3'v}{\theta_3 v}\right)=\int_0^{\frac12\pi}\frac{du}{\frac{1}{\Delta^2\varpi'}-\sin^2\varphi}=\frac{\varkappa^2}{\varkappa'^2}\int_0^{\frac12\pi}\frac{du}{\frac{1}{\Delta^2\varphi}-\frac{\cos^2\varpi'}{\Delta^2\varpi'}}$$

$$=\int_0^{\frac12\pi}\frac{du}{\cos^2\varphi+\frac{\varkappa'^2\sin^2\varpi'}{\Delta^2\varpi'}}=\frac{1}{\varkappa'^2}\int_0^{\frac12\pi}\frac{du}{\frac{\sin^2\varphi}{\Delta^2\varphi}+\frac{\sin^2\varpi'}{\Delta^2\varpi'}}$$

$$=\varkappa^2\int_0^{\frac12\pi}\frac{du}{\Delta^2\varphi-\frac{\varkappa'^2\cos^2\varpi'}{\Delta^2\varpi'}}=\int_0^{\frac12\pi}\frac{du}{\frac{1}{\Delta^2\varpi'}-\frac{\cos^2\varphi}{\Delta^2\varphi}}$$

59.

Die Formeln der Artt. 55 und 56 sind mit Rücksicht auf reelle Werthe des Parameters p entwickelt worden, allein selbstverständlich behalten die für die Integrale w und w' gefundenen Ausdrücke auch für complexe Werthe von p resp. ϖ und ϖ' Gültigkeit. Es handelt sich dann nur um Bestimmung des complexen Arguments $v = v_0 + v_1 i$ der Thetafunctionen für ein gegebenes $p = \alpha + \beta i$, und diese Be-

stimmung kann genau nach den Vorschriften des Art. 53 ausgeführt werden. Indess ist es wünschenswerth, die resultirenden Formeln in ihre reellen und imaginären Theile zu zerlegen, da nach Art. 42 bei der Rechnung mit elliptischen Integralen beide gesondert gebraucht werden. Dabei stellt sich heraus, dass die reellen und imaginären Theile der Integrale mit complexem Parameter, selbst wieder von solchen mit reellem Parameter abhängig gemacht werden können.

Nehmen wir als Beispiel die von JACOBI in den Vordergrund gestellte erste Form der zweiten Quaternion für $y = \frac{1}{\sin\varphi}$ und $p = \varkappa^2 \sin^2 \varpi$

$$\varkappa^2 \Pi w = u \frac{\vartheta' v}{\vartheta v} - \frac{1}{2} \lg \frac{\vartheta(u+v)}{\vartheta(u-v)} = P + Qi$$

und bezeichnen wie früher durch $\bar{v}$ und $\bar{\varpi}$ die conjugirten Werthe von v und ϖ, so ist

$$2P = u \frac{\partial}{\partial v_0} \lg \vartheta v \, \vartheta \bar{v} - \frac{1}{2} \lg \frac{\vartheta(u+v)\, \vartheta(u+\bar{v})}{\vartheta(u-v)\, \vartheta(u-\bar{v})}$$

$$2Qi = u \frac{\partial}{\partial v_0} \lg \frac{\vartheta v}{\vartheta \bar{v}} - \frac{1}{2} \lg \frac{\vartheta(u+v)\, \vartheta(u-\bar{v})}{\vartheta(u+\bar{v})\, \vartheta(u-v)}$$

Die Anwendung der Formel des Art. 51

$$\vartheta^2 \vartheta(u+v)\, \vartheta(u-v) = \vartheta^2 u \, \vartheta^2 v - \vartheta_1^2 u \, \vartheta_1^2 v$$

ergibt sogleich

$$2P = u \frac{\partial}{\partial v_0} \lg \left(\vartheta^2 v_0 \vartheta^2(v_1 i) - \vartheta_1^2 v_0 \vartheta_1^2(v_1 i)\right)$$
$$- \frac{1}{2} \lg \frac{\vartheta^2(u+v_0)\, \vartheta_1^2(v_1 i) - \vartheta_1^2(u+v_0)\, \vartheta_1^2(v_1 i)}{\vartheta^2(u-v_0)\, \vartheta_1^2(v_1 i) - \vartheta_1^2(u-v_0)\, \vartheta_1^2(v_1 i)}$$
$$= 2u \frac{\vartheta' v_0}{\vartheta v_0} - \lg \frac{\vartheta(u+v_0)}{\vartheta(u-v_0)} + u \frac{\partial}{\partial v_0} \lg \left(1 + \frac{\vartheta_1^2 v_0}{\vartheta^2 v_0} \frac{\theta_1^2 v_1}{\theta^2 v_1}\right)$$
$$- \frac{1}{2} \lg \left(1 + \frac{\theta_1^2 v_1}{\theta^2 v_1} \frac{\vartheta_1^2(u+v_0)}{\vartheta^2(u+v_0)}\right) + \frac{1}{2} \lg \left(1 + \frac{\theta_1^2 v_1}{\theta^2 v_1} \frac{\vartheta_1^2(u-v_0)}{\vartheta^2(u-v_0)}\right)$$

Bezeichnet man im Folgenden durch ϖ_0 Π_0 w_0 resp. ϖ_1' Π_1' und w_1' die Werthe, in welche ϖ Π w resp. ϖ' Π' w' übergehen, wenn man v durch v_0 resp. v_1 ersetzt, so hat man zunächst vermöge der Verdoppelungsformeln des Art. 18

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}k = \operatorname{tg}\varpi_0 \Delta(\varpi_0 \varkappa)\,, \qquad \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}k' = \operatorname{tg}\varpi_1' \Delta(\varpi_1' \varkappa')$$

und für $\sin l = \varkappa \sin k\,,$ $\qquad \sin l' = \varkappa' \sin k'$

$$\sin\varpi_0 = \frac{\sin\frac{1}{2}k}{\cos\frac{1}{2}l}\,, \qquad \varkappa\sin\varpi_0 = \frac{\sin\frac{1}{2}l}{\cos\frac{1}{2}k}\,, \qquad \Pi_0 = \frac{2K}{\pi}\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}k\cos^2\varpi_0$$

$$\frac{\cos\varpi_0}{\varDelta\varpi_0} = \frac{\cos\frac{1}{2}k}{\cos\frac{1}{2}l}\,, \qquad \varkappa\frac{\cos\varpi_0}{\varDelta\varpi_0} = \frac{\sin\frac{1}{2}l}{\sin\frac{1}{2}k}\,, \qquad \Pi_1' = \frac{2K}{\pi}\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}k'\cos^2\varpi_1'$$

u. s. w. Führt man ferner die Gleichungen

$$\frac{\vartheta_1^2(u+v_0)}{\vartheta^2(u+v_0)} = \varkappa\sin^2\psi_0\,, \qquad \frac{\vartheta_1^2(u+v_1 i)}{\vartheta^2(u+v_1 i)} = \varkappa\sin^2\psi_1'$$

$$\frac{\vartheta_1^2(u-v_0)}{\vartheta^2(u-v_0)} = \varkappa\sin^2\omega_0\,, \qquad \frac{\vartheta_1^2(u-v_1 i)}{\vartheta^2(u-v_1 i)} = \varkappa\sin^2\omega_1'$$

ein, so erhält man durch die Additionsformeln des Art. 17

$$\sin\frac{\psi_0}{\omega_0} = \frac{\cos\varpi_0\varDelta\varpi_0\sin\varphi \pm \sin\varpi_0\cos\varphi\varDelta\varphi}{1-\varkappa^2\sin^2\varpi_0\sin^2\varphi}$$

$$\sin\frac{\psi_1'}{\omega_1'} = \frac{\varDelta\varpi_1'\sin\varphi \pm i\sin\varpi_1'\cos\varpi_1'\cos\varphi\varDelta\varphi}{1-\sin^2\varpi_1'\varDelta^2\varphi}$$

wo folglich die Winkel ψ_1' und ω_1' conjugirte complexe Werthe besitzen.

Die Substitution dieser Ausdrücke liefert nach einer leichten Rechnung

$$P = \varkappa^2\Pi_0 w_0 + \frac{\varkappa^2\Pi_0\operatorname{tg}^2\varpi_1'}{1+\varkappa^2\sin^2\varpi_0\operatorname{tg}^2\varpi_1'}u - \frac{1}{4}\lg\frac{1+\varkappa^2\operatorname{tg}^2\varpi_1'\sin^2\psi_0}{1+\varkappa^2\operatorname{tg}^2\varpi_1'\sin^2\omega_0}$$

In analoger Weise findet man

$$2Qi = u\left(\frac{\vartheta'(v_0+v_1 i)}{\vartheta(v_0+v_1 i)} - \frac{\vartheta'(v_0-v_1 i)}{\vartheta(v_0-v_1 i)}\right) - \frac{1}{2}\lg\frac{\vartheta^2(u+v_1 i)\vartheta^2 v_0 - \vartheta_1^2(u+v_1 i)\vartheta_1^2 v_0}{\vartheta^2(u-v_1 i)\vartheta^2 v_0 - \vartheta_1^2(u-v_1 i)\vartheta_1^2 v_0}$$

Durch Differentiation des Integrals

$$\frac{\varkappa^2\Pi'}{\cos^4\varpi'}\int_0^u\frac{du}{\frac{1}{\sin^2\varphi}+\varkappa^2\operatorname{tg}^2\varpi'} = -u\frac{\theta' v}{\theta v} - \frac{1}{2i}\lg\frac{\vartheta(u+vi)}{\vartheta(u-vi)}$$

aber folgt

$$\frac{\varkappa^2\Pi'\sin^2\varphi}{\cos^4\varpi'(1+\varkappa^2\operatorname{tg}^2\varpi'\sin^2\varphi)} = -\frac{\theta' v}{\theta v} - \frac{1}{2i}\left(\frac{\vartheta'(u+vi)}{\vartheta(u+vi)} - \frac{\vartheta'(u-vi)}{\vartheta(u-vi)}\right)$$

und damit

$$\frac{\vartheta'(v_0+v_1 i)}{\vartheta(v_0+v_1 i)} - \frac{\vartheta'(v_0-v_1 i)}{\vartheta(v_0-v_1 i)} = -2i\left\{\frac{\theta' v_1}{\theta v_1} + \frac{\varkappa^2\Pi_1'\sin^2\varpi_0}{\cos^4\varpi_1'(1+\varkappa^2\sin^2\varpi_0\operatorname{tg}^2\varpi_1')}\right\}$$

$$2Qi = -2i\left\{u\frac{\theta' v_1}{\theta v_1} + \frac{1}{2i}\lg\frac{\vartheta(u+v_1 i)}{\vartheta(u-v_1 i)}\right\} - 2ui\frac{\varkappa^2\Pi_1'\sin^2\varpi_0}{\cos^4\varpi_1'(1+\varkappa^2\sin^2\varpi_0\operatorname{tg}^2\varpi_1')}$$

$$-\frac{1}{2}\lg\left(1-\frac{\vartheta_1^2 v_0}{\vartheta^2 v_0}\frac{\vartheta_1^2(u+v_1 i)}{\vartheta^2(u+v_1 i)}\right) + \frac{1}{2}\lg\left(1-\frac{\vartheta_1^2 v_0}{\vartheta^2 v_0}\frac{\vartheta_1^2(u-v_1 i)}{\vartheta^2(u-v_1 i)}\right)$$

Die Anwendung der eingeführten Bezeichnungen ergibt

$$Q = \frac{\varkappa^2 \Pi_1'}{\cos^4 \varpi_1'} w_1' - \frac{\varkappa^2 \Pi_1' \sin^2 \varpi_0}{\cos^4 \varpi_1' (1 + \varkappa^2 \sin^2 \varpi_0 \operatorname{tg}^2 \varpi_1')} u - \frac{1}{4i} \lg \frac{1 - \varkappa^2 \sin^2 \varpi_0 \sin^2 \psi_1'}{1 - \varkappa^2 \sin^2 \varpi_0 \sin^2 \omega_1'}$$

wo das logarithmische Glied in reeller Form durch

$$+ \frac{1}{2} \operatorname{arc\,tg} \frac{2\varkappa^2 \sin^2 \varpi_0 \sin \varpi_1' \cos \varpi_1' \varDelta \varpi_1' \sin \varphi \cos \varphi \varDelta \varphi}{(1 - \sin^2 \varpi_1' \varDelta^2 \varphi)^2 - \varkappa^2 \sin^2 \varpi_0 (\varDelta^2 \varpi_1' \sin^2 \varphi - \sin^2 \varpi_1' \cos^2 \varpi_1' \cos^2 \varphi \varDelta^2 \varphi)}$$

ersetzt werden kann.

Man sieht, dass die Werthe von P und Qi durch gegenseitige Vertauschung von v_0 und $v_1 i$ in einander übergehen. Das Integral w aber mit complexem Parameter ist auf die beiden Integrale w_0 und w_1' mit reellem Parameter reducirt. Die Ausführbarkeit einer derartigen Reduction ist bereits von Legendre erkannt worden*).

60.

Eine abweichende Bestimmung von Q geht hervor, wenn man dasselbe auf die Form bringt

$$Q = -\frac{\varkappa^2 \Pi_1' \sin^2 \varpi_0}{\cos^4 \varpi_1' (1 + \varkappa^2 \sin^2 \varpi_0 \operatorname{tg}^2 \varpi_1')} u - \frac{1}{2} \left\{ (u + v_0) \frac{\theta' v_1}{\theta v_1} + \frac{1}{2i} \lg \frac{\vartheta(u + v_0 + v_1 i)}{\vartheta(u + v_0 - v_1 i)} \right\}$$
$$- \frac{1}{2} \left\{ (u - v_0) \frac{\theta' v_1}{\theta v_1} + \frac{1}{2i} \lg \frac{\vartheta(u - v_0 + v_1 i)}{\vartheta(u - v_0 - v_1 i)} \right\}$$
$$= \frac{\varkappa^2 \Pi_1'}{2 \cos^4 \varpi_1'} \left\{ \int_0^{u+v_0} + \int_0^{u-v_0} \frac{du}{\frac{1}{\sin^2 \varphi} + \varkappa^2 \operatorname{tg}^2 \varpi_1'} - \frac{2u \sin^2 \varpi_0}{1 + \varkappa^2 \sin^2 \varpi_0 \operatorname{tg}^2 \varpi_1'} \right\}$$

Durch Vergleichung dieses Ausdrucks mit dem früheren entspringt das Additionstheorem für die Integrale dritter Gattung in der Gestalt

$$\frac{\varkappa^2 \Pi_1'}{\cos^4 \varpi_1'} \left\{ 2\int_0^u - \int_0^{u+v_0} - \int_0^{u-v_0} \frac{du}{\frac{1}{\sin^2 \varphi} + \varkappa^2 \operatorname{tg}^2 \varpi_1'} \right\} = \frac{1}{2i} \lg \frac{1 - \varkappa^2 \sin^2 \varpi_0 \sin^2 \psi_1'}{1 - \varkappa^2 \sin^2 \varpi_0 \sin^2 \omega_1'}$$

oder mit leichter Buchstabenveränderung

$$\varkappa^2 \Pi \left\{ \int_0^{u+u_1} + \int_0^{u-u_1} - 2\int_0^u \frac{du}{\frac{1}{\sin^2 \varphi} - \varkappa^2 \sin^2 \varpi} \right\} = \frac{1}{2} \lg \frac{1 - \varkappa^2 \sin^2 \varphi_1 \sin^2 \omega}{1 - \varkappa^2 \sin^2 \varphi_1 \sin^2 \psi}$$

wie man auch direct mittelst des Ausdruckes

*) Legendre, *Traité des fonctions elliptiques, Vol. I, Cap.* 24.

$$\frac{1}{2}\lg\frac{\vartheta^2(u+v)\,\vartheta(u+u_1-v)\,\vartheta(u-u_1-v)}{\vartheta^2(u-v)\,\vartheta(u+u_1+v)\,\vartheta(u-u_1+v)}$$

beweist*). Für $u = u_1$ ergeben sich die Verdoppelungsformeln

$$\varkappa^2\Pi\left\{\int_0^{2u} - 2\int_0^u \frac{du}{\frac{1}{\sin^2\varphi} - \varkappa^2\sin\varpi}\right\} = \frac{1}{2}\lg\frac{1-\varkappa^2\sin^2\varphi\sin^2\omega}{1-\varkappa^2\sin^2\varphi\sin^2\psi}$$

$$\frac{\varkappa^2\Pi'}{\cos^4\varpi'}\left\{\int_0^{2u} - 2\int_0^u \frac{du}{\frac{1}{\sin^2\varphi} + \varkappa^2\operatorname{tg}^2\varpi'}\right\} = \frac{1}{2i}\lg\frac{1-\varkappa^2\sin^2\varphi\sin^2\omega'}{1-\varkappa^2\sin^2\varphi\sin^2\psi'}$$

In entsprechender Weise leitet man das Additionstheorem für die Integrale der zweiten Gattung durch logarithmische Differentiation der Gleichungen ab

$$\frac{\vartheta^2\vartheta(u+u_1)\,\vartheta(u-u_1)}{\vartheta^2 u\,\vartheta^2 u_1} = 1 - \frac{\vartheta_1^2 u\,\vartheta_1^2 u_1}{\vartheta^2 u\,\vartheta^2 u_1} = 1 - \varkappa^2\sin^2\varphi_1\sin^2\varphi$$

$$\frac{\vartheta^2\vartheta_1(u+u_1)\,\vartheta_1(u-u_1)}{\vartheta_1^2 u\,\vartheta^2 u_1} = 1 - \frac{\vartheta^2 u\,\vartheta_1^2 u_1}{\vartheta_1^2 u\,\vartheta^2 u_1} = 1 - \frac{\sin^2\varphi_1}{\sin^2\varphi}$$

$$\frac{\vartheta^2\vartheta_2(u+u_1)\,\vartheta_2(u-u_1)}{\vartheta_2^2 u\,\vartheta^2 u_1} = 1 - \frac{\vartheta_3^2 u\,\vartheta_1^2 u_1}{\vartheta_2^2 u\,\vartheta^2 u_1} = 1 - \sin^2\varphi_1\frac{\varDelta^2\varphi}{\cos^2\varphi}$$

$$\frac{\vartheta^2\vartheta_3(u+u_1)\,\vartheta_3(u-u_1)}{\vartheta_3^2 u\,\vartheta^2 u_1} = 1 - \frac{\vartheta_2^2 u\,\vartheta_1^2 u_1}{\vartheta_3^2 u\,\vartheta^2 u_1} = 1 - \varkappa^2\sin^2\varphi_1\frac{\cos^2\varphi}{\varDelta^2\varphi}$$

wodurch die Formeln

$$\frac{\vartheta'(u+u_1)}{\vartheta(u+u_1)} + \frac{\vartheta'(u-u_1)}{\vartheta(u-u_1)} - 2\frac{\vartheta' u}{\vartheta u} = -\frac{4K\varkappa^2}{\pi}\frac{\sin^2\varphi_1\sin\varphi\cos\varphi\varDelta\varphi}{1-\varkappa^2\sin^2\varphi_1\sin^2\varphi}$$

$$\frac{\vartheta_1'(u+u_1)}{\vartheta_1(u+u_1)} + \frac{\vartheta_1'(u-u_1)}{\vartheta_1(u-u_1)} - 2\frac{\vartheta_1' u}{\vartheta_1 u} = \frac{4K}{\pi}\frac{\sin^2\varphi_1\cot\varphi\varDelta\varphi}{\sin^2\varphi - \sin^2\varphi_1}$$

$$\frac{\vartheta_2'(u+u_1)}{\vartheta_2(u+u_1)} + \frac{\vartheta_2'(u-u_1)}{\vartheta_2(u-u_1)} - 2\frac{\vartheta_2' u}{\vartheta_2 u} = -\frac{4K\varkappa'^2}{\pi}\frac{\sin^2\varphi_1\operatorname{tg}\varphi\varDelta\varphi}{\cos^2\varphi - \sin^2\varphi_1\varDelta^2\varphi}$$

$$\frac{\vartheta_3'(u+u_1)}{\vartheta_3(u+u_1)} + \frac{\vartheta_3'(u-u_1)}{\vartheta_3(u-u_1)} - 2\frac{\vartheta_3' u}{\vartheta_3 u} = \frac{4K\varkappa^2\varkappa'^2}{\pi}\frac{\sin^2\varphi_1\sin\varphi\cos\varphi}{\varDelta\varphi(\varkappa'^2 + \varkappa^2\cos^2\varphi_1\cos^2\varphi)}$$

erhalten werden, denen die weiteren Relationen zur Seite stehen

$$\frac{\vartheta_3'(u+u_1)}{\vartheta_3(u+u_1)} + \frac{\vartheta_2'(u-u_1)}{\vartheta_2(u-u_1)} - \frac{\vartheta_3' u}{\vartheta_3 u} - \frac{\vartheta_2' u}{\vartheta_2 u} =$$

$$= \frac{2K\varkappa'^2}{\pi}\frac{\sin\varphi_1}{\cos\varphi\varDelta\varphi}\frac{1-\varkappa^2\sin^4\varphi}{\cos\varphi\varDelta\varphi\cos\varphi_1\varDelta\varphi_1 + \varkappa'^2\sin\varphi\sin\varphi_1}$$

*) Vergl. Jacobi, *Fundamenta*, S. 161.

$$\frac{\vartheta'(u+u_1)}{\vartheta(u+u_1)}+\frac{\vartheta_3'(u-u_1)}{\vartheta_3(u-u_1)}-\frac{\vartheta'u}{\vartheta u}-\frac{\vartheta_3'u}{\vartheta_3 u}=$$
$$=\frac{2K\varkappa^2}{\pi}\frac{\sin\varphi_1\cos\varphi_1}{\varDelta\varphi}\frac{\cos^2\varphi-\sin^2\varphi\varDelta^2\varphi}{\varDelta\varphi\varDelta\varphi_1+\varkappa^2\sin\varphi\cos\varphi\sin\varphi_1\cos\varphi_1}$$

$$\frac{\vartheta'(u+u_1)}{\vartheta(u+u_1)}+\frac{\vartheta_2'(u-u_1)}{\vartheta_2(u-u_1)}-\frac{\vartheta'u}{\vartheta u}-\frac{\vartheta_2'u}{\vartheta_2 u}=$$
$$=\frac{2K}{\pi}\frac{\sin\varphi_1\varDelta\varphi_1}{\cos\varphi}\frac{\varDelta^2\varphi-\varkappa^2\sin^2\varphi\cos^2\varphi}{\cos\varphi\cos\varphi_1+\sin\varphi\varDelta\varphi\sin\varphi_1\varDelta\varphi_1}$$

$$\frac{\vartheta_1'(u+u_1)}{\vartheta_1(u+u_1)}+\frac{\vartheta'(u-u_1)}{\vartheta(u-u_1)}-\frac{\vartheta_1'u}{\vartheta_1 u}-\frac{\vartheta'u}{\vartheta u}=$$
$$=-\frac{2K}{\pi}\frac{\sin\varphi_1}{\sin\varphi}\frac{1-\varkappa^2\sin^4\varphi}{\sin\varphi\cos\varphi_1\varDelta\varphi_1+\cos\varphi\varDelta\varphi\sin\varphi_1}$$

$$\frac{\vartheta_1'(u+u_1)}{\vartheta_1(u+u_1)}+\frac{\vartheta_2'(u-u_1)}{\vartheta_2(u-u_1)}-\frac{\vartheta_1'u}{\vartheta_1 u}-\frac{\vartheta_2'u}{\vartheta_2 u}=$$
$$=-\frac{2K}{\pi}\frac{\sin\varphi_1\cos\varphi_1}{\sin\varphi\cos\varphi}\frac{\cos^2\varphi-\sin^2\varphi\varDelta^2\varphi}{\sin\varphi\cos\varphi\varDelta\varphi_1+\varDelta\varphi\sin\varphi_1\cos\varphi_1}$$

$$\frac{\vartheta_1'(u+u_1)}{\vartheta_1(u+u_1)}+\frac{\vartheta_3'(u-u_1)}{\vartheta_3(u-u_1)}-\frac{\vartheta_1'u}{\vartheta_1 u}-\frac{\vartheta_3'u}{\vartheta_3 u}=$$
$$=-\frac{2K}{\pi}\frac{\sin\varphi_1\varDelta\varphi_1}{\sin\varphi\varDelta\varphi}\frac{\varDelta^2\varphi-\varkappa^2\sin^2\varphi\cos^2\varphi}{\sin\varphi\varDelta\varphi\cos\varphi_1+\cos\varphi\sin\varphi_1\varDelta\varphi_1}$$

nebst den durch Umkehr des Vorzeichens von u_1 und φ_1 entspringenden Ausdrücken.

Bei dieser Gelegenheit wollen wir noch die vielfach zur Reduction dienlichen Ausdrücke anmerken, in welche die Additionsformeln des Art. 17 sich verwandeln, wenn für

$$\frac{2Ku}{\pi}=\int_0^\varphi\frac{d\varphi}{\varDelta(\varphi\varkappa)}\,,\qquad\frac{2Kv}{\pi}=\int_0^\chi\frac{d\varphi}{\varDelta(\varphi\varkappa)}=\int_0^{\chi'}\frac{d\varphi}{\varDelta(\varphi\varkappa')}$$

v in vi übergeht. Dann wird $\psi=\operatorname{am}\frac{2K}{\pi}(u+vi)$ und man erhält

$$\sin\psi=\frac{\sin\varphi\varDelta\chi'+i\cos\varphi\varDelta\varphi\sin\chi'\cos\chi'}{1-\varDelta^2\varphi\sin^2\chi'}=\frac{\sin\varphi\cos\varphi\cos\chi'\varDelta\chi'+i\varDelta\varphi\sin\chi'}{\cos\varphi\cos\chi'+i\sin\varphi\varDelta\varphi\sin\chi'\varDelta\chi'}$$
$$=\frac{1-\cos^2\varphi\cos^2\chi'}{\sin\varphi\varDelta\chi'-i\cos\varphi\varDelta\varphi\sin\chi'\cos\chi'}=\frac{\sin\varphi\varDelta\varphi\cos\chi'+i\cos\varphi\sin\chi'\varDelta\chi'}{\varDelta\varphi\cos\chi'\varDelta\chi'+i\varkappa^2\sin\varphi\cos\varphi\sin\chi'}$$

$$\cos\psi=\frac{\cos\varphi\cos\chi'-i\sin\varphi\varDelta\varphi\sin\chi'\varDelta\chi'}{1-\varDelta^2\varphi\sin^2\chi'}=\frac{\cos\varphi\varDelta\varphi\varDelta\chi'-i\varkappa'^2\sin\varphi\sin\chi'\cos\chi'}{\varDelta\varphi\cos\chi'\varDelta\chi'+i\varkappa^2\sin\varphi\cos\varphi\sin\chi'}$$
$$=\frac{1-\sin^2\varphi\varDelta^2\chi'}{\cos\varphi\cos\chi'+i\sin\varphi\varDelta\varphi\sin\chi'\varDelta\chi'}=\frac{\varDelta\varphi\sin\chi'+i\sin\varphi\cos\varphi\cos\chi'\varDelta\chi'}{\cos\varphi\varDelta\varphi\sin\chi'\cos\chi'+i\sin\varphi\varDelta\chi'}$$

$$\Delta\psi = \frac{\Delta\varphi\cos\chi'\Delta\chi' - i\varkappa^2\sin\varphi\cos\varphi\sin\chi'}{1-\Delta^2\varphi\sin^2\chi'} = \frac{\cos\varphi\sin\chi'\Delta\chi' + i\sin\varphi\Delta\varphi\cos\chi'}{\cos\varphi\Delta\varphi\sin\chi'\cos\chi' + i\sin\varphi\Delta\chi'}$$

$$= \frac{\varkappa^2\cos^2\varphi + \varkappa'^2\cos^2\chi'}{\Delta\varphi\cos\chi'\Delta\chi' + i\varkappa^2\sin\varphi\cos\varphi\sin\chi'} = \frac{\cos\varphi\Delta\varphi\Delta\chi' + i\varkappa'^2\sin\varphi\sin\chi'\cos\chi'}{\cos\varphi\cos\chi' + i\sin\varphi\Delta\varphi\sin\chi'\Delta\chi'}$$

$$\operatorname{tg}\psi = \frac{\sin\varphi\cos\varphi\cos\chi'\Delta\chi' + i\Delta\varphi\sin\chi'}{1-\sin^2\varphi\Delta^2\chi'} = \frac{\sin\varphi\Delta\varphi\cos\chi' + i\cos\varphi\sin\chi'\Delta\chi'}{\cos\varphi\Delta\varphi\Delta\chi' - i\varkappa'^2\sin\varphi\sin\chi'\cos\chi'}$$

$$= \frac{1-\cos^2\varphi\cos^2\chi'}{\sin\varphi\cos\varphi\cos\chi'\Delta\chi' - i\Delta\varphi\sin\chi'} = \frac{\sin\varphi\Delta\chi' + i\cos\varphi\Delta\varphi\sin\chi'\cos\chi'}{\cos\varphi\cos\chi' - i\sin\varphi\Delta\varphi\sin\chi'\Delta\chi'}$$

61.

Eine vereinfachte Gestalt nehmen die Werthe von P und Q an, wenn man an Stelle von ϖ_0 und ϖ_1' die Amplituden k und k' einführt. Zu diesem Zwecke bedienen wir uns nach JACOBI's Vorgange*) des Additionstheorems für den Parameter *(de additione argumenti parametri theorema)*, und ersetzen v resp. durch $v+\bar v = 2v_0$ und $v-\bar v = 2v_1 i$. Dadurch mögen ϖ in k, ϖ' in k', so wie Π und w resp. Π' und w' in $\Pi_k\, w_k\, \Pi_k'\, w_k'$ übergehen, wo

$$\varkappa^2\Pi_k w_k = u\frac{\vartheta'(v+\bar v)}{\vartheta(v+\bar v)} - \frac{1}{2}\lg\frac{\vartheta(v+\bar v+u)}{\vartheta(v+\bar v-u)}$$

$$\frac{\varkappa^2\Pi_k'}{\cos^4 k'} w_k' i = u\frac{\vartheta'(v-\bar v)}{\vartheta(v-\bar v)} - \frac{1}{2}\lg\frac{\vartheta(v-\bar v+u)}{\vartheta(v-\bar v-u)}$$

Die Verbindung dieser Gleichungen mit $\varkappa^2\Pi w = P+Qi$ liefert

$$2(P+Qi) - \varkappa^2\left(\Pi_k w_k + \frac{\Pi_k'}{\cos^4 k'} w_k' i\right) =$$

$$= -u\frac{\partial}{\partial v}\lg\frac{\vartheta^2\vartheta(v+\bar v)\vartheta(v-\bar v)}{\vartheta^2 v\,\vartheta^2\bar v} + \frac{1}{2}\lg\frac{\vartheta^2(v-u)\vartheta(v+\bar v+u)\vartheta(v-\bar v+u)}{\vartheta^2(v+u)\vartheta(v+\bar v-u)\vartheta(v-\bar v-u)}$$

Durch Zerlegung in den reellen und imaginären Theil erhält man leicht

$$2P = \varkappa^2\Pi_k w_k - u\left(\frac{\vartheta'(v+\bar v)}{\vartheta(v+\bar v)} - \frac{\vartheta' v}{\vartheta v} - \frac{\vartheta'\bar v}{\vartheta\bar v}\right) + \frac{1}{2}\lg\frac{\vartheta(v+\bar v+u)\vartheta(v-u)\vartheta(\bar v-u)}{\vartheta(v+\bar v-u)\vartheta(v+u)\vartheta(\bar v+u)}$$

$$2Q = \frac{\varkappa^2\Pi_k'}{\cos^4 k'} w_k' + ui\left(\frac{\vartheta'(v-\bar v)}{\vartheta(v-\bar v)} - \frac{\vartheta' v}{\vartheta v} + \frac{\vartheta'\bar v}{\vartheta\bar v}\right) + \frac{1}{2i}\lg\frac{\vartheta(v-\bar v+u)\vartheta(v-u)\vartheta(\bar v+u)}{\vartheta(v-\bar v-u)\vartheta(\bar v-u)\vartheta(v+u)}$$

Die weitere Reduction bietet keine Schwierigkeit, wenn man sich der von JACOBI aus der ersten Quaternion des Art. 50 abgeleiteten Formel

*) *Fundamenta*, Art. 55 u. 56.

$$\vartheta\vartheta(y+z)\vartheta(z+x)\vartheta(x+y) = \vartheta x\vartheta y\vartheta z\vartheta(x+y+z) + \vartheta_1 x\vartheta_1 y\vartheta_1 z\vartheta_1(x+y+z)$$

bedient. Setzt man $x = \pm u$, $y = v$, $z = \bar{v}$, so folgt

$$\frac{\vartheta(\bar{v}-u)\,\vartheta(v-u)\,\vartheta(v+\bar{v}+u)}{\vartheta(\bar{v}+u)\,\vartheta(v+u)\,\vartheta(v+\bar{v}-u)} = \frac{1 - \frac{\vartheta_1 v}{\vartheta v}\frac{\vartheta_1 \bar{v}}{\vartheta \bar{v}}\frac{\vartheta_1 u}{\vartheta u}\frac{\vartheta_1(v+\bar{v}-u)}{\vartheta(v+\bar{v}-u)}}{1 + \frac{\vartheta_1 v}{\vartheta v}\frac{\vartheta_1 \bar{v}}{\vartheta \bar{v}}\frac{\vartheta_1 u}{\vartheta u}\frac{\vartheta_1(v+\bar{v}+u)}{\vartheta(v+\bar{v}+u)}}$$

mithin

$$\frac{1}{2}\lg\frac{\vartheta(v+\bar{v}+u)\,\vartheta(v-u)\,\vartheta(\bar{v}-u)}{\vartheta(v+\bar{v}-u)\,\vartheta(v+u)\,\vartheta(\bar{v}+u)} = \frac{1}{2}\lg\frac{1+\varrho\sin\varphi\sin\omega}{1+\varrho\sin\varphi\sin\psi}$$

wo

$$\sin{\psi \atop \omega} = \frac{1}{\sqrt{\varkappa}}\frac{\vartheta_1(u\pm 2v_0)}{\vartheta(u\pm 2v_0)} = \frac{\cos k\,\Delta k\sin\varphi \pm \sin k\cos\varphi\,\Delta\varphi}{1-\varkappa^2\sin^2 k\sin^2\varphi}$$

während

$$\varrho = \varkappa^2\sin\varpi\sin\bar{\varpi} = \operatorname{mod} p$$

also im vorliegenden Falle durch den Modul des Parameters $p = \varkappa^2\sin^2\varpi$ gegeben ist. Differentiirt man nach u und lässt dann u verschwinden, so wird

$$\frac{\vartheta'(v+\bar{v})}{\vartheta(v+\bar{v})} - \frac{\vartheta' v}{\vartheta v} - \frac{\vartheta'\bar{v}}{\vartheta\bar{v}} = -\frac{2K}{\pi}\varrho\sin k$$

Ebenso erhält man durch Umkehr des Vorzeichens von $\bar{v}$

$$\frac{1}{2i}\lg\frac{\vartheta(v-\bar{v}+u)\,\vartheta(v-u)\,\vartheta(\bar{v}+u)}{\vartheta(v-\bar{v}-u)\,\vartheta(v+u)\,\vartheta(\bar{v}-u)} = \frac{1}{2i}\lg\frac{1-\varrho\sin\varphi\sin\omega'}{1-\varrho\sin\varphi\sin\psi'}$$

$$\sin{\psi' \atop \omega'} = \frac{1}{\sqrt{\varkappa}}\frac{\vartheta_1(u\pm 2v_1 i)}{\vartheta(u\pm 2v_1 i)} = \frac{\Delta k'\sin\varphi \pm i\sin k'\cos k'\cos\varphi\,\Delta\varphi}{1-\sin^2 k'\Delta^2\varphi}$$

und durch Differentiation

$$\frac{1}{i}\left(\frac{\vartheta'(v-\bar{v})}{\vartheta(v-\bar{v})} - \frac{\vartheta' v}{\vartheta v} + \frac{\vartheta'\bar{v}}{\vartheta\bar{v}}\right) = \frac{2K}{\pi}\varrho\,\mathrm{tg}\,k'$$

Damit ergeben sich schliesslich die Werthe

$$2P = \varkappa^2\Pi_k w_k + \frac{2Ku}{\pi}\varrho\sin k + \frac{1}{2}\lg\frac{1+\varrho\sin\varphi\sin\omega}{1+\varrho\sin\varphi\sin\psi}$$

$$2Q = \frac{\varkappa^2\Pi_k'}{\cos^4 k'}w_k' - \frac{2Ku}{\pi}\varrho\,\mathrm{tg}\,k' + \operatorname{arc\,tg}\frac{\varrho\sin k'\cos k'\sin\varphi\cos\varphi\,\Delta\varphi}{1-\sin^2 k'\Delta^2\varphi - \varrho\,\Delta k'\sin^2\varphi}$$

welche sich durch Einfachheit empfehlen. Je nachdem v_1 oder v_0 verschwinden, gehen diese Gleichungen über in die Verdoppelungsformeln

$$\frac{4K\varkappa^2}{\pi}\sin\varpi\cos\varpi\Delta\varpi\int_0^u\frac{du}{\frac{1}{\sin^2\varphi}-\varkappa^2\sin^2\varpi}=\frac{2K\varkappa^2}{\pi}\sin k\cos k\Delta k\int_0^u\frac{du}{\frac{1}{\sin^2\varphi}-\varkappa^2\sin^2 k}$$
$$+\frac{2Ku}{\pi}\varkappa^2\sin^2\varpi\sin k+\frac{1}{2}\lg\frac{1+\varkappa^2\sin^2\varpi\sin\varphi\sin\omega}{1+\varkappa^2\sin^2\varpi\sin\varphi\sin\psi}$$

$$\frac{4K\varkappa^2}{\pi}\frac{\sin\varpi'\Delta\varpi'}{\cos^3\varpi'}\int_0^u\frac{du}{\frac{1}{\sin^2\varphi}+\varkappa^2\operatorname{tg}^2\varpi'}=\frac{2K\varkappa^2}{\pi}\frac{\sin k'\Delta k'}{\cos^3 k'}\int_0^u\frac{du}{\frac{1}{\sin^2\varphi}+\varkappa^2\operatorname{tg}^2 k'}$$
$$-\frac{2Ku}{\pi}\varkappa^2\operatorname{tg}^2\varpi'\operatorname{tg}k'+\frac{1}{2i}\lg\frac{1-\varkappa^2\operatorname{tg}^2\varpi'\sin\varphi\sin\omega'}{1-\varkappa^2\operatorname{tg}^2\varpi'\sin\varphi\sin\psi'}$$

wo

$$\varkappa^2\sin^2\varpi=\frac{1-\Delta k}{1+\cos k},\qquad \varkappa^2\operatorname{tg}^2\varpi'=\frac{\Delta k'-\cos k'}{1+\cos k'}$$

$$\frac{1}{2}\lg\frac{1+\varkappa^2\sin^2\varpi\sin\varphi\sin\omega}{1+\varkappa^2\sin^2\varpi\sin\varphi\sin\psi}=\lg\frac{\cos\frac{1}{2}(\omega-\varphi)}{\cos\frac{1}{2}(\psi-\varphi)}$$

$$\frac{1}{2i}\lg\frac{1-\varkappa^2\operatorname{tg}^2\varpi'\sin\varphi\sin\omega'}{1-\varkappa^2\operatorname{tg}^2\varpi'\sin\varphi\sin\psi'}=\operatorname{arc\,tg}\frac{(\Delta k'-\cos k')\sin k'\sin\varphi\cos\varphi\Delta\varphi}{1-\sin^2 k'\Delta^2\varphi+\cos k'\cos^2\varphi+\Delta k'\sin^2\varphi}$$

Bei der Vergleichung mit den entsprechenden Resultaten des Art. 60 hat man die verschiedene Bedeutung der Winkel ψ und ω nicht ausser Acht zu lassen.

62.

Auf analogem Wege kann man auch bei den übrigen Formen der Integrale dritter Gattung, welche im Art. 55 zusammengestellt worden sind, für complexe Parameter die Trennung in den reellen und imaginären Theil ausführen. Es wird nicht nöthig sein, die Resultate sämmtlicher 48 Fälle einzeln anzugeben; wir begnügen uns, die entsprechenden Gleichungen zwischen den Thetafunctionen hinzuschreiben, von denen die weitere Reduction abhängt.

$$\vartheta\vartheta(y+z)\,\vartheta(x+y)\,\vartheta(x+z)=\vartheta(x+y+z)\,\vartheta x\,\vartheta y\,\vartheta z+\vartheta_1(x+y+z)\,\vartheta_1 x\,\vartheta_1 y\,\vartheta_1 z$$
$$=\vartheta_3(x+y+z)\,\vartheta_3 x\,\vartheta_3 y\,\vartheta_3 z-\vartheta_2(x+y+z)\,\vartheta_2 x\,\vartheta_2 y\,\vartheta_2 z$$
$$\vartheta\vartheta(y+z)\,\vartheta_1(x+y)\,\vartheta_1(x+z)=\vartheta(x+y+z)\,\vartheta x\,\vartheta_1 y\,\vartheta_1 z+\vartheta_1(x+y+z)\,\vartheta_1 x\,\vartheta y\,\vartheta z$$
$$=\vartheta_3(x+y+z)\,\vartheta_3 x\,\vartheta_2 y\,\vartheta_2 z-\vartheta_2(x+y+z)\,\vartheta_2 x\,\vartheta_3 y\,\vartheta_3 z$$
$$\vartheta\vartheta(y+z)\,\vartheta_2(x+y)\,\vartheta_2(x+z)=\vartheta_2(x+y+z)\,\vartheta_2 x\,\vartheta y\,\vartheta z+\vartheta_3(x+y+z)\,\vartheta_3 x\,\vartheta_1 y\,\vartheta_1 z$$
$$=\vartheta(x+y+z)\,\vartheta x\,\vartheta_2 y\,\vartheta_2 z-\vartheta_1(x+y+z)\,\vartheta_1 x\,\vartheta_3 y\,\vartheta_3 z$$
$$\vartheta\vartheta(y+z)\,\vartheta_3(x+y)\,\vartheta_3(x+z)=\vartheta_2(x+y+z)\,\vartheta_2 x\,\vartheta_1 y\,\vartheta_1 z+\vartheta_3(x+y+z)\,\vartheta_3 x\,\vartheta y\,\vartheta z$$
$$=\vartheta(x+y+z)\,\vartheta x\,\vartheta_3 y\,\vartheta_3 z-\vartheta_1(x+y+z)\,\vartheta_1 x\,\vartheta_2 y\,\vartheta_2 z$$

$$\begin{aligned}
\vartheta_2\vartheta_2(y+z)\,\vartheta(x+y)\,\vartheta(x+z) &= \vartheta(x+y+z)\,\vartheta x\,\vartheta_2 y\,\vartheta_2 z - \vartheta_3(x+y+z)\,\vartheta_3 x\,\vartheta_1 y\,\vartheta_1 z\\
&= \vartheta_1(x+y+z)\,\vartheta_1 x\,\vartheta_3 y\,\vartheta_3 z + \vartheta_2(x+y+z)\,\vartheta_2 x\,\vartheta y\,\vartheta z\\
\vartheta_2\vartheta_2(y+z)\,\vartheta_1(x+y)\,\vartheta_1(x+z) &= \vartheta_1(x+y+z)\,\vartheta_1 x\,\vartheta_2 y\,\vartheta_2 z + \vartheta_2(x+y+z)\,\vartheta_2 x\,\vartheta_1 y\,\vartheta_1 z\\
&= \vartheta(x+y+z)\,\vartheta x\,\vartheta_3 y\,\vartheta_3 z - \vartheta_3(x+y+z)\,\vartheta_3 x\,\vartheta y\,\vartheta z\\
\vartheta_2\vartheta_2(y+z)\,\vartheta_2(x+y)\,\vartheta_2(x+z) &= \vartheta_1(x+y+z)\,\vartheta_1 x\,\vartheta_1 y\,\vartheta_1 z + \vartheta_2(x+y+z)\,\vartheta_2 x\,\vartheta_2 y\,\vartheta_2 z\\
&= \vartheta_3(x+y+z)\,\vartheta_3 x\,\vartheta_3 y\,\vartheta_3 z - \vartheta(x+y+z)\,\vartheta x\,\vartheta y\,\vartheta z\\
\vartheta_2\vartheta_2(y+z)\,\vartheta_3(x+y)\,\vartheta_3(x+z) &= \vartheta_3(x+y+z)\,\vartheta_3 x\,\vartheta_2 y\,\vartheta_2 z - \vartheta(x+y+z)\,\vartheta x\,\vartheta_1 y\,\vartheta_1 z\\
&= \vartheta_1(x+y+z)\,\vartheta_1 x\,\vartheta y\,\vartheta z + \vartheta_2(x+y+z)\,\vartheta_2 x\,\vartheta_3 y\,\vartheta_3 z\\
\vartheta_3\vartheta_3(y+z)\,\vartheta(x+y)\,\vartheta(x+z) &= \vartheta(x+y+z)\,\vartheta x\,\vartheta_3 y\,\vartheta_3 z - \vartheta_2(x+y+z)\,\vartheta_2 x\,\vartheta_1 y\,\vartheta_1 z\\
&= \vartheta_1(x+y+z)\,\vartheta_1 x\,\vartheta_2 y\,\vartheta_2 z + \vartheta_3(x+y+z)\,\vartheta_3 x\,\vartheta y\,\vartheta z\\
\vartheta_3\vartheta_3(y+z)\,\vartheta_1(x+y)\,\vartheta_1(x+z) &= \vartheta_1(x+y+z)\,\vartheta_1 x\,\vartheta_3 y\,\vartheta_3 z + \vartheta_3(x+y+z)\,\vartheta_3 x\,\vartheta_1 y\,\vartheta_1 z\\
&= \vartheta(x+y+z)\,\vartheta x\,\vartheta_2 y\,\vartheta_2 z - \vartheta_2(x+y+z)\,\vartheta_2 x\,\vartheta y\,\vartheta z\\
\vartheta_3\vartheta_3(y+z)\,\vartheta_2(x+y)\,\vartheta_2(x+z) &= \vartheta(x+y+z)\,\vartheta x\,\vartheta_1 y\,\vartheta_1 z + \vartheta_2(x+y+z)\,\vartheta_2 x\,\vartheta_3 y\,\vartheta_3 z\\
&= \vartheta_3(x+y+z)\,\vartheta_3 x\,\vartheta_2 y\,\vartheta_2 z - \vartheta_1(x+y+z)\,\vartheta_1 x\,\vartheta y\,\vartheta z\\
\vartheta_3\vartheta_3(y+z)\,\vartheta_3(x+y)\,\vartheta_3(x+z) &= \vartheta_3(x+y+z)\,\vartheta_3 x\,\vartheta_3 y\,\vartheta_3 z - \vartheta_1(x+y+z)\,\vartheta_1 x\,\vartheta_1 y\,\vartheta_1 z\\
&= \vartheta(x+y+z)\,\vartheta x\,\vartheta y\,\vartheta z + \vartheta_2(x+y+z)\,\vartheta_2 x\,\vartheta_2 y\,\vartheta_2 z
\end{aligned}$$

Bezeichnet man durch λ, μ, ν die Moduln resp. von $\sin\varpi$, $\frac{\sin\varpi}{\Delta\varpi}$ und $\mathrm{tg}\,\varpi$, so gehen die Werthe hervor

$$\frac{\vartheta(v-u)\,\vartheta(\bar v-u)\,\vartheta(2v_0+u)}{\vartheta(v+u)\,\vartheta(\bar v+u)\,\vartheta(2v_0-u)} = \frac{1+\varkappa^2\lambda^2\sin\varphi\sin\omega}{1+\varkappa^2\lambda^2\sin\varphi\sin\psi}$$

$$= \frac{1-\varkappa^2\mu^2\cos\varphi\cos\omega}{1-\varkappa^2\mu^2\cos\varphi\cos\psi} = \frac{1-\nu^2\Delta\varphi\Delta\omega}{1-\nu^2\Delta\varphi\Delta\psi}$$

$$\frac{\vartheta_1(v-u)\,\vartheta_1(\bar v-u)\,\vartheta_1(2v_0+u)}{\vartheta_1(v+u)\,\vartheta_1(\bar v+u)\,\vartheta_1(2v_0-u)} = \frac{1+\dfrac{\lambda^2}{\sin\varphi\sin\omega}}{1+\dfrac{\lambda^2}{\sin\varphi\sin\psi}}$$

$$= \frac{1+\mu^2\dfrac{\Delta\varphi\Delta\omega}{\sin\varphi\sin\omega}}{1+\mu^2\dfrac{\Delta\varphi\Delta\psi}{\sin\varphi\sin\psi}} = \frac{1+\nu^2\cot\varphi\cot\omega}{1+\nu^2\cot\varphi\cot\psi}$$

$$\frac{\vartheta_2(v-u)\,\vartheta_2(\bar v-u)\,\vartheta_2(2v_0+u)}{\vartheta_2(v+u)\,\vartheta_2(\bar v+u)\,\vartheta_2(2v_0-u)} = \frac{1+\lambda^2\dfrac{\Delta\varphi\Delta\omega}{\cos\varphi\cos\omega}}{1+\lambda^2\dfrac{\Delta\varphi\Delta\psi}{\cos\varphi\cos\psi}}$$

$$= \frac{1+\varkappa'^2\mu^2\sec\varphi\sec\omega}{1+\varkappa'^2\mu^2\sec\varphi\sec\psi} = \frac{1+\varkappa'^2\nu^2\,\mathrm{tg}\,\varphi\,\mathrm{tg}\,\omega}{1+\varkappa'^2\nu^2\,\mathrm{tg}\,\varphi\,\mathrm{tg}\,\psi}$$

$$\frac{\vartheta_3(v-u)\,\vartheta_3(\bar v-u)\,\vartheta_3(2v_0+u)}{\vartheta_3(v+u)\,\vartheta_3(\bar v+u)\,\vartheta_3(2v_0-u)} = \frac{1+\varkappa^2\lambda^2\dfrac{\cos\varphi\cos\omega}{\Delta\varphi\Delta\omega}}{1+\varkappa^2\lambda^2\dfrac{\cos\varphi\cos\psi}{\Delta\varphi\Delta\psi}}$$

$$= \frac{1-\varkappa^2\varkappa'^2\mu^2\dfrac{\sin\varphi\sin\omega}{\Delta\varphi\Delta\omega}}{1-\varkappa^2\varkappa'^2\mu^2\dfrac{\sin\varphi\sin\psi}{\Delta\varphi\Delta\psi}} = \frac{1-\dfrac{\varkappa'^2\nu^2}{\Delta\varphi\Delta\omega}}{1-\dfrac{\varkappa'^2\nu^2}{\Delta\varphi\Delta\psi}}$$

und durch Differentiation

$$\frac{\vartheta'(2v_0)}{\vartheta(2v_0)}-\frac{\vartheta'v}{\vartheta v}-\frac{\vartheta'\bar v}{\vartheta\bar v}=-\frac{2K}{\pi}\varkappa^2\sin\varpi\sin\bar\varpi\sin k=-\frac{2K}{\pi}\varkappa^2\lambda^2\sin k$$

$$\frac{\vartheta_1'(2v_0)}{\vartheta_1(2v_0)}-\frac{\vartheta_1'v}{\vartheta_1 v}-\frac{\vartheta_1'\bar v}{\vartheta_1\bar v}=-\frac{2K}{\pi}\frac{1-\cos\varpi\cos\bar\varpi\cos k}{\sin\varpi\sin\bar\varpi\sin k}=-\frac{2K}{\pi}\frac{1-\Delta\varpi\Delta\bar\varpi\Delta k}{\varkappa^2\sin\varpi\sin\bar\varpi\sin k}$$

$$=-\frac{2K}{\pi}\frac{\Delta\varpi\Delta\bar\varpi\Delta k-\cos\varpi\cos\bar\varpi\cos k}{\varkappa'^2\sin\varpi\sin\bar\varpi\sin k}=-\frac{2K}{\pi}\left(\frac{\sin k}{\lambda^2}-\frac{\Delta k}{\operatorname{tg}k}\right)$$

$$=-\frac{2K}{\pi\Delta k}\left(\frac{\sin k}{\mu^2}-\frac{1}{\operatorname{tg}k}\right)=-\frac{2K}{\pi\cos k}\left(\frac{\sin k}{\nu^2}-\frac{\Delta k}{\sin k}\right)$$

$$\frac{\vartheta_2'(2v_0)}{\vartheta_2(2v_0)}-\frac{\vartheta_2'v}{\vartheta_2 v}-\frac{\vartheta_2'\bar v}{\vartheta_2\bar v}=-\frac{2K}{\pi}\varkappa'^2\operatorname{tg}\varpi\operatorname{tg}\bar\varpi\operatorname{tg}k=-\frac{2K}{\pi}\varkappa'^2\nu^2\operatorname{tg}k$$

$$\frac{\vartheta_3'(2v_0)}{\vartheta_3(2v_0)}-\frac{\vartheta_3'v}{\vartheta_3 v}-\frac{\vartheta_3'\bar v}{\vartheta_3\bar v}=\frac{2K}{\pi}\varkappa^2\varkappa'^2\frac{\sin\varpi\sin\bar\varpi\sin k}{\Delta\varpi\Delta\bar\varpi\Delta k}=\frac{2K}{\pi}\varkappa^2\varkappa'^2\mu^2\frac{\sin k}{\Delta k}$$

nebst

$$\frac{1}{i}\left(\frac{\vartheta'(2v_1 i)}{\vartheta(2v_1 i)}-\frac{\vartheta'v}{\vartheta v}+\frac{\vartheta'\bar v}{\vartheta\bar v}\right)=\frac{2K}{\pi}\varkappa^2\lambda^2\operatorname{tg}k'$$

$$\frac{1}{i}\left(\frac{\vartheta_1'(2v_1 i)}{\vartheta_1(2v_1 i)}-\frac{\vartheta_1'v}{\vartheta_1 v}+\frac{\vartheta_1'\bar v}{\vartheta_1\bar v}\right)=\frac{2K}{\pi\cos k'}\left(\frac{\sin k'}{\lambda^2}-\frac{\Delta k'}{\sin k'}\right)$$

$$=\frac{2K}{\pi\Delta k'}\left(\frac{\sin k'}{\mu^2}-\frac{1}{\operatorname{tg}k'}\right)=\frac{2K}{\pi}\left(\frac{\sin k'}{\nu^2}-\frac{\Delta k'}{\operatorname{tg}k'}\right)$$

$$\frac{1}{i}\left(\frac{\vartheta_2'(2v_1 i)}{\vartheta_2(2v_1 i)}-\frac{\vartheta_2'v}{\vartheta_2 v}+\frac{\vartheta_2'\bar v}{\vartheta_2\bar v}\right)=\frac{2K}{\pi}\varkappa'^2\nu^2\sin k'$$

$$\frac{1}{i}\left(\frac{\vartheta_3'(2v_1 i)}{\vartheta_3(2v_1 i)}-\frac{\vartheta_3'v}{\vartheta_3 v}+\frac{\vartheta_3'\bar v}{\vartheta_3\bar v}\right)=-\frac{2K}{\pi}\varkappa^2\varkappa'^2\mu^2\frac{\sin k'}{\Delta k'}$$

während in den vorhergehenden Ausdrücken, durch den Wechsel des Vorzeichens von $\bar v$, λ^2 μ^2 und ν^2 ihr Vorzeichen umkehren und ψ ω in ψ' ω' übergehen.

Berichtigungen und Nachträge.

S. 68, Z. 5 bemerke man die Gleichung

$$X_1 = \frac{\xi\,[L_0 x x_0 + M_0(x + x_0) + N_0] + \xi_0\,[L x x_0 + M(x + x_0) + N]}{(x - x_0)^3}$$

S. 81, Z. 10 lies $\xi + bx^2 + 2b_1 x + c_1$ statt $2b_1 + c_1$.

S. 86, Z. 11 lies $+\mathfrak{f}_0'\xi_0$ statt $-\mathfrak{f}_0'\xi_0$, so dass

$$\varepsilon_1 = \frac{\eta_0\,[L_0 x_0 y_0 + M_0(x_0 + y_0) + N_0] - \xi_0\,[\mathfrak{L}_0 x_0 y_0 + \mathfrak{M}_0(x_0 + y_0) + \mathfrak{N}_0]}{2\,(x_0 - y_0)^3}$$

S. 88, Z. 11 lies $\int_0^{\varphi} + \int_0^{\chi}$ statt $\int_0^{\varphi} + \int_0^{\psi}$

S. 89, Z. 13 sind die Worte ausgefallen:
Der Winkel $\pi - \psi$ wird durch ein auf die Seite w gefälltes Perpendikel in die beiden Theile $\frac{\pi}{2} - \varphi'$ und $\frac{\pi}{2} - \chi'$ zerlegt, wo

$$\operatorname{tg}\varphi' = \operatorname{tg}\varphi\,\Delta\chi \qquad \text{und} \qquad \operatorname{tg}\chi' = \operatorname{tg}\chi\,\Delta\varphi$$

Die Gleichung $\psi = \varphi' + \chi'$ oder $\operatorname{tg}\psi = \frac{\operatorname{tg}\varphi\,\Delta\chi + \operatorname{tg}\chi\,\Delta\varphi}{1 - \operatorname{tg}\varphi\operatorname{tg}\chi\,\Delta\varphi\,\Delta\chi}$ ist bekanntlich für die numerische Rechnung besonders geeignet.

S. 93, Z. 12 v. u. ist hinzuzufügen, dass für $G^3 > 27H^2$ die Wurzeln λ_1 und λ_2 das entgegengesetzte Vorzeichen von λ und H besitzen müssen, weil

$$\lambda + \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \qquad \text{und} \qquad \lambda\lambda_1\lambda_2 = \frac{1}{4}H.$$

S. 96, Z. 20 lies $(\sigma^2 - \sigma)^2$.

S. 104, Z. 7 lies $-2\frac{\sqrt{\mathfrak{D}y}}{y}$ statt $-2\frac{\sqrt{\mathfrak{D}}y}{y}$.

S. 117, siehe den Nachtrag zu Art. 16.

S. 122, Z. 11 lies $\vartheta_1'(iq^{\frac{1}{2}})$ statt $\vartheta_1(iq^{\frac{1}{2}})$.

S. 125, Anmerkung, lies $\operatorname{tg}\frac{1}{2}\omega' = i\operatorname{tg}\frac{1}{2}\varphi'$.

S. 132, Anmerkung, ist zu erwähnen, dass die Gleichung

$$\frac{\chi_3(q)}{\chi_2(q)} = \frac{\chi_1(-\sqrt{q})}{\chi_1(q^2)} = \frac{1 + q - q^2 - q^5 - q^7 \ldots}{1 - q^4 - q^8 \ldots} = \sqrt[8]{\frac{16q}{\varkappa\varkappa}}$$

auf bequeme Reihen- resp. Kettenbruchsentwickelungen führt. Zunächst erhält man

$$\sqrt[8]{q} = \sqrt[4]{\frac{\varkappa}{4}}\,(1 + q - q^2 + q^4 - q^6 \ldots)$$

und durch Potenzirung

$$q = \frac{\varkappa^2}{16}(1 + 8q + 20q^2 - 62q^4 + 216q^6 \ldots)$$

oder für $\lambda = \frac{1 - \varkappa'\varkappa'}{1 + \varkappa'\varkappa'} = \frac{2\varkappa_1}{1 + \varkappa_1^2}$

$$q = \frac{\lambda}{8}(1 + 20q^2 - 62q^4 + 216q^6 \ldots)$$

woraus wiederum

$$q^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{\frac{\lambda}{8}}(1 + 5q^2 - 53q^4 + 724q^6 \ldots)$$

oder

$$1 + 5q - 53q^2 + 724q^3 \ldots = \sqrt[8]{16q\left(\varkappa + \frac{1}{\varkappa}\right)^2}$$

hervorgeht. Die Umkehr dieser Reihen ergibt

$$\sqrt[8]{q} = \sqrt[4]{\frac{\varkappa}{4}}\left\{1 + \left(\frac{\varkappa}{4}\right)^2 + 7\left(\frac{\varkappa}{4}\right)^4 + 68\left(\frac{\varkappa}{4}\right)^6 + 761\left(\frac{\varkappa}{4}\right)^8 + \right.$$
$$\left. + 9218\left(\frac{\varkappa}{4}\right)^{10} + 117451\left(\frac{\varkappa}{4}\right)^{12} \ldots\right\}$$

$$\sqrt[4]{q} = \sqrt[4]{\frac{\lambda}{8}}\left\{1 + 5\left(\frac{\lambda}{8}\right)^2 + 147\left(\frac{\lambda}{8}\right)^4 + 5864\left(\frac{\lambda}{8}\right)^6 \ldots\right\}$$

oder in Kettenbruchsform

$$\sqrt[8]{q} = \sqrt[4]{\frac{\varkappa}{4}} \cdot \frac{1}{1} - \frac{1}{16}\frac{\varkappa^2}{1} - \frac{3}{8}\frac{\varkappa^2}{1} - \frac{19}{96}\frac{\varkappa^2}{1} - \frac{29}{96}\frac{\varkappa^2}{1} - \frac{33}{152}\frac{\varkappa^2}{1} - \frac{27453}{96976}\frac{\varkappa^2}{1} \ldots$$

$$\sqrt[4]{q} = \sqrt[4]{\frac{\lambda}{8}} \cdot \frac{1}{1} - \frac{5}{64}\frac{\lambda^2}{1} - \frac{61}{160}\frac{\lambda^2}{1} - \frac{7711}{39040}\frac{\lambda^2}{1} \ldots$$

Um die Convergenz dieser Entwickelungen zu steigern, braucht man nur q in q^2 oder q^4, folglich $\varkappa$ und λ in $\varkappa_1\ \lambda_1$ resp. $\varkappa_2\ \lambda_2$ übergehen zu lassen, wobei

$$\varkappa_1 = \mathrm{tg}^2 \tfrac{1}{2}\varepsilon \text{ und für } \varkappa' = \cos^2\zeta,\quad \varkappa_2 = \frac{1 - \varkappa_1'}{1 + \varkappa_1'} = \left(\frac{1 - \sqrt{\varkappa'}}{1 + \sqrt{\varkappa'}}\right)^2 = \mathrm{tg}^8 \tfrac{1}{2}\zeta,$$

ferner für $\varkappa_2 = \mathrm{tg}\frac{1}{2}\gamma$, $\lambda_1 = \frac{2\varkappa_2}{1 + \varkappa_2^2} = \sin\gamma$ und für $\varkappa_2 = \sqrt{2}\sin\delta$, $\lambda_2 = \mathrm{tg}^2\delta$ werden.

S. 135, Z. 8 v. u. lies $J(\varphi\varkappa')$ statt $\Delta(\varphi'\varkappa')$.

S. 140, Z. 9 u. 10 lies $\sin\varepsilon'$, $\sin\varepsilon_1'$, $\sin\varepsilon_2'$ statt $\sin 2\varepsilon'$, $\sin 2\varepsilon_1'$ und $\sin 2\varepsilon_2'$.

S. 148, Z. 7 v. u. setze man hinzu: Zugleich geben die aufgestellten Ausdrücke zu erkennen, dass die höheren Differentialquotienten der Thetafunctionen sich auf diese Functionen und ihre ersten Differentialquotienten zurückführen lassen.

S. 148, Z. 2 v. u. lies $u\frac{\vartheta_2''}{\vartheta_2}$ statt $u\frac{\vartheta''}{\vartheta_2}$.

SECHSTER BAND. Mit 10 Tafeln. hoch 4. 1864. Preis 19 ℳ 20 ₰.

W. G. HANKEL, Elektrische Untersuchungen. Fünfte Abhandlung. 1861. 1 ℳ 60 ₰.

——— Messungen über die Absorption der chemischen Strahlen des Sonnenlichtes. 1862. 1 ℳ 20 ₰.

P. A. HANSEN, Darlegung der theoretischen Berechnung der in den Mondtafeln angewandten Störungen. Erste Abhandlung. 1862. 9 ℳ.

G. METTENIUS, Ueber den Bau von Angiopteris. Mit 10 Tafeln. 1863. 4 ℳ 40 ₰.

W. WEBER, Elektrodynamische Maassbestimmungen, insbesondere über elektrische Schwingungen. 1864. 3 ℳ.

SIEBENTER BAND. Mit 5 Tafeln. hoch 4. 1865. 17 ℳ.

P. A. HANSEN, Darlegung der theoretischen Berechnung der in den Mondtafeln angewandten Störungen. Zweite Abhandlung. 1864. 9 ℳ.

G. METTENIUS, Ueber die Hymenophyllaceae. Mit 5 Tafeln. 1864. 3 ℳ 60 ₰.

P. A. HANSEN, Relationen einestheils zwischen Summen und Differenzen und anderntheils zwischen Integralen und Differentialen. 1865. 2 ℳ.

W. G. HANKEL, Elektrische Untersuchungen. Sechste Abhandlung. 1865. 2 ℳ 80 ₰.

ACHTER BAND. Mit 3 Tafeln. hoch 4. 1868. Preis 24 ℳ.

P. A. HANSEN, Geodätische Untersuchungen. 1865. 5 ℳ 60 ₰.

——— Bestimmung des Längenunterschiedes zwischen den Sternwarten zu Gotha und Leipzig, unter seiner Mitwirkung ausgeführt von Dr. Auwers und Prof. Bruhns im April des Jahres 1865. Mit 1 Figurentafel. 1866. 2 ℳ 80 ₰.

W. G. HANKEL, Elektrische Untersuchungen. Siebente Abhandlung. 1866. 2 ℳ 40 ₰.

P. A. HANSEN, Tafeln der Egeria mit Zugrundelegung der in den Abhandlungen der Königl. Sächs. Gesellschaft der Wissenschaften in Leipzig veröffentlichten Störungen dieses Planeten berechnet und mit einleitenden Aufsätzen versehen. 1867. 6 ℳ 80 ₰.

——— Von der Methode der kleinsten Quadrate im Allgemeinen und in ihrer Anwendung auf die Geodäsie. 1867. 6 ℳ.

NEUNTER BAND. Mit 6 Tafeln. hoch 4. 1871. Preis 18 ℳ.

P. A. HANSEN, Fortgesetzte geodätische Untersuchungen, bestehend in zehn Supplementen zur Abhandlung von der Methode der kleinsten Quadrate im Allgemeinen und in ihrer Anwendung auf die Geodäsie. 1868. 5 ℳ 40 ₰.

——— Entwickelung eines neuen veränderten Verfahrens zur Ausgleichung eines Dreiecksnetzes mit besonderer Betrachtung des Falles, in welchem gewisse Winkel voraus bestimmte Werthe bekommen sollen. 1869. 3 ℳ.

——— Supplement zu der geodätische Untersuchungen benannten Abhandlung, die Reduction der Winkel eines sphäroidischen Dreiecks betr. 1869. 2 ℳ.

W. G. HANKEL, Elektrische Untersuchungen. Achte Abhandlung. 1870. 2 ℳ 40 ₰.

P. A. HANSEN, Bestimmung der Sonnenparallaxe durch Venusvorübergänge vor der Sonnenscheibe mit besonderer Berücksichtigung des im Jahre 1874 eintreffenden Vorüberganges. Mit zwei Planigloben. 1870. 3 ℳ.

G. T. FECHNER, Zur experimentalen Aesthetik. Erster Theil. 1871. 2 ℳ.

ZEHNTER BAND. Mit 7 Tafeln. hoch 4. 1874. Preis 21 ℳ.

W. WEBER, Elektrodynamische Maassbestimmungen, insbesondere über das Princip der Erhaltung der Energie. 1871. 1 ℳ 60 ₰.

P. A. HANSEN, Untersuchung des Weges eines Lichtstrahls durch eine beliebige Anzahl von brechenden sphärischen Oberflächen. 1871. 3 ℳ 60 ₰.

C. BRUHNS, Bestimmung der Längendifferenz zwischen Leipzig und Wien. 1872. 2 ℳ.

W. G. HANKEL, Elektrische Untersuchungen. Neunte Abhandlung. 1872. Mit 4 Tafeln. 2 ℳ.

——— Elektrische Untersuchungen. Zehnte Abhandlung. 1872. Mit 3 Tafeln. 2 ℳ.

C. NEUMANN, Ueber die den Kräften elektrodynamischen Ursprungs zuzuschreibenden Elementargesetze. 1873. 3 ℳ 80 ₰.

P. A. HANSEN, Von der Bestimmung der Theilungsfehler eines gradlinigen Maassstabes. 1874. 4 ℳ.

——— Ueber die Darstellung der graden Aufsteigung und Abweichung des Mondes in Function der Länge in der Bahn und der Knotenlänge. 1874. 1 ℳ.

——— Dioptrische Untersuchungen mit Berücksichtigung der Farbenzerstreuung und der Abweichung wegen Kugelgestalt. Zweite Abhandlung. 1874. 2 ℳ.

ELFTER BAND. Mit 8 Tafeln. hoch 4. 1878. Preis 21 ℳ.

G. T. FECHNER, Ueber den Ausgangswerth der kleinsten Abweichungssumme, dessen Bestimmung, Verwendung und Verallgemeinerung. 1874. 2 ℳ.

C. NEUMANN, Ueber das von Weber für die elektrischen Kräfte aufgestellte Gesetz. 1874. 3 ℳ.

W. G. HANKEL, Elektrische Untersuchungen. Elfte Abhandlung. Mit 3 Tafeln. 1875. 2 ℳ.

P. A. HANSEN, Ueber die Störungen der grossen Planeten, insbesondere des Jupiter. 1875. 6 ℳ.

W. G. HANKEL, Elektrische Untersuchungen. Zwölfte Abhandlung. Mit 4 Tafeln. 1875. 2 ℳ.

W. SCHEIBNER, Dioptrische Untersuchungen, insbes. über das Hansen'sche Objectiv. 1876 3 ℳ.

C. NEUMANN, Das Webersche Gesetz bei Zugrundelegung der unitarischen Anschauungsweise. 1876. 1 ℳ.

W. WEBER, Elektrodynamische Maassbestimmungen, insbesondere über die Energie der Wechselwirkung. Mit 1 Tafel. 1878. 2 ℳ.

ZWÖLFTER BAND. hoch 4.

W. G. HANKEL, Elektrische Untersuchungen. Dreizehnte Abhandlung. Mit 3 Tafeln. 1878. 2 ℳ.

W. SCHEIBNER, Zur Reduction elliptischer Integrale in reeller Form. 1879. 5 ℳ.

Leipzig, April 1879. S. Hirzel.

SITZUNGSBERICHTE
DER
KÖNIGL. SÄCHSISCHEN GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN.
KLEINERE ABHANDLUNGEN.

BERICHTE über die Verhandlungen der Königlich Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig. Erster Band. Aus den Jahren 1846 und 1847. Mit Kupfern. gr. 8. 12 Hefte.

—— Zweiter Band. Aus dem Jahre 1848. Mit Kupfern. gr. 8. 6 Hefte.

Vom Jahre 1849 an sind die Berichte der beiden Classen getrennt erschienen.

—— Mathematisch-physische Classe. 1849 (3) 1850 (3) 1851 (2) 1852 (2) 1853 (3) 1854 (3) 1855 (2) 1856 (2) 1857 (3) 1858 (3) 1859 (4) 1860 (3) 1861 (2) 1862 (1) 1863 (2) 1864 (1) 1865 (1) 1866 (5) 1867 (4) 1868 (3) 1869 (4) 1870 (5) 1871 (7) 1872 (4 mit Beiheft) 1873 (7) 1874 (5) 1875 (4) 1876 (2) 1877 (2) 1878 (1).

—— Philologisch-historische Classe. 1849 (5) 1850 (4) 1851 (5) 1852 (4) 1853 (5) 1854 (6) 1855 (4) 1856 (4) 1857 (2) 1858 (2) 1859 (4) 1860 (4) 1861 (4) 1862 (1) 1863 (3) 1864 (3) 1865 (1) 1866 (4) 1867 (2) 1868 (3) 1869 (3) 1870 (3) 1871 (1) 1872 (1) 1873 (1) 1874 (2) 1875 (2) 1876 (1) 1877 (2) 1878 ( ).

Jedes Heft der Berichte ist einzeln zu dem Preise von 1 Mark zu haben.

SCHRIFTEN
DER FÜRSTLICH-JABLONOWSKI'SCHEN GESELLSCHAFT ZU LEIPZIG.

ABHANDLUNGEN bei Begründung der Königl. Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften am Tage der zweihundertjährigen Geburtsfeier Leibnizens herausgegeben von der Fürstl. Jablonowski'schen Gesellschaft. Mit dem Bildnisse von Leibniz in Medaillon und zahlreichen Holzschnitten und Kupfertafeln. 61 Bogen in hoch 4°. 1846. broch. Preis 15 ℳ.

PREISSCHRIFTEN gekrönt und herausgegeben von der Fürstlich Jablonowski'schen Gesellschaft.

1. H. GRASSMANN, Geometrische Analyse geknüpft an die von Leibniz erfundene geometrische Charakteristik. Mit einer erläuternden Abhandlung von *A. F. Möbius*. (Nr. I der mathematisch-physischen Section.) hoch 4°. 1847. 2 ℳ.
2. H. B. GEINITZ, Das Quadergebirge oder d. Kreideformation in Sachsen, mit Berücks. der glaukonitreichen Schichten. Mit 1 color. Tafel. (Nr. II d. math.-phys. Sect.) hoch 4°. 1850. 1 ℳ 60 ₰.
3. J. ZECH, Astronomische Untersuchungen über die Mondfinsternisse des Almagest. (Nr. III d. math.-phys. Sect.) hoch 4°. 1851. 1 ℳ.
4. J. ZECH, Astron. Untersuchungen üb. die wichtigeren Finsternisse, welche v. d. Schriftstellern des class. Alterthums erwähnt werden. (No. IV d. math.-phys. Sect.) hoch 4°. 1853. 2 ℳ.
5. H. B. GEINITZ, Darstellung der Flora des Hainichen-Ebersdorfer und des Flöhaer Kohlenbassins. (Nr. V d. math.-phys. Sect.) hoch 4°. Mit 14 Kupfertafeln in gr. Folio. 1854. 24 ℳ.
6. TH. HIRSCH, Danzigs Handels- und Gewerbsgeschichte unter der Herrschaft des deutschen Ordens. (Nr. I der historisch-nationalökonomischen Section.) hoch 4°. 1858. 8 ℳ.
7. H. WISKEMANN, Die antike Landwirthschaft und das von Thünensche Gesetz, aus den alten Schriftstellern dargelegt. (Nr. II d. hist.-nat. ök. Sect.) 1859. 2 ℳ 40 ₰.
8. K. WERNER, Urkundliche Geschichte der Iglauer Tuchmacher-Zunft. (Nr. III d. hist.-nat. ök. Sect.) 1861. 3 ℳ.
9. V. BÖHMERT, Beiträge zur Gesch. d. Zunftwesens. (Nr. IV d. hist.-nat. ök. Sect.) 1862. 4 ℳ.
10. H. WISKEMANN, Darstellung der in Deutschland zur Zeit der Reformation herrschenden nationalökonomischen Ansichten. (Nr. V d. hist.-nat. ök. Sect.) 1862. 4 ℳ.
11. E. L. ETIENNE LASPEYRES, Geschichte der volkswirthschaftl. Anschauungen der Niederländer und ihrer Litteratur zur Zeit der Republik. (Nr. VI d. hist.-nat. ök. Sect.) 1863. 8 ℳ.
12. J. FIKENSCHER, Untersuchung der metamorphischen Gesteine der Lunzenauer Schieferhalbinsel. (Nr. VI d. math.-phys. Sect.) 1867. 2 ℳ.
13. JOH. FALKE, Die Geschichte des Kurfürsten August von Sachsen in volkswirthschaftlicher Beziehung. (Nr. VII d. hist.-nat. ök. Sect.) 1868. 8 ℳ.
14. B. BÜCHSENSCHÜTZ, Die Hauptstätten des Gewerbfleisses im classischen Alterthume. (Nr. VIII d. hist.-nat. ök. Sect.) 1869. 2 ℳ 80 ₰.
15. DR. HUGO BLÜMNER, Die gewerbliche Thätigkeit der Völker des classischen Alterthums. (Nr. IX d. hist.-nat. ök. Sect.) 1869. 4 ℳ.
16. HERMANN ENGELHARDT, Flora der Braunkohlenformation im Königreich Sachsen. (Nr. VII d. math.-phys. Sect.) Mit 15 Tafeln. 1870. 12 ℳ.
17. H. ZEISSBERG, Die polnische Geschichtschreibung des Mittelalters. (Nr. X d. hist.-nat. ök. Sect.) 1873. 12 ℳ.
18. ALBERT WANGERIN, Reduction der Potentialgleichung für gewisse Rotationskörper auf eine gewöhnliche Differentialgleichung. (Nr. VIII d. math.-phys. Sect.) 1875. 1 ℳ 20 ₰.
19. A. LESKIEN, Die Declination im Slavisch-Litauischen und Germanischen. (Nr. XI d. hist.-nat. ök. Sect.) 1876. 5 ℳ.
20. DR. R. HASSENCAMP, Ueber den Zusammenhang des lettoslavischen und germanischen Sprachstammes. (Nr. XII d. hist.-nat. ök. Sect.) 1876. 3 ℳ.
21. DR. PÖHLMANN, Die Wirthschaftspolitik der Florentiner Renaissance und das Princip der Verkehrsfreiheit. (Nr. XIII d. hist.-nat. ök. Sect.) 1878. 4 ℳ 20 ₰.

Leipzig. S. Hirzel.

Druck von Breitkopf und Härtel in Leipzig.

W. SCHEIBNER,
MITGLIED DER KÖNIGL. SÄCHS. GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN

SUPPLEMENT ZUR ABHANDLUNG

ÜBER DIE

REDUCTION ELLIPTISCHER INTEGRALE

IN REELLER FORM.

Zum XII. Bande der Abhandlungen der mathematisch-physischen Classe der Königl. Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften.

N⁰ IIa.

LEIPZIG
BEI S. HIRZEL.
1880.

ABHANDLUNGEN

DER

KÖNIGL. SÄCHS. GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN

ZU LEIPZIG.

MATHEMATISCH-PHYSISCHE CLASSE.

ERSTER BAND. (I. Bd.)*) Mit 3 Tafeln. hoch 4. 1852. brosch. Preis 13 ℳ 60 Ng.

A. F. MÖBIUS, Ueber die Grundformen der Linien der dritten Ordnung. Mit 1 Tafel. 1849. 2 ℳ 40 Ng.

P. A. HANSEN, Auflösung eines beliebigen Systems von linearischen Gleichungen. — Ueber die Entwickelung der Grösse $(1-2\alpha H+\alpha\alpha)^{-\frac{1}{2}}$ nach den Potenzen von α. 1849. 1 ℳ 20 Ng.

A. SEEBECK, Ueber die Querschwingungen elastischer Stäbe. 1849. 1 ℳ.

C. F. NAUMANN, Ueber die cyclocentrische Conchospirale und über das Windungsgesetz von Planorbis Corneus. 1849. 1 ℳ.

W. WEBER, Elektrodynamische Maassbestimmungen (Widerstandsmessungen). 1851. 3 ℳ.

F. REICH, Neue Versuche mit der Drehwaage. 1852. 2 ℳ.

M. W. DROBISCH, Zusätze zum Florentiner Problem. Mit 1 Tafel. 1852. 1 ℳ 60 Ng.

W. WEBER, Elektrodynamische Maassbestimmungen (Diamagnetismus). Mit 1 Tafel. 1852. 2 ℳ.

ZWEITER BAND. (IV. Bd.) Mit 19 Tafeln. hoch 4. 1855. brosch. Preis 20 ℳ.

M. W. DROBISCH, Ueber musikalische Tonbestimmung und Temperatur. 1852. 3 ℳ.

W. HOFMEISTER, Beiträge zur Kenntniss der Gefässkryptogamen. Mit 18 Tafeln. 1852. 4 ℳ.

P. A. HANSEN, Entwickelung des Products einer Potenz des Radius Vectors mit dem Sinus oder Cosinus eines Vielfachen der wahren Anomalie in Reihen, die nach den Sinussen oder Cosinussen der Vielfachen der wahren, excentrischen oder mittleren Anomalie fortschreiten. 1853. 3 ℳ.

—— Entwickelung der negativen und ungraden Potenzen der Quadratwurzel der Function $r^2 + r'^2 - 2rr'(\cos U \cos U' + \sin U \sin U' \cos J)$. 1854. 3 ℳ.

O. SCHLÖMILCH, Ueber die Bestimmung der Massen und der Trägheitsmomente symmetrischer Rotationskörper von ungleichförmiger Dichtigkeit. 1854. 80 Ng.

—— Ueber einige allgemeine Reihenentwickelungen und deren Anwendung auf die elliptischen Functionen. 1854. 1 ℳ 60 Ng.

P. A. HANSEN, Die Theorie des Aequatoreals. 1855. 2 ℳ 40 Ng.

C. F. NAUMANN, Ueber die Rationalität der Tangenten-Verhältnisse tautozonaler Krystallflächen. 1855. 1 ℳ.

A. F. MÖBIUS, Die Theorie der Kreisverwandtschaft. 1855. 2 ℳ.

DRITTER BAND. (V. Bd.) Mit 15 Tafeln. hoch 4. 1857. brosch. Preis 19 ℳ 20 Ng.

M. W. DROBISCH, Nachträge zur Theorie der musik. Tonverhältnisse. 1855. 1 ℳ 20 Ng.

P. A. HANSEN, Auseinandersetzung einer zweckmässigen Methode zur Berechnung der absoluten Störungen der kleinen Planeten. 1856. 5 ℳ.

R. KOHLRAUSCH und W. WEBER, Elektrodynamische Maassbestimmungen, insbesondere Zurückführung der Stromintensitäts-Messungen auf mechanisches Maass. 1856. 1 ℳ 60 Ng.

H. D'ARREST, Resultate aus Beobachtungen der Nebelflecken und Sternhaufen. Erste Reihe. 1856. 2 ℳ 40 Ng.

W. G. HANKEL, Elektrische Untersuchungen. Erste Abhandlung: Ueber der Messung der atmosphärischen Elektricität nach absolutem Maasse. Mit 2 Tafeln. 1856. 6 ℳ.

W. HOFMEISTER, Beiträge zur Kenntniss der Gefässkryptogamen. No. II. Mit 13 Tafeln. 1857. 4 ℳ.

VIERTER BAND. (VI. Bd.) Mit 29 Tafeln. hoch 4. 1859. brosch. Preis 22 ℳ 50 Ng.

P. A. HANSEN, Auseinandersetzung einer zweckmässigen Methode zur Berechnung der absoluten Störungen der kleinen Planeten. Zweite Abhandlung. 1857. 4 ℳ.

W. G. HANKEL, Elektrische Untersuchungen. Zweite Abhandlung: Ueber die thermo-elektrischen Eigenschaften des Boracites. 1857. 2 ℳ 40 Ng.

—— Elektrische Untersuchungen. Dritte Abhandlung: Ueber Elektricitätserregung zwischen Metallen und erhitzten Salzen. 1858. 1 ℳ 60 Ng.

P. A. HANSEN, Theorie der Sonnenfinsternisse und verwandten Erscheinungen. Mit 2 Tafeln. 1858. 6 ℳ.

G. T. FECHNER, Ueber ein wichtiges psychophysisches Grundgesetz und dessen Beziehung zur Schätzung der Sterngrössen. 1858. 2 ℳ.

W. HOFMEISTER, Neue Beiträge zur Kenntniss der Embryobildung der Phanerogamen. I. Dikotyledonen mit ursprünglich einzelligem, nur durch Zellentheilung wachsendem Endosperm. Mit 27 Tafeln. 1859. 8 ℳ.

FÜNFTER BAND. (VII. Bd.) Mit 30 Tafeln. hoch 4. 1861. brosch. Preis 24 ℳ.

W. G. HANKEL, Elektrische Untersuchungen. Vierte Abhandlung: Ueber das Verhalten der Weingeistflamme in elektrischer Beziehung. 1859. 2 ℳ.

P. A. HANSEN, Auseinandersetzung einer zweckmässigen Methode zur Berechnung der absoluten Störungen der kleinen Planeten. Dritte Abhandlung. 1859. 7 ℳ 20 Ng.

G. T. FECHNER, Ueber einige Verhältnisse des binocularen Sehens. 1860. 5 ℳ 60 Ng.

G. METTENIUS, Zwei Abhandlungen: I. Beiträge zur Anatomie der Cycadeen. Mit 5 Tafeln. II. Ueber Seitenknospen bei Farnen. 1860. 3 ℳ.

W. HOFMEISTER, Neue Beiträge zur Kenntniss der Embryobildung der Phanerogamen. II. Monokotyledonen. Mit 25 Tafeln. 1861. 8 ℳ.

---

*) Die eingeklammerten römischen Ziffern geben die Zahl des Bandes in der Reihenfolge der Abhandlungen beider Classen an.

SUPPLEMENT ZUR ABHANDLUNG

ÜBER DIE

REDUCTION ELLIPTISCHER INTEGRALE

ENTHALTEND

NACHTRÄGE, BERICHTIGUNGEN UND INHALTSÜBERSICHT

VON

W. SCHEIBNER,
MITGLIED DER KÖNIGL. SÄCHS. GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN.

Zum XII. Bande der Abhandlungen der mathematisch-physischen Classe der Königl. Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften.

LEIPZIG
BEI S. HIRZEL.
1880.

Vom Verfasser übergeben den 20. Juni 1880.
Der Abdruck vollendet den 30. September 1880.

Fortsetzung der Berichtigungen und Nachträge.

S. 60, Z. 3 v. u. hinzuzufügen: Für $6BCD = AD^2 + B^2E$ oder $\lambda + C = 0$ wird

$$\xi\xi = \left(Bx^2 + D\right)\left(\frac{A}{B}x^2 + 4x + \frac{E}{D}\right)$$

S. 61, Anmerkung zum Schlusse des Art. 3.

Aus $4\lambda^3 - G\lambda - H = 0$ folgt

$$G^3 - 27H^2 = (12\lambda^2 - G)^2(G - 3\lambda^2)$$

Für $3\lambda^2 > G$ ist mithin nach dem Obigen $B^2 - AC > A\lambda$. Da aber die cubische Gleichung in jedem Falle eine und nur eine Wurzel hat, für welche $4\lambda^2 > G$, so fragt sich, ob auch in dem Intervalle $\frac{1}{3}G > \lambda^2 > \frac{1}{4}G$ stets $B^2 - AC > A\lambda$ bleibt. Wäre Letzteres der Fall, so würde die Wurzel λ, welche gleiches Vorzeichen mit $H = \lambda(4\lambda^2 - G) = 4\lambda\lambda_1\lambda_2$ besitzt, stets eine reelle Zerlegung herbeiführen. Diess tritt in der That ein für $B^2 - AC > 0$, weil wegen $\lambda + \lambda_1 + \lambda_2 = 0$ λ_1 und λ_2 resp. $A\lambda_1$ und $A\lambda_2$ entgegengesetzte Vorzeichen von λ resp. $A\lambda$ besitzen. Da nun bei vier complexen Wurzeln nur eines dieser Producte $< B^2 - AC$ sein kann, so hat man die Fälle

1)	$A\lambda < B^2 - AC$,	$A\lambda_1 > B^2 - AC$,	$A\lambda_2 > B^2 - AC$
2)	$A\lambda_1 < B^2 - AC$,	$A\lambda_2 > B^2 - AC$,	$A\lambda > B^2 - AC$
3)	$A\lambda_2 < B^2 - AC$,	$A\lambda > B^2 - AC$,	$A\lambda_1 > B^2 - AC$

Die Fälle 2) und 3) enthalten für $B^2 - AC > 0$ einen Widerspruch, der für $B^2 - AC < 0$ wegfällt. In der That kann letzterenfalls die Wurzel λ einer nicht reellen Zerlegung entsprechen. Wenn aber auch ξ_1 und ξ_2 conjugirt complex werden, so bleibt doch $\xi_1\xi_2^0 + \xi_1^0\xi_2$ reell. Uebrigens wird für den Fall von vier reellen Wurzeln $\lambda^2 - C\lambda < 2(C^2 - BD)$, während bei vier complexen Wurzeln $\lambda^2 - C\lambda > 2(C^2 - BD)$.

S. 66 sind zu den Formeln des Art. 6 die Gleichungen hinzuzufügen:

$$g = M^2 - LN, \qquad \tfrac{1}{2}h = (Lx + M)(M_1x + N_1) - (L_1x + M_1)(Mx + N)$$

$$3i_2 = 2(AD_1 - DA_1), \qquad 4i_1i_3 = i_0i_4 + 3i_2i_2$$

$$2i_3 = AE_1 - EA_1, \qquad 9i_2i_4 = i_0i_6 + 8i_3i_3$$

$$3i_4 = 2(BE_1 - EB_1), \qquad 4i_3i_5 = i_2i_6 + 3i_4i_4$$

$$\frac{1}{36}(G^3 - 27H^2) = 4i_2i_4 - i_1i_5 - 3i_3i_3$$

S. 85, Z. 16 lies $c_2\varepsilon_1$ statt $e\varepsilon_1$.

S. 86, Z. 6 v. u. lies »mit dem Modul $\varkappa < 1$«.

S. 103, Z. 13 lies »$\varrho = \frac{27}{4}\frac{G^3}{G^3 - 27H^2}$, also in diesem Falle eine absolute Invariante«.

S. 109, Z. 8 lies »in Bezug auf x und auf y«.

S. 113, Z. 10 lies xy^2 statt x^2y.

S. 119, Z. 6 einzuschalten: Man sieht, dass die vier Thetafunctionen der partiellen Differentialgleichung genügen $\left(\frac{\partial}{\partial u}\right)^2 \vartheta(u, q) = -4q\frac{\partial}{\partial q}\vartheta(u, q)$.

S. 119, Z. 10 lies »folglich« statt »nebst«.

S. 125, Z. 11/12 hinzuzufügen:

Es liegt auf der Hand, dass durch die Elimination von φ aus der Verbindung von I^a und II^a, so wie von I^b und II^b, die Verdoppelungsformeln des Art. 18 als

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\psi = \operatorname{tg}\chi\Delta(\chi, \mu) \quad \text{und} \quad \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\chi' = \operatorname{tg}\psi'\Delta(\psi', \lambda)$$

hervorgehen müssen.

S. 126, Z. 10 lies »wodurch«.

S. 126, Z. 4 v. u. lies $1 + \Delta\varphi$ statt $\Delta\chi$.

S. 129, Z. 11 lies »aus dem Centrum auf die Tangente« statt »auf die Tangenten«.

S. 131, Z. 10 v. u. lies »was aus dem Nachlasse von Gauss Bd. 3 seiner Werke über elliptische Functionen enthält«.

S. 138, Anmerkung zum Schlusse des Art. 39.

Wenn hier durch Einführung des complementären Moduls q oder $q' < e^{-\pi}$ geworden ist, so gilt selbstverständlich diese Ungleichung nur für reelle Werthe des Moduls. Das allgemeine von Jacobi aufgestellte Transformationstheorem ersetzt q durch

$$q' = e^{-\pi i\frac{m\pi i + n\lg q}{m'\pi i + n'\lg q}} = e^{-\pi i\frac{mK + nK'i}{m'K + n'K'i}},$$

wo $mn' - m'n = 1$, und es lässt sich leicht zeigen, dass durch geeignete Bestimmung der ganzen Zahlen $m\ n\ m'\ n'$ stets $\operatorname{mod} q' < e^{-\pi\sqrt{\frac{3}{4}}}$ gemacht werden kann. Siehe Jacobi, Werke Bd. I, S. 385 und Bd. II, S. 35, sowie Leipziger Berichte, 1862, S. 92 flg.

S. 138, Z. 8 v. u. lies

$$\sqrt{\varkappa}\operatorname{tg}\varphi' = \frac{\sin u' - q'^2\sin 3u' + q'^6\sin 5u' - q'^{12}\sin 7u' \pm \ldots}{\cos u' + q'^2\cos 3u' + q'^6\cos 5u' + q'^{12}\cos 7u' + \ldots}$$

S. 140, Z. 9 lies »wo für $\varkappa' = \cos\varepsilon$

$$\lambda' = \operatorname{tg}^2\tfrac{1}{2}(\tfrac{1}{2}\pi - \varepsilon) = \cos\varepsilon_1, \qquad \lambda_1' = \operatorname{tg}^2\tfrac{1}{2}(\tfrac{1}{2}\pi - \varepsilon_1) = \cos\varepsilon_2 \quad \text{etc.«}$$

S. 142, Z. 6 einzuschalten »oder $\varkappa = 3 - \sqrt{8}$. Vergl. Thomae, Theorie der complexen Functionen (1873), S. 111.«

S. 146, Z. 7 v. u. lies »ξ und η, sowie $\Delta\varphi$«.

S. 150. Vor Art. 45 sind als neue Artikel einzuschalten:

44ª.

Die Differentialformeln der Art. 33 und 44 lassen sich in fruchtbare Reihenentwickelungen umsetzen, wenn man die Logarithmen der Thetafunctionen bildet:

$$\lg\vartheta u = \lg\chi_1 + \sum_{n=1}^{\infty}\lg(1-2q^{2n-1}\cos 2u+q^{4n-2})$$
$$= \lg\chi_1 - 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{q^n}{1-q^{2n}}\frac{\cos 2nu}{n}$$
$$\lg\vartheta_1 u = \lg(2\chi_1 q^{\frac{1}{4}}\sin u) + \sum\lg(1-2q^{2n}\cos 2u+q^{4n})$$
$$= \lg(2\chi_1 q^{\frac{1}{4}}\sin u) - 2\sum\frac{q^{2n}}{1-q^{2n}}\frac{\cos 2nu}{n}$$
$$\lg\vartheta_2 u = \lg(2\chi_1 q^{\frac{1}{4}}\cos u) + \sum\lg(1+2q^{2n}\cos 2u+q^{4n})$$
$$= \lg(2\chi_1 q^{\frac{1}{4}}\cos u) + 2\sum(-1)^{n-1}\frac{q^{2n}}{1-q^{2n}}\frac{\cos 2nu}{n}$$
$$\lg\vartheta_3 u = \lg\chi_1 + \sum\lg(1+2q^{2n-1}\cos 2u+q^{4n-2})$$
$$= \lg\chi_1 + 2\sum(-1)^{n-1}\frac{q^n}{1-q^{2n}}\frac{\cos 2nu}{n}$$

Durch Differentiation folgt sogleich für die Integrale zweiter Gattung

$$\frac{\vartheta' u}{\vartheta u} = 4\sum_1^{\infty}\frac{q^{2n-1}\sin 2u}{1-2q^{2n-1}\cos 2u+q^{4n-2}} = 4\sum_1^{\infty}\frac{q^n}{1-q^{2n}}\sin 2nu$$
$$\frac{\vartheta_1' u}{\vartheta_1 u} = \cot u + 4\sum\frac{q^{2n}\sin 2u}{1-2q^{2n}\cos 2u+q^{4n}} = \cot u + 4\sum\frac{q^{2n}}{1-q^{2n}}\sin 2nu$$
$$\frac{\vartheta_2' u}{\vartheta_2 u} = -\operatorname{tg} u - 4\sum\frac{q^{2n}\sin 2u}{1+2q^{2n}\cos 2u+q^{4n}} = -\operatorname{tg} u + 4\sum(-1)^n\frac{q^{2n}}{1-q^{2n}}\sin 2nu$$
$$\frac{\vartheta_3' u}{\vartheta_3 u} = -4\sum\frac{q^{2n-1}\sin 2u}{1+2q^{2n-1}\cos 2u+q^{4n-2}} = 4\sum(-1)^n\frac{q^n}{1-q^{2n}}\sin 2nu$$

Substituirt man diese Werthe, so erhält man

$$\vartheta^2\frac{\vartheta_2 u\,\vartheta_3 u}{\vartheta u\,\vartheta_1 u} = \vartheta^2\frac{\vartheta_2(u,q^{\frac{1}{2}})}{\vartheta_1(u,q^{\frac{1}{2}})} = \cot u + 4\sum\frac{q^n}{1+q^n}\sin 2nu$$
$$= \cot u - 4\sin 2u\sum\frac{(-1)^n q^n}{1-2q^n\cos 2u+q^{2n}}$$

$$\vartheta^2\frac{\vartheta u\,\vartheta_1 u}{\vartheta_2 u\,\vartheta_3 u} = \vartheta^2\frac{\vartheta_1(u,q^{\frac{1}{2}})}{\vartheta_2(u,q^{\frac{1}{2}})} = \operatorname{tg} u + 4\sum(-1)^n\frac{q^n}{1+q^n}\sin 2nu$$
$$= \operatorname{tg} u + 4\sin 2u\sum\frac{(-1)^n q^n}{1+2q^n\cos 2u+q^{2n}}$$

$$\vartheta_2^2 \frac{\vartheta u\, \vartheta_3 u}{\vartheta_1 u\, \vartheta_2 u} = \vartheta_2^2 \frac{\vartheta(2u, q^2)}{\vartheta_1(2u, q^2)} = \frac{2}{\sin 2u} + 8 \sum \frac{q^{4n-2}}{1 - q^{4n-2}} \sin(4n-2)u$$

$$= \frac{2}{\sin 2u} + 8 \sin 2u \sum \frac{q^{2n}(1 + q^{4n})}{1 - 2q^{4n} \cos 4u + q^{8n}}$$

$$\vartheta_2^2 \frac{\vartheta_1 u\, \vartheta_2 u}{\vartheta u\, \vartheta_3 u} = \vartheta_2^2 \frac{\vartheta_1(2u, q^2)}{\vartheta(2u, q^2)} = 8 \sum \frac{q^{2n-1}}{1 - q^{4n-2}} \sin(4n-2)u$$

$$= 8 \sin 2u \sum \frac{q^{2n-1}(1 + q^{4n-2})}{1 - 2q^{4n-2} \cos 4u + q^{8n-4}}$$

$$\vartheta_3^2 \frac{\vartheta u\, \vartheta_2 u}{\vartheta_1 u\, \vartheta_3 u} = \vartheta_3^2 \frac{\vartheta_2(u, iq^{\frac{1}{2}})}{\vartheta_1(u, iq^{\frac{1}{2}})} = \cot u + 4 \sum \frac{(-1)^{n-1} q^n}{1 + (-q)^n} \sin 2nu$$

$$= \cot u + 4 \sin 2u \sum \frac{q^n}{1 - 2(-q)^n \cos 2u + q^{2n}}$$

$$\vartheta_3^2 \frac{\vartheta_1 u\, \vartheta_3 u}{\vartheta u\, \vartheta_2 u} = \vartheta_3^2 \frac{\vartheta_1(u, iq^{\frac{1}{2}})}{\vartheta_2(u, iq^{\frac{1}{2}})} = \operatorname{tg} u + 4 \sum \frac{q^n}{1 + (-q)^n} \sin 2nu$$

$$= \operatorname{tg} u + 4 \sin 2u \sum \frac{q^n}{1 + 2(-q)^n \cos 2u + q^{2n}}$$

folglich

$$\vartheta \vartheta_3 \frac{\vartheta_2 u}{\vartheta_1 u} = \frac{1}{\operatorname{tg} u} \left\{ 1 + 8 \sin^2 u \sum \frac{(-1)^n q^{2n}}{1 - 2q^{2n} \cos 2u + q^{4n}} \right\}$$

$$= \cot u - 4 \sum \frac{q^{2n}}{1 + q^{2n}} \sin 2nu = \frac{2K}{\pi} \cot \varphi$$

$$\vartheta \vartheta_3 \frac{\vartheta_1 u}{\vartheta_2 u} = \operatorname{tg} u \left\{ 1 + 8 \cos^2 u \sum \frac{(-1)^n q^{2n}}{1 + 2q^{2n} \cos 2u + q^{4n}} \right\}$$

$$= \operatorname{tg} u + 4 \sum (-1)^n \frac{q^{2n}}{1 + q^{2n}} \sin 2nu = \frac{2K\varkappa'}{\pi} \operatorname{tg} \varphi$$

$$\vartheta_2 \vartheta_3 \frac{\vartheta u}{\vartheta_1 u} = \frac{1}{\sin u} \left\{ 1 + 4 \sin^2 u \sum \frac{q^n (1 + q^{2n})}{1 - 2q^{2n} \cos 2u + q^{4n}} \right\}$$

$$= \frac{1}{\sin u} + 4 \sum \frac{q^{2n-1}}{1 - q^{2n-1}} \sin(2n-1)u = \frac{2K}{\pi} \frac{1}{\sin \varphi}$$

$$\vartheta_2 \vartheta_3 \frac{\vartheta_1 u}{\vartheta u} = 4 \sin u \sum \frac{q^{n-\frac{1}{2}}(1 + q^{2n-1})}{1 - 2q^{2n-1} \cos 2u + q^{4n-2}}$$

$$= 4 \sum \frac{q^{n-\frac{1}{2}}}{1 - q^{2n-1}} \sin(2n-1)u = \frac{2K\varkappa}{\pi} \sin \varphi$$

und wie sich durch Vertauschung von q mit $-q$ und von u mit $u + \frac{1}{2}\pi$ leicht ergibt:

$$\vartheta\vartheta_2\frac{\vartheta_3 u}{\vartheta_1 u} = \frac{1}{\sin u}\left\{1 + 4\sin^2 u\sum\frac{(-1)^n q^n(1+q^{2n})}{1-2q^{2n}\cos 2u + q^{4n}}\right\}$$

$$= \frac{1}{\sin u} - 4\sum\frac{q^{2n-1}}{1+q^{2n-1}}\sin(2n-1)u = \frac{2K}{\pi}\frac{\Delta\varphi}{\sin\varphi}$$

$$\vartheta\vartheta_2\frac{\vartheta_1 u}{\vartheta_3 u} = 4\sin u\sum\frac{(-1)^{n-1}q^{n-\frac{1}{2}}(1-q^{2n-1})}{1+2q^{2n-1}\cos 2u + q^{4n-2}}$$

$$= 4\sum(-1)^n\frac{q^{n-\frac{1}{2}}}{1+q^{2n-1}}\sin(2n-1)u = \frac{2K\varkappa\varkappa'}{\pi}\frac{\sin\varphi}{\Delta\varphi}$$

$$\vartheta_2\vartheta_3\frac{\vartheta_3 u}{\vartheta_2 u} = \frac{1}{\cos u}\left\{1 + 4\cos^2 u\sum\frac{q^n(1+q^{2n})}{1+2q^{2n}\cos 2u + q^{4n}}\right\}$$

$$= \frac{1}{\cos u} + 4\sum(-1)^n\frac{q^{2n-1}}{1-q^{2n-1}}\cos(2n-1)u = \frac{2K}{\pi}\frac{\Delta\varphi}{\cos\varphi}$$

$$\vartheta_2\vartheta_3\frac{\vartheta_2 u}{\vartheta_3 u} = 4\cos u\sum\frac{q^{n-\frac{1}{2}}(1+q^{2n-1})}{1+2q^{2n-1}\cos 2u + q^{4n-2}}$$

$$= 4\sum(-1)^{n-1}\frac{q^{n-\frac{1}{2}}}{1-q^{2n-1}}\cos(2n-1)u = \frac{2K\varkappa}{\pi}\frac{\cos\varphi}{\Delta\varphi}$$

$$\vartheta\vartheta_2\frac{\vartheta u}{\vartheta_2 u} = \frac{1}{\cos u}\left\{1 + 4\cos^2 u\sum\frac{(-1)^n q^n(1+q^{2n})}{1+2q^{2n}\cos 2u + q^{4n}}\right\}$$

$$= \frac{1}{\cos u} + 4\sum(-1)^n\frac{q^{2n-1}}{1+q^{2n-1}}\cos(2n-1)u = \frac{2K\varkappa'}{\pi}\frac{1}{\cos\varphi}$$

$$\vartheta\vartheta_2\frac{\vartheta_2 u}{\vartheta u} = 4\cos u\sum\frac{(-1)^{n-1}q^{n-\frac{1}{2}}(1-q^{2n-1})}{1-2q^{2n-1}\cos 2u + q^{4n-2}}$$

$$= 4\sum\frac{q^{n-\frac{1}{2}}}{1+q^{2n-1}}\cos(2n-1)u = \frac{2K\varkappa}{\pi}\cos\varphi$$

Zur Vervollständigung dienen die Ausdrücke

$$\vartheta\vartheta_3\frac{\vartheta u}{\vartheta_3 u} = 1 + 4\sum\frac{(-1)^n q^{2n-1}(\cos 2u + q^{2n-1})}{1+2q^{2n-1}\cos 2u + q^{4n-2}}$$

$$= 1 + 4\sum(-1)^n\frac{q^n}{1+q^{2n}}\cos 2nu = \frac{2K\varkappa'}{\pi}\frac{1}{\Delta\varphi}$$

$$\vartheta\vartheta_3\frac{\vartheta_3 u}{\vartheta u} = 1 + 4\sum\frac{(-1)^{n-1}q^{2n-1}(\cos 2u - q^{2n-1})}{1-2q^{2n-1}\cos 2u + q^{4n-2}} \quad {}^{*})$$

$$= 1 + 4\sum\frac{q^n}{1+q^{2n}}\cos 2nu = \frac{2K}{\pi}\Delta\varphi$$

---

*) JACOBI gibt in den *Fundam.* S. 87 dem letzteren Ausdruck die Form

$$\vartheta\vartheta_3\frac{\vartheta_3 u}{\vartheta u} = \vartheta_3^2 + 8\sin^2 u\sum\frac{(-1)^n q^{2n-1}(1+q^{2n-1})}{(1-q^{2n-1})(1-2q^{2n-1}\cos 2u + q^{4n-2})}$$

ausserdem finden sich in den *Fundam.* (S. 187) noch die hierher gehörigen Entwickelungen

$$\frac{\vartheta_1'}{\vartheta u} = 2q^{\frac{1}{4}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}q^{n.n-1}(1-q^{4n-2})}{1-2q^{2n-1}\cos 2u+q^{4n-2}}$$

$$\frac{\vartheta_1'}{\vartheta_1 u} = \frac{1}{\sin u}\left\{1+4\sin^2 u\sum\frac{(-1)^n q^{n.n+1}(1+q^{2n})}{1-q^{2n}\cos 2u+q^{4n}}\right\}$$
$$= \frac{1}{\sin u}\sum\frac{(-1)^{n-1}q^{n.n-1}(1-q^{2n})(1-q^{4n})}{1-2q^{2n}\cos 2u+q^{4n}}$$

$$\frac{\vartheta_1'}{\vartheta_2 u} = \frac{1}{\cos u}\left\{1+4\cos^2 u\sum\frac{(-1)^n q^{n.n+1}(1+q^{2n})}{1+2q^{2n}\cos 2u+q^{4n}}\right\}$$
$$= \frac{1}{\cos u}\sum\frac{(-1)^{n-1}q^{n.n-1}(1-q^{2n})(1-q^{4n})}{1+2q^{2n}\cos 2u+q^{4n}}$$

$$\frac{\vartheta_1'}{\vartheta_3 u} = 2q^{\frac{1}{4}}\sum\frac{(-1)^{n-1}q^{n.n-1}(1-q^{4n-2})}{1+2q^{2n-1}\cos 2u+q^{4n-2}} \quad ^{*)}$$

44 b.

Durch Integration der Gleichung für $\frac{\vartheta_3 u}{\vartheta u}$ geht der Werth hervor

1) $$\varphi = \operatorname{am}\frac{2Ku}{\pi} = \vartheta\vartheta_3\int_0^u\frac{\vartheta_3 u}{\vartheta u}du = u+2\sum\frac{q^n}{1+q^{2n}}\frac{\sin 2nu}{n}$$
$$= u+2\sum(-1)^{n-1}\operatorname{arc\,tg}\frac{q^{2n-1}\sin 2u}{1-q^{2n-1}\cos 2u}$$

---

*) Hieraus entspringen die trigonometrischen Reihen

$$\frac{\vartheta_1'}{\vartheta u} = 2a_0+4\sum a_n\cos 2nu\,, \qquad \frac{\vartheta_1'}{\vartheta_2 u} = \frac{1}{\cos u}+4\sum(-1)^n b_n\cos(2n-1)u$$

$$\frac{\vartheta_1'}{\vartheta_1 u} = \frac{1}{\sin u}-4\sum b_n\sin(2n-1)u\,, \qquad \frac{\vartheta_1'}{\vartheta_3 u} = 2a_0+4\sum(-1)^n a_n\cos 2nu$$

wo

$$a_n = \sum_{m=1}^{\infty}(-1)^{m-1}q^{(m-\frac{1}{2})(m+2n-\frac{1}{2})}\,, \qquad b_n = \sum_{m=1}^{\infty}(-1)^{m-1}q^{m(m+2n-1)}$$

Uebrigens leuchtet ein, dass die im obigen Art. gegebenen Entwickelungen für $u = 0$ oder $u = \frac{1}{2}\pi$ Ausdrücke mannichfacher Art für die Potenzen von $\vartheta\ \vartheta_2\ \vartheta_3$ oder, was auf dasselbe hinauskommt, für die Producte $\vartheta\vartheta_2$, $\vartheta\vartheta_3$ und $\vartheta_2\vartheta_3$ und deren Quadrate liefern. Wir führen beispielsweise nur die Gleichung

$$\vartheta_2^2 = 4\sum\frac{q^{n-\frac{1}{2}}}{1+q^{2n-1}} = 4\sum(-1)^{n-1}\frac{q^{n-\frac{1}{2}}}{1-q^{2n-1}}$$
$$= 4\sum(-1)^{n-1}q^{2(n-\frac{1}{2})^2}\frac{1+q^{4n-2}}{1-q^{4n-2}}$$

an, welche in den *Fundam.* S. 187 nicht ganz correct ausgedrückt ist.

während die Integration der übrigen Quotienten die Formeln liefert

$$\vartheta\vartheta_3\int_0^u \frac{\vartheta u}{\vartheta_3 u}\,du = \varkappa'\int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\Delta^2\varphi} = \operatorname{arc\,tg}(\varkappa'\operatorname{tg}\varphi) = \psi-\varphi \tag{2}$$

$$= u + 2\sum(-1)^n \frac{q^n}{1+q^{2n}}\,\frac{\sin 2nu}{n} = u+2\sum(-1)^n \operatorname{arc\,tg}\frac{q^{2n-1}}{1+q^{2n-1}}\,\frac{\sin 2u}{\cos 2u}$$

$$\vartheta\vartheta_2\int_0^u\frac{\vartheta_1 u}{\vartheta u}\,du = \varkappa\int_0^\varphi\frac{\cos\varphi\,d\varphi}{\Delta\varphi} = \arcsin(\varkappa\sin\varphi) = 2\psi'-\varphi \tag{3}$$

$$=4\sum\frac{q^{n-\frac12}}{1+q^{2n-1}}\,\frac{\sin(2n-1)u}{2n-1} = 2\sum(-1)^{n-1}\operatorname{arc\,tg}\frac{2q^{n-\frac12}\sin u}{1-q^{2n-1}}$$

$$\vartheta\vartheta_2\int_0^u\frac{\vartheta u}{\vartheta_2 u}\,du = \varkappa'\int_0^\varphi\frac{d\varphi}{\cos\varphi\,\Delta\varphi} = \lg\frac{\Delta\varphi+\varkappa'\sin\varphi}{\cos\varphi} = \lg\frac{\operatorname{tg}^2\frac12(\frac12\pi+\chi)}{\operatorname{tg}\frac12(\frac12\pi+\varphi)} \tag{4}$$

$$=\lg\operatorname{tg}\tfrac12(\tfrac12\pi+u)+4\sum\frac{(-1)^nq^{2n-1}}{1+q^{2n-1}}\,\frac{\sin(2n-1)u}{2n-1}$$

$$=\lg\operatorname{tg}\tfrac12(\tfrac12\pi+u)+\sum(-1)^n\lg\frac{1+2q^n\sin u+q^{2n}}{1-2q^n\sin u+q^{2n}}$$

$$\vartheta_2\vartheta_3\int_0^u\frac{\vartheta_1 u}{\vartheta_3 u}\,du = \varkappa\int_0^\varphi\frac{\cos\varphi\,d\varphi}{\Delta^2\varphi} = \lg\frac{1+\varkappa\sin\varphi}{\Delta\varphi} = \lg\operatorname{tg}\tfrac12(\tfrac12\pi+2\psi'-\varphi) \tag{5}$$

$$=4\sum(-1)^{n-1}\frac{q^{n-\frac12}}{1-q^{2n-1}}\,\frac{\sin(2n-1)u}{2n-1} = \sum\lg\frac{1+2q^{n-\frac12}\sin u+q^{2n-1}}{1-2q^{n-\frac12}\sin u+q^{2n-1}}$$

$$\vartheta_2\vartheta_3\int_0^u\frac{\vartheta_3 u}{\vartheta_2 u}\,du=\int_0^\varphi\frac{d\varphi}{\cos\varphi}=\lg\operatorname{tg}\tfrac12(\tfrac12\pi+\varphi)=\frac12\lg\frac{1+\sin\varphi}{1-\sin\varphi} \tag{6}$$

$$=\lg\operatorname{tg}\tfrac12(\tfrac12\pi+u)+4\sum\frac{(-1)^{n-1}q^{2n-1}}{1-q^{2n-1}}\,\frac{\sin(2n-1)u}{2n-1}$$

$$=\lg\operatorname{tg}\tfrac12(\tfrac12\pi+u)+\sum\lg\frac{1+2q^n\sin u+q^{2n}}{1-2q^n\sin u+q^{2n}}$$

$$\vartheta\vartheta_2\int_u^{\frac12\pi}\frac{\vartheta_1 u}{\vartheta_3 u}\,du = \varkappa\varkappa'\int_\varphi^{\frac12\pi}\frac{\sin\varphi\,d\varphi}{\Delta^2\varphi} = \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{\varkappa}{\varkappa'}\cos\varphi\right) = \arccos\frac{\varkappa'}{\Delta\varphi} \tag{7}$$

$$=4\sum(-1)^{n-1}\frac{q^{n-\frac12}}{1+q^{2n-1}}\,\frac{\cos(2n-1)u}{2n-1} = 2\sum(-1)^{n-1}\operatorname{arc\,tg}\frac{2q^{n-\frac12}\cos u}{1-q^{2n-1}}$$

$$\vartheta\vartheta_2\int_u^{\frac12\pi}\frac{\vartheta_3 u}{\vartheta_1 u}\,du=\int_\varphi^{\frac12\pi}\frac{d\varphi}{\sin\varphi}=\lg\cot\tfrac12\varphi=\lg\cot\tfrac12 u-4\sum\frac{q^{2n-1}}{1+q^{2n-1}}\,\frac{\cos(2n-1)u}{2n-1} \tag{8}$$

$$=\lg\cot\tfrac12 u+\sum(-1)^n\lg\frac{1+2q^n\cos u+q^{2n}}{1-2q^n\cos u+q^{2n}}$$

9) $$\vartheta_2\vartheta_3\int_u^{\frac12\pi}\frac{\vartheta_1 u}{\vartheta u}\,du = \varkappa\int_\varphi^{\frac12\pi}\frac{\sin\varphi\,d\varphi}{\Delta\varphi} = \lg\frac{\Delta\varphi+\varkappa\cos\varphi}{\varkappa'} = \lg\left(\frac{1+\varkappa}{\varkappa'}\Delta\psi'\right)$$
$$= 4\sum\frac{q^{n-\frac12}}{1-q^{2n-1}}\,\frac{\cos(2n-1)u}{2n-1} = \sum\lg\frac{1+2q^{n-\frac12}\cos u+q^{2n-1}}{1-2q^{n-\frac12}\cos u+q^{2n-1}}$$

10) $$\vartheta_2\vartheta_3\int_u^{\frac12\pi}\frac{\vartheta u}{\vartheta_1 u}\,du = \int_\varphi^{\frac12\pi}\frac{d\varphi}{\sin\varphi\,\Delta\varphi} = \lg\frac{\Delta\varphi+\cos\varphi}{\varkappa'\sin\varphi} = \lg\left(\frac{1+\varkappa}{\varkappa'}\cot\psi'\right)$$
$$= \lg\cot\tfrac12 u + 4\sum\frac{q^{2n-1}}{1-q^{2n-1}}\,\frac{\cos(2n-1)u}{2n-1}$$
$$= \lg\cot\tfrac12 u + \sum\lg\frac{1+2q^n\cos u+q^{2n}}{1-2q^n\cos u+q^{2n}}$$

11) $$\vartheta\vartheta_3\int_0^u\frac{\vartheta_1 u}{\vartheta_2 u}\,du = \varkappa'\int_0^\varphi\frac{\operatorname{tg}\varphi\,d\varphi}{\Delta\varphi} = \lg\frac{\Delta\varphi+\varkappa'}{(1+\varkappa')\cos\varphi} = \lg\frac{\Delta\chi}{\cos\chi}$$
$$= -\lg\cos u + 4\sum\frac{(-1)^n q^{2n}}{1+q^{2n}}\,\frac{\sin^2 nu}{n}$$
$$= -\lg\cos u + \sum(-1)^{n-1}\lg\left\{1-\left(\frac{2q^n\sin u}{1+q^{2n}}\right)^2\right\}$$

12) $$\vartheta\vartheta_3\int_u^{\frac12\pi}\frac{\vartheta_2 u}{\vartheta_1 u}\,du = \int_\varphi^{\frac12\pi}\frac{\cot\varphi\,d\varphi}{\Delta\varphi} = \lg\frac{1+\Delta\varphi}{(1+\varkappa')\sin\varphi} = \lg\frac{1}{\sin\chi}$$
$$= -\lg\sin u + 4\sum\frac{(-1)^n q^{2n}}{1+q^{2n}}\,\frac{\sin^2 n\left(\frac12\pi-u\right)}{n}$$
$$= -\lg\sin u + \sum(-1)^{n-1}\lg\left\{1-\left(\frac{2q^n\cos u}{1+q^{2n}}\right)^2\right\}$$

In diesen Formeln sind manche bemerkenswerthe Resultate enthalten. So z. B. folgt aus 1)

$$\varphi - u = \frac{1}{i}\sum_1^\infty(-1)^{n-1}\lg\frac{1-q^{2n-1}e^{-2ui}}{1-q^{2n-1}e^{2ui}}$$

mithin für $e^{2ui}=\omega$

$$e^{(\varphi-u)i} = \frac{1-\frac{q}{\omega}\cdot 1-q^3\omega\cdot 1-\frac{q^5}{\omega}\cdot 1-q^7\omega\cdots}{1-q\omega\cdot 1-\frac{q^3}{\omega}\cdot 1-q^5\omega\cdot 1-\frac{q^7}{\omega}\cdots} = \frac{\sum(-1)^n q^{n\cdot 2n+1}\omega^n}{\sum(-1)^n q^{n\cdot 2n-1}\omega^n}$$

wenn die Summationen im Zähler und Nenner zwischen $\pm\infty$ ausgeführt werden*). Damit erhält man (Jacobi, Werke Bd. I, S. 9)

---

*) Die Reihenentwickelungen der Producte ergeben sich leicht, wenn man berücksichtigt, dass Nenner und Zähler in $\frac{\vartheta u}{\chi_1}$ übergehen, wenn man ω mit $q\omega$, resp. mit $\frac{\omega}{q}$ vertauscht und dann q statt q^2 schreibt.

$$\frac{1}{i}\,\frac{e^{(\varphi-u)i}-1}{e^{(\varphi-u)i}+1}=\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(\varphi-u)=\frac{\sum_1^{\infty}(-1)^{n-1}q^{n\cdot\overline{2n-1}}(1-q^{2n})\sin 2nu}{1+\sum(-1)^n q^{n\cdot\overline{2n-1}}(1+q^{2n})\cos 2nu}$$

Aus 2) ergibt sich ferner

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(\tfrac{1}{2}\pi-\varphi+2\psi')=\frac{\vartheta_3(\frac{1}{2}\cdot\overline{\frac{1}{2}\pi-u},q^{\frac{1}{2}})}{\vartheta(\frac{1}{2}\cdot\overline{\frac{1}{2}\pi-u},q^{\frac{1}{2}})}=\frac{1+2q^{\frac{1}{2}}\sin u-2q^{\frac{4}{2}}\cos 2u-2q^{\frac{9}{2}}\sin 3u\,..}{1-2q^{\frac{1}{2}}\sin u-2q^{\frac{4}{2}}\cos 2u+2q^{\frac{9}{2}}\sin 3u\,..}$$

während aus 6) und 8) die Gleichungen hervorgehen *)

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(\tfrac{1}{2}\pi+\varphi)=\frac{\vartheta_1(\frac{1}{2}\cdot\overline{\frac{1}{2}\pi+u},q^{\frac{1}{2}})}{\vartheta_2(\frac{1}{2}\cdot\overline{\frac{1}{2}\pi+u},q^{\frac{1}{2}})}=$$

$$=\frac{\sin\frac{1}{2}(\frac{1}{2}\pi+u)-q\sin\frac{3}{2}(\frac{1}{2}\pi+u)+q^3\sin\frac{5}{2}(\frac{1}{2}\pi+u)-q^6\sin\frac{7}{2}(\frac{1}{2}\pi+u)\pm\,..}{\cos\frac{1}{2}(\frac{1}{2}\pi+u)+q\cos\frac{3}{2}(\frac{1}{2}\pi+u)+q^3\cos\frac{5}{2}(\frac{1}{2}\pi+u)+q^6\cos\frac{7}{2}(\frac{1}{2}\pi+u)+\,..}$$

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\varphi=\frac{\vartheta_1(\frac{1}{2}u)\,\vartheta_3(\frac{1}{2}u)}{\vartheta(\frac{1}{2}u)\,\vartheta_2(\frac{1}{2}u)}=\frac{\vartheta_1(\frac{1}{2}u,iq^{\frac{1}{2}})}{\vartheta_2(\frac{1}{2}u,iq^{\frac{1}{2}})}=\frac{\sin\frac{1}{2}u+q\sin\frac{3}{2}u-q^3\sin\frac{5}{2}u-q^6\sin\frac{7}{2}u\,..}{\cos\frac{1}{2}u-q\cos\frac{3}{2}u-q^3\cos\frac{5}{2}u+q^6\cos\frac{7}{2}u\,..}$$

Die Formeln 3) und 7) liefern resp. für $\varphi=\frac{1}{2}\pi$ und $\varphi=0$ (*Fund.* S. 108)

$$\arcsin x=4\sum(-1)^{n-1}\frac{q^{n-\frac{1}{2}}}{1+q^{2n-1}}\,\frac{1}{2n-1}$$

$$=2\sum(-1)^{n-1}\operatorname{arc\,tg}\frac{2q^{n-\frac{1}{2}}}{1-q^{2n-1}}=4\sum(-1)^{n-1}\operatorname{arc\,tg}q^{n-\frac{1}{2}}$$

Die Ausdrücke 9) bis 12) endlich enthalten die Werthe

$$\frac{1+x}{x'}\,\varDelta\psi'=\frac{\vartheta_3(\frac{1}{2}u,q^{\frac{1}{2}})}{\vartheta(\frac{1}{2}u,q^{\frac{1}{2}})},\qquad \frac{x'}{1+x}\operatorname{tg}\psi'=\frac{\vartheta_1(\frac{1}{2}u,q^{\frac{1}{2}})}{\vartheta_2(\frac{1}{2}u,q^{\frac{1}{2}})}$$

$$\frac{\cos\chi}{\varDelta\chi}=\frac{\vartheta_2(u,q^2)\,\vartheta_3(q^2)}{\vartheta_3(u,q^2)\,\vartheta_2(q^2)},\qquad \sin\chi=\frac{\vartheta_1(u,q^2)\,\vartheta_3(q^2)}{\vartheta(u,q^2)\,\vartheta_2(q^2)}$$

welche sogleich direct verificirt werden können.

44c.

Bei den Integralen der zweiten Gattung erscheinen die Quadrate der Quotienten zweier Thetafunctionen, desshalb mögen auch

---

*) JACOBI a. a. O. sowie in CRELLE's Journal Bd. 3, S. 192.

für diese die betreffenden Reihenentwickelungen zusammengestellt werden. Durch wiederholte Differentiation der logarithmischen Differentialquotienten folgt

$$\left(\frac{d}{du}\right)^2 \lg \vartheta u = \frac{\vartheta'' u}{\vartheta u} - \left(\frac{\vartheta' u}{\vartheta u}\right)^2 = 8\sum \frac{nq^n}{1-q^{2n}} \cos 2nu$$

$$= 8\sum \frac{q^{2n-1}\cos 2u}{1-2q^{2n-1}\cos 2u + q^{4n-2}} - 16\sum \left(\frac{q^{2n-1}\sin 2u}{1-2q^{2n-1}\cos 2u + q^{4n-2}}\right)^2$$

$$\left(\frac{d}{du}\right)^2 \lg \vartheta_1 u = \frac{\vartheta_1'' u}{\vartheta_1 u} - \left(\frac{\vartheta_1' u}{\vartheta_1 u}\right)^2 = -\frac{1}{\sin^2 u} + 8\sum \frac{nq^{2n}}{1-q^{2n}} \cos 2nu$$

$$= -\frac{1}{\sin^2 u} + 8\sum \frac{q^{2n}\cos 2u}{1-2q^{2n}\cos 2u + q^{4n}} - 16\sum \left(\frac{q^{2n}\sin 2u}{1-2q^{2n}\cos 2u + q^{4n}}\right)^2$$

$$\left(\frac{d}{du}\right)^2 \lg \vartheta_2 u = \frac{\vartheta_2'' u}{\vartheta_2 u} - \left(\frac{\vartheta_2' u}{\vartheta_2 u}\right)^2 = -\frac{1}{\cos^2 u} + 8\sum (-1)^n \frac{nq^{2n}}{1-q^{2n}} \cos 2nu$$

$$= -\frac{1}{\cos^2 u} - 8\sum \frac{q^{2n}\cos 2u}{1+2q^{2n}\cos 2u + q^{4n}} - 16\sum \left(\frac{q^{2n}\sin 2u}{1+2q^{2n}\cos 2u + q^{4n}}\right)^2$$

$$\left(\frac{d}{du}\right)^2 \lg \vartheta_3 u = \frac{\vartheta_3'' u}{\vartheta_3 u} - \left(\frac{\vartheta_3' u}{\vartheta_3 u}\right)^2 = 8\sum (-1)^n \frac{nq^n}{1-q^{2n}} \cos 2nu$$

$$= -8\sum \frac{q^{2n-1}\cos 2u}{1+2q^{2n-1}\cos 2u + q^{4n-2}} - 16\sum \left(\frac{q^{2n-1}\sin 2u}{1+2q^{2n-1}\cos 2u + q^{4n-2}}\right)^2 \text{*)}$$

Lässt man hier u unendlich abnehmen, so wird

$$\frac{\vartheta''}{\vartheta} = 8\sum \frac{nq^n}{1-q^{2n}} = 8\sum \frac{q^{2n-1}}{(1-q^{2n-1})^2}$$

$$\frac{\vartheta_1'''}{\vartheta_1'} = -1 + 24\sum \frac{nq^{2n}}{1-q^{2n}} = -1 + 24\sum \frac{q^{2n}}{(1-q^{2n})^2}$$

$$\frac{\vartheta_2''}{\vartheta_2} = -1 + 8\sum (-1)^n \frac{nq^{2n}}{1-q^{2n}} = -1 - 8\sum \frac{q^{2n}}{(1+q^{2n})^2}$$

$$\frac{\vartheta_3''}{\vartheta_3} = 8\sum (-1)^n \frac{nq^n}{1-q^{2n}} = -8\sum \frac{q^{2n-1}}{(1+q^{2n-1})^2}$$

---

*) Durch nochmalige Differentiation würden sich die Gleichungen ergeben

$$\vartheta_1'\vartheta_1' \frac{\vartheta_1 u\, \vartheta_2 u\, \vartheta_3 u}{\vartheta^3 u} = 8\sum \frac{n^2 q^n}{1-q^{2n}} \sin 2nu$$

$$\vartheta_1'\vartheta_1' \frac{\vartheta u\, \vartheta_2 u\, \vartheta_3 u}{\vartheta_1^3 u} = \frac{\cos u}{\sin^3 u} - 8\sum \frac{n^2 q^{2n}}{1-q^{2n}} \sin 2nu$$

$$\vartheta_1'\vartheta_1' \frac{\vartheta u\, \vartheta_1 u\, \vartheta_3 u}{\vartheta_2^3 u} = \frac{\sin u}{\cos^3 u} - 8\sum (-1)^{n-1} \frac{n^2 q^{2n}}{1-q^{2n}} \sin 2nu$$

$$\vartheta_1'\vartheta_1' \frac{\vartheta u\, \vartheta_1 u\, \vartheta_2 u}{\vartheta_3^3 u} = 8\sum (-1)^{n-1} \frac{n^2 q^n}{1-q^{2n}} \sin 2nu$$

*) Die Substitution dieser Werthe in die Gleichungen des Art. 44, S. 148 liefert die gesuchten Ausdrücke:

$$\left(\vartheta_2\vartheta_3\frac{\vartheta_1 u}{\vartheta u}\right)^2 = 16\sum\frac{nq^n}{1-q^{2n}}\sin^2 nu$$

$$\left(\vartheta\vartheta_2\frac{\vartheta_2 u}{\vartheta u}\right)^2 = 16\sum(-1)^{n-1}\frac{nq^n}{1-q^{2n}}\sin^2 n(\tfrac{1}{2}\pi-u)$$
$$= \vartheta_2^4 - 16\sum\frac{nq^n}{1-q^{2n}}\sin^2 nu$$

$$\left(\vartheta\vartheta_3\frac{\vartheta_3 u}{\vartheta u}\right)^2 = 1+8\sum\frac{nq^n}{1-q^{2n}}[\cos 2nu-(-q)^n]$$
$$= \vartheta_3^4 - 16\sum\frac{nq^n}{1-q^{2n}}\sin^2 nu$$

$$\left(\vartheta_2\vartheta_3\frac{\vartheta u}{\vartheta_1 u}\right)^2 = \frac{1}{\sin^2 u}+8\sum\frac{nq^n}{1-q^{2n}}(1-q^n\cos 2nu)$$
$$= \frac{1}{\sin^2 u}+8\sum\left\{\frac{nq^n}{1-q^n}-\frac{2nq^{2n}}{1-q^{2n}}\cos^2 nu\right\}$$

$$\left(\vartheta\vartheta_3\frac{\vartheta_2 u}{\vartheta_1 u}\right)^2 = \cot^2 u+16\sum(-1)^n\frac{nq^{2n}}{1-q^{2n}}\sin^2 n(\tfrac{1}{2}\pi-u)$$
$$= \cot^2 u+16\sum\left\{\frac{2nq^{4n}}{1-q^{4n}}-\frac{nq^{2n}}{1-q^{2n}}\cos^2 nu\right\}$$

$$\left(\vartheta\vartheta_2\frac{\vartheta_3 u}{\vartheta_1 u}\right)^2 = \frac{1}{\sin^2 u}+8\sum(-1)^n\frac{nq^n}{1-q^{2n}}[1-(-q)^n\cos 2nu]$$
$$= \frac{1}{\sin^2 u}+8\sum\left\{(-1)^n\frac{nq^n}{1-(-q)^n}-\frac{2nq^{2n}}{1-q^{2n}}\cos^2 nu\right\}$$

$$\left(\vartheta\vartheta_2\frac{\vartheta u}{\vartheta_2 u}\right)^2 = \frac{1}{\cos^2 u}+8\sum(-1)^n\frac{nq^n}{1-q^{2n}}(1-q^n\cos 2nu)$$
$$= \vartheta^4+\mathrm{tg}^2 u+16\sum(-1)^{n-1}\frac{nq^{2n}}{1-q^{2n}}\sin^2 nu$$

---

*) folglich auch

$$\vartheta^4 = 1+8\sum(-1)^n\frac{nq^n}{1+q^n} = 1+8\sum(-1)^n\frac{q^n}{(1+q^n)^2}$$
$$\vartheta_2^4 = 16\sum\frac{(2n-1)q^{2n-1}}{1-q^{4n-2}} = 16\sum\frac{q^{2n-1}(1+q^{4n-2})}{(1-q^{4n-2})^2}$$
$$\vartheta_3^4 = 1+8\sum\frac{nq^n}{1+(-q)^n} = 1+8\sum\frac{q^n}{[1+(-q)^n]^2}$$

Vergl. auch *Leipziger Berichte* 1862, S. 114.

$$\left(\vartheta\vartheta_3\frac{\vartheta_1 u}{\vartheta_2 u}\right)^2 = \mathrm{tg}^2 u + 16\sum(-1)^n\frac{nq^{2n}}{1-q^{2n}}\sin^2 nu$$

$$\left(\vartheta_2\vartheta_3\frac{\vartheta_3 u}{\vartheta_2 u}\right)^2 = \frac{1}{\cos^2 u} + 8\sum\frac{nq^n}{1-q^{2n}}[1-(-q)^n\cos 2nu]$$

$$= \vartheta_3^4 + \mathrm{tg}^2 u + 16\sum(-1)^{n-1}\frac{nq^{2n}}{1-q^{2n}}\sin^2 nu$$

$$\left(\vartheta\vartheta_3\frac{\vartheta u}{\vartheta_3 u}\right)^2 = 1 + 8\sum(-1)^n\frac{nq^n}{1-q^{2n}}(\cos 2nu - q^n)$$

$$= \vartheta^4 + 16\sum(-1)^{n-1}\frac{nq^n}{1-q^{2n}}\sin^2 nu$$

$$\left(\vartheta\vartheta_2\frac{\vartheta_1 u}{\vartheta_3 u}\right)^2 = 16\sum(-1)^{n-1}\frac{nq^n}{1-q^{2n}}\sin^2 nu$$

$$\left(\vartheta_2\vartheta_3\frac{\vartheta_2 u}{\vartheta_3 u}\right)^2 = 16\sum\frac{nq^n}{1-q^{2n}}\sin^2 n(\tfrac{1}{2}\pi - u)$$

$$= \vartheta_2^4 + 16\sum(-1)^n\frac{nq^n}{1-q^{2n}}\sin^2 nu$$

Bildet man endlich die Gleichungen

$$\frac{\vartheta'' u}{\vartheta u} = -4q\frac{\partial \lg\vartheta u}{\partial q} = 8\sum\left\{\frac{nq^{2n}}{1-q^{2n}} + \frac{(2n-1)\,q^{2n-1}(\cos 2u - q^{2n-1})}{1-2q^{2n-1}\cos 2u + q^{4n-2}}\right\}$$

$$= 8\sum\frac{q^{2n}+q^n(1+q^{2n})\cos 2nu}{(1-q^{2n})^2} = 8\sum\frac{q^n}{1-q^{2n}}\left\{n - 2\frac{1+q^{2n}}{1-q^{2n}}\sin^2 nu\right\}$$

$$\frac{\vartheta_1'' u}{\vartheta_1 u} = -4q\frac{\partial \lg\vartheta_1 u}{\partial q} = -1 + 8\sum\left\{\frac{nq^{2n}}{1-q^{2n}} + \frac{2nq^{2n}(\cos 2u - q^{2n})}{1-2q^{2n}\cos 2u + q^{4n}}\right\}$$

$$= -1 + 8\sum\left(\frac{q^n}{1-q^{2n}}\right)^2(1+2\cos 2nu) = -1 - 8\sum\frac{q^{2n}}{(1-q^{2n})^2}(1-4\cos^2 nu)$$

$$\frac{\vartheta_2'' u}{\vartheta_2 u} = -4q\frac{\partial \lg\vartheta_2 u}{\partial q} = -1 + 8\sum\left\{\frac{nq^{2n}}{1-q^{2n}} - \frac{2nq^{2n}(\cos 2u + q^{2n})}{1+2q^{2n}\cos 2u + q^{4n}}\right\}$$

$$= -1 + 8\sum\left(\frac{q^n}{1-q^{2n}}\right)^2(1+2(-1)^n\cos 2nu) = -1 + 8\sum\frac{(-1)^n q^{2n}}{1-q^{2n}}\left\{n - \frac{4\sin^2 nu}{1-q^{2n}}\right\}$$

$$\frac{\vartheta_3'' u}{\vartheta_3 u} = -4q\frac{\partial \lg\vartheta_3 u}{\partial q} = 8\sum\left\{\frac{nq^{2n}}{1-q^{2n}} - \frac{(2n-1)\,q^{2n-1}(\cos 2u + q^{2n-1})}{1+2q^{2n-1}\cos 2u + q^{4n-2}}\right\}$$

$$= 8\sum\frac{q^{2n}+(-q)^n(1+q^{2n})\cos 2nu}{(1-q^{2n})^2} = 8\sum\frac{(-q)^n}{1-q^{2n}}\left\{n - 2\frac{1+q^{2n}}{1-q^{2n}}\sin^2 nu\right\}$$

so ergeben sich ohne Schwierigkeit die Quadrate der logarithmischen Differentialquotienten in der Form *)

$$\left(\frac{\vartheta' u}{\vartheta u}\right)^2 = 16\sum\left\{\frac{nq^n}{1-q^{2n}} - \frac{q^n(1+q^{2n})}{(1-q^{2n})^2}\right\}\sin^2 nu$$

$$\left(\frac{\vartheta_1' u}{\vartheta_1 u}\right)^2 = \cot^2 u + 16\sum\left\{\frac{2q^{2n}}{(1-q^{2n})^2} - \frac{nq^{2n}}{1-q^{2n}}\right\}\cos^2 nu$$

$$\left(\frac{\vartheta_2' u}{\vartheta_2 u}\right)^2 = \operatorname{tg}^2 u + 16\sum(-1)^n\left\{\frac{nq^{2n}}{1-q^{2n}} - \frac{2q^{2n}}{(1-q^{2n})^2}\right\}\sin^2 nu$$

$$\left(\frac{\vartheta_3' u}{\vartheta_3 u}\right)^2 = 16\sum(-1)^n\left\{\frac{nq^n}{1-q^{2n}} - \frac{q^n(1+q^{2n})}{(1-q^{2n})^2}\right\}\sin^2 nu$$

44d.

Da man die Entwickelung der Quotienten von Thetafunctionen und von Producten derselben in Partialbrüche und in trigonometrische Reihen, wie JACOBI gelehrt hat, auch direct vornehmen kann, so lassen sich umgekehrt auf diesem Wege die im Art. 33 angewandten Differentialausdrücke ohne Schwierigkeit ableiten. Auch bemerkt man leicht, dass a. a. O. die Relationen $\vartheta_2^2\vartheta^2 u = \vartheta_3^2\vartheta_1^2 u + \vartheta^2\vartheta_2^2 u$ u. s. w. selbst einfache Folgerungen jener Differentialformeln sind, wie z. B. durch Subtraction der Gleichungen

$$\frac{\vartheta_1' u}{\vartheta_1 u} - \frac{\vartheta_2' u}{\vartheta_2 u} = \vartheta_2^2\frac{\vartheta u\,\vartheta_3 u}{\vartheta_1 u\,\vartheta_2 u} \quad \text{und} \quad \frac{\vartheta' u}{\vartheta u} - \frac{\vartheta_2' u}{\vartheta_2 u} = \vartheta_3^2\frac{\vartheta_1 u\,\vartheta_3 u}{\vartheta u\,\vartheta_2 u}$$

erhellt, wodurch der Werth von $\frac{\vartheta_1' u}{\vartheta_1 u} - \frac{\vartheta' u}{\vartheta u}$ hervorgeht.

In einem an HERMITE gerichteten Briefe vom 6. Aug. 1845 bemerkt JACOBI **), dass er die Zerlegung von $\frac{\Theta(x+a)}{\Theta(x)}$ in Partialbrüche in seinen Vorlesungen behandelt und auf die inverse Transformation und die Division der elliptischen Functionen angewandt habe. In

*) Vergl. § 85 des reichhaltigen Werkes von SCHELLBACH über elliptische Integrale und Thetafunctionen, wobei bemerkt werden mag, dass die Formeln 2) und 3) nicht ganz genau zu sein scheinen.

**) Werke Bd. I, S. 357, auch CRELLE's Journal Bd. 32, S. 176, so wie LIOUVILLE's Journal, Bd. 11, S. 97.

seinem Schreiben an die Pariser Akademie vom 30. Juli 1849 *) kommt er auf die betreffenden Entwickelungen zurück und führt eine Anzahl darauf bezüglicher Ausdrücke an. Ihrer häufigen Anwendbarkeit halber stellen wir die Fundamentalformeln der erwähnten Zerlegung im Folgenden zusammen**).

Sei $\omega = e^{2ui}$, $\zeta = e^{2vi}$, so erhält man auf elementarem Wege

$$\frac{\vartheta_1(u+v)}{\vartheta_1 u} = \frac{1}{\sqrt{\zeta}} \lim_{p=\infty} \frac{1-\zeta\omega \cdot 1-q^2\zeta\omega \cdots 1-q^{2p-2}\zeta\omega \cdot \omega - \frac{q^2}{\zeta}\cdot\omega - \frac{q^4}{\zeta}\cdots\omega-\frac{q^{2p}}{\zeta}}{1-\omega\cdot 1-q^2\omega \cdots 1-q^{2p}\omega\cdot\omega-q^2\cdot\omega-q^4\cdots\omega-q^{2p}}$$

$$= \lim \sum_{n=-p}^{p} \frac{a_{n,p}}{1-q^{2n}\omega} = \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{a_n}{1-q^{2n}\omega}$$

$$a_n = \frac{2\vartheta_1 v}{i\vartheta_1'}\zeta^{-n}$$

folglich der Symmetrie halber

$$\frac{\vartheta_1'\vartheta_1(u+v)}{\vartheta_1 u\,\vartheta_1 v} = -2i\sum_{-\infty}^{\infty}\frac{\zeta^n}{1-q^{2n}\omega} = -2i\sum_{-\infty}^{\infty}\frac{\omega^n}{1-q^{2n}\zeta}$$

Zur Convergenz wird erfordert, beim ersten Ausdruck, dass mod ζ und beim zweiten, dass mod ω zwischen q^2 und 1 enthalten seien. Durch Umkehr der Vorzeichen von u und v erhält man für das Intervall von 1 bis $\frac{1}{q^2}$

$$\frac{\vartheta_1'\vartheta_1(u+v)}{\vartheta_1 u\,\vartheta_1 v} = 2i\sum_{-\infty}^{\infty}\frac{\zeta^{-n}}{1-\frac{q^{2n}}{\omega}} = 2i\sum_{-\infty}^{\infty}\frac{\omega^{-n}}{1-\frac{q^{2n}}{\zeta}}$$

Man bildet damit***) die für das ganze Intervall zwischen q^2 und $\frac{1}{q^2}$ geltenden Ausdrücke, in denen u und v reell sein dürfen:

---

*) *Comptes rendus* Bd. 29, S. 97, so wie die Abhandlung über die Rotation im 2. Bd. der Werke, S. 144 und in Crelle's Journal Bd. 39, S. 197.

**) Vergl. Schellbach a. a. O. § 66 und § 72, wo für $\nu = \lg\frac{1}{q}$

$$\frac{\vartheta_1'\vartheta_1(x+y)}{\vartheta_1 x\,\vartheta_1 y} = \sum_{-\infty}^{\infty}\frac{q^s e^{(x+2sy)i}}{\sin(x+s\nu i)}$$

geschrieben ist.

***) indem man die Summe auf die Form bringt

$$-\frac{2i}{1-\omega} - 2i\sum_{1}^{\infty}\zeta^n - 2i\sum_{1}^{\infty}q^{2n}\left\{\frac{\zeta^n\omega}{1-q^{2n}\omega} - \frac{\zeta^{-n}\omega^{-1}}{1-\frac{q^{2n}}{\omega}}\right\}$$

$$\frac{\vartheta_1'\vartheta_1(u+v)}{\vartheta_1 u\,\vartheta_1 v} = \frac{1}{\operatorname{tg}u} + \frac{1}{\operatorname{tg}v} + 4\sum_1^\infty q^{2n}\frac{\sin 2(u+nv) - q^{2n}\sin 2nv}{1-2q^{2n}\cos 2u + q^{4n}} \qquad q^2 < \zeta < \frac{1}{q^2}$$

$$= \frac{1}{\operatorname{tg}u} + \frac{1}{\operatorname{tg}v} + 4\sum_1^\infty q^{2n}\frac{\sin 2(nu+v) - q^{2n}\sin 2nu}{1-2q^{2n}\cos 2v + q^{4n}} \qquad q^2 < \omega < \frac{1}{q^2}$$

Die übrigen Formeln der nachstehenden Tabelle ergeben sich bequem, wenn man die Argumente u und v um $\frac{1}{2}\pi$ oder um $\pm\frac{i}{2}\lg\frac{1}{q}$ ändert. Im letzteren Falle erhalten ω oder ζ den Factor (resp. Divisor) q und es gehen über*)

$$\vartheta u \text{ in } \frac{i\vartheta_1 u}{q^{\frac14}\sqrt{\omega}} \text{ resp. } \frac{\vartheta_1 u\sqrt{\omega}}{q^{\frac14} i}, \qquad \vartheta_2 u \text{ in } \frac{\vartheta_3 u}{q^{\frac14}\sqrt{\omega}} \text{ resp. } \frac{\vartheta_3 u\sqrt{\omega}}{q^{\frac14}}$$

$$\vartheta_1 u \text{ in } \frac{i\vartheta u}{q^{\frac14}\sqrt{\omega}} \text{ resp. } \frac{\vartheta u\sqrt{\omega}}{q^{\frac14} i}, \qquad \vartheta_3 u \text{ in } \frac{\vartheta_2 u}{q^{\frac14}\sqrt{\omega}} \text{ resp. } \frac{\vartheta_2 u\sqrt{\omega}}{q^{\frac14}}$$

$$\frac{\vartheta_1'\vartheta(u+v)}{\vartheta u\,\vartheta_1 v} = -2i\sum_{-\infty}^{\infty}\frac{\zeta^{n-\frac12}}{1-q^{2n-1}\omega} \qquad q^2 < \zeta < 1$$

$$= \frac{1}{\sin v} + 4\sum_1^\infty q^{2n-1}\frac{\sin(2u+\overline{2n-1}\,v) - q^{2n-1}\sin(2n-1)v}{1-2q^{2n-1}\cos 2u + q^{4n-2}} \qquad q^2 < \zeta < \frac{1}{q^2}$$

$$\frac{\vartheta_1'\vartheta(u+v)}{\vartheta_1 u\,\vartheta v} = -2i\sqrt{\omega}\sum_{-\infty}^{\infty}\frac{q^n\zeta^n}{1-q^{2n}\omega}$$

$$= \frac{1}{\sin u} + 4\sum_1^\infty q^n\frac{\sin(2nv+u) - q^{2n}\sin(2nv-u)}{1-2q^{2n}\cos 2u + q^{4n}} \qquad \Bigg\} q < \zeta < \frac{1}{q}$$

$$\frac{\vartheta_1'\vartheta(u+v)}{\vartheta_2 u\,\vartheta_3 v} = 2\sqrt{\omega}\sum_{-\infty}^{\infty}\frac{(-1)^n q^n\zeta^n}{1+q^{2n}\omega}$$

$$= \frac{1}{\cos u} + 4\sum_1^\infty(-1)^n q^n\frac{\cos(2nv+u) + q^{2n}\cos(2nv-u)}{1+2q^{2n}\cos 2u + q^{4n}} \qquad \Bigg\} q < \zeta < \frac{1}{q}$$

$$\frac{\vartheta_1'\vartheta(u+v)}{\vartheta_3 u\,\vartheta_2 v} = -2\sum_{-\infty}^{\infty}\frac{(-1)^n\zeta^{n-\frac12}}{1+q^{2n-1}\omega} \qquad q^2 < \zeta < 1$$

$$= \frac{1}{\cos v} + 4\sum_1^\infty(-1)^n q^{2n-1}\frac{\cos(2u+\overline{2n-1}\,v) + q^{2n-1}\cos(2n-1)v}{1+2q^{2n-1}\cos 2u + q^{4n-2}} \qquad q^2 < \zeta < \frac{1}{q^2}$$

$$\frac{\vartheta_1'\vartheta_1(u+v)}{\vartheta u\,\vartheta v} = -2i\sqrt{\omega}\sum_{-\infty}^{\infty}\frac{q^{n-\frac12}\zeta^{n-\frac12}}{1-q^{2n-1}\omega}$$

$$= 4\sum_1^\infty q^{n-\frac12}\frac{\sin(\overline{2n-1}\,v+u) - q^{2n-1}\sin(\overline{2n-1}\,v-u)}{1-2q^{2n-1}\cos 2u + q^{4n-2}} \qquad \Bigg\} q < \zeta < \frac{1}{q}$$

---

*) JACOBI in CRELLE's Journal, Bd. 3, S. 104.

$$\frac{\vartheta_1'\vartheta_1(u+v)}{\vartheta_1 u\,\vartheta_1 v} = -2i\sum_{-\infty}^{\infty}\frac{\zeta^n}{1-q^{2n}\omega} \qquad q^2<\zeta<1$$

$$= \cot u + \cot v + 4\sum_{1}^{\infty} q^{2n}\frac{\sin 2(u+nv) - q^{2n}\sin 2nv}{1-2q^{2n}\cos 2u + q^{4n}} \qquad q^2<\zeta<\frac{1}{q^2}$$

$$\frac{\vartheta_1'\vartheta_1(u+v)}{\vartheta_2 u\,\vartheta_2 v} = 2i\sum_{-\infty}^{\infty}\frac{(-1)^n\zeta^n}{1+q^{2n}\omega} \qquad q^2<\zeta<1$$

$$= \operatorname{tg}u + \operatorname{tg}v + 4\sum_{1}^{\infty}(-1)^n q^{2n}\frac{\sin 2(u+nv) + q^{2n}\sin 2nv}{1+2q^{2n}\cos 2u + q^{4n}} \qquad q^2<\zeta<\frac{1}{q^2}$$

$$\frac{\vartheta_1'\vartheta_1(u+v)}{\vartheta_3 u\,\vartheta_3 v} = 2i\sqrt{\omega}\sum_{-\infty}^{\infty}\frac{(-1)^n q^{n-\frac{1}{2}}\zeta^{n-\frac{1}{2}}}{1+q^{2n-1}\omega}$$

$$= 4\sum_{1}^{\infty}(-1)^{n-1} q^{n-\frac{1}{2}}\frac{\sin(\overline{2n-1}\,v+u) + q^{2n-1}\sin(\overline{2n-1}\,v-u)}{1+2q^{2n-1}\cos 2u + q^{4n-2}} \qquad \left.\right\} q<\zeta<\frac{1}{q}$$

$$\frac{\vartheta_1'\vartheta_2(u+v)}{\vartheta u\,\vartheta_3 v} = -2\sqrt{\omega}\sum_{-\infty}^{\infty}\frac{(-1)^n q^{n-\frac{1}{2}}\zeta^{n-\frac{1}{2}}}{1-q^{2n-1}\omega}$$

$$= 4\sum_{1}^{\infty}(-1)^{n-1} q^{n-\frac{1}{2}}\frac{\cos(\overline{2n-1}\,v+u) - q^{2n-1}\cos(\overline{2n-1}\,v-u)}{1-2q^{2n-1}\cos 2u + q^{4n-2}} \qquad \left.\right\} q<\zeta<\frac{1}{q}$$

$$\frac{\vartheta_1'\vartheta_2(u+v)}{\vartheta_1 u\,\vartheta_2 v} = -2i\sum_{-\infty}^{\infty}\frac{(-1)^n\zeta^n}{1-q^{2n}\omega} \qquad q^2<\zeta<1$$

$$= \cot u - \operatorname{tg}v + 4\sum_{1}^{\infty}(-1)^n q^{2n}\frac{\sin 2(u+nv) - q^{2n}\sin 2nv}{1-2q^{2n}\cos 2u + q^{4n}} \qquad q^2<\zeta<\frac{1}{q^2}$$

$$\frac{\vartheta_1'\vartheta_2(u+v)}{\vartheta_2 u\,\vartheta_1 v} = -2i\sum_{-\infty}^{\infty}\frac{\zeta^n}{1+q^{2n}\omega} \qquad q^2<\zeta<1$$

$$= -\operatorname{tg}u + \cot v - 4\sum_{1}^{\infty} q^{2n}\frac{\sin 2(u+nv) + q^{2n}\sin 2nv}{1+2q^{2n}\cos 2u + q^{4n}} \qquad q^2<\zeta<\frac{1}{q^2}$$

$$\frac{\vartheta_1'\vartheta_2(u+v)}{\vartheta_3 u\,\vartheta v} = 2\sqrt{\omega}\sum_{-\infty}^{\infty}\frac{q^{n-\frac{1}{2}}\zeta^{n-\frac{1}{2}}}{1+q^{2n-1}\omega}$$

$$= 4\sum_{1}^{\infty} q^{n-\frac{1}{2}}\frac{\cos(\overline{2n-1}\,v+u) + q^{2n-1}\cos(\overline{2n-1}\,v-u)}{1+2q^{2n-1}\cos 2u + q^{4n-2}} \qquad \left.\right\} q<\zeta<\frac{1}{q}$$

$$\frac{\vartheta_1'\vartheta_3(u+v)}{\vartheta u\,\vartheta_2 v} = -2\sum_{-\infty}^{\infty}\frac{(-1)^n\zeta^{n-\frac{1}{2}}}{1-q^{2n-1}\omega} \qquad q^2<\zeta<1$$

$$= \frac{1}{\cos v} + 4\sum_{1}^{\infty}(-1)^{n-1} q^{2n-1}\frac{\cos(2u+\overline{2n-1}\,v) - q^{2n-1}\cos(2n-1)v}{1-2q^{2n-1}\cos 2u + q^{4n-2}} \qquad q^2<\zeta<\frac{1}{q^2}$$

$$\frac{\vartheta_1'\vartheta_3(u+v)}{\vartheta_1 u\,\vartheta_3 v} = -2i\sqrt{\omega}\sum_{-\infty}^{\infty}\frac{(-1)^n q^n\zeta^n}{1-q^{2n}\omega}$$

$$= \frac{1}{\sin u} + 4\sum_{1}^{\infty}(-1)^n q^n\frac{\sin(2nv+u) - q^{2n}\sin(2nv-u)}{1-2q^{2n}\cos 2u + q^{4n}} \qquad \left.\right\} q<\zeta<\frac{1}{q}$$

$$\left.\begin{aligned}\frac{\vartheta_1'\vartheta_3(u+v)}{\vartheta_2 u\,\vartheta v} &= 2\sqrt{\omega}\sum_{-\infty}^{\infty}\frac{q^n\zeta^n}{1+q^{2n}\omega}\\ &= \frac{1}{\cos u}+4\sum_{1}^{\infty}q^n\frac{\cos(2nv+u)+q^{2n}\cos(2nv-u)}{1+2q^{2n}\cos 2u+q^{4n}}\end{aligned}\right\}\quad q<\zeta<\frac{1}{q}$$

$$\frac{\vartheta_1'\vartheta_3(u+v)}{\vartheta_3 u\,\vartheta_1 v} = -2i\sum_{-\infty}^{\infty}\frac{\zeta^{n-\frac{1}{2}}}{1+q^{2n-1}\omega}\qquad q^2<\zeta<1$$

$$= \frac{1}{\sin v}-4\sum_{1}^{\infty}q^{2n-1}\frac{\sin(2u+\overline{2n-1}\,v)+q^{2n-1}\sin(2n-1)v}{1+2q^{2n-1}\cos 2u+q^{4n-2}}\qquad q^2<\zeta<\frac{1}{q^2}$$

Zu bemerken ist, dass die beigeschriebenen Convergenzbedingungen sich auf die Moduln der Grössen ζ und q beziehen. Es ist wohl nicht nöthig, die analogen 16 Formeln, welche sich für die nämlichen Quotienten durch Vertauschung von u und v resp. ω und ζ ergeben, ausführlich hinzuschreiben. Uebrigens sieht man leicht, dass diese Vertauschung, mit Bezug auf die Ausdrücke des Art. 44[a], dem Uebergang von den Partialbrüchen zu den trigonometrischen Reihen entspricht.

44[e].

Um schliesslich ein Beispiel der Transformationen zu geben, deren die Entwickelungen des vorstehenden Artikels fähig sind, betrachten wir die Gleichung

$$\frac{\vartheta_1'\vartheta_1(u+v)}{\vartheta_1 u\,\vartheta_1 v} = \frac{2}{i}\sum_{-\infty}^{\infty}\frac{\zeta^n}{1-q^{2n}\omega}$$

und trennen zunächst auf der rechten Seite die Glieder, welche ungeraden und geraden Werthen von n entsprechen. Dadurch erhält man

$$\frac{\vartheta_1'\vartheta_1(u+v)}{\vartheta_1 u\,\vartheta_1 v} = \frac{\vartheta_1'(q^2)}{\vartheta_1(2v,q^2)}\left\{\frac{\vartheta(u+2v,q^2)}{\vartheta(u,q^2)}+\frac{\vartheta_1(u+2v,q^2)}{\vartheta_1(u,q^2)}\right\}$$

$$= \frac{\vartheta_1'(q^2)\,\vartheta(u+2v,q^2)}{\vartheta(u,q^2)\,\vartheta_1(2v,q^2)}+\frac{\vartheta_1'(q^4)\,\vartheta(u+4v,q^4)}{\vartheta(u,q^4)\,\vartheta_1(4v,q^4)}+\frac{\vartheta_1'(q^4)\,\vartheta_1(u+4v,q^4)}{\vartheta_1(u,q^4)\,\vartheta_1(4v,q^4)}$$

und bei unbegrenzter Wiederholung derselben Operation

$$\frac{\vartheta_1'(q)\,\vartheta_1(u+v,q)}{\vartheta_1(u,q)\,\vartheta_1(v,q)} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\vartheta_1'(q^p)\,\vartheta(u+pv,q^p)}{\vartheta(u,q^p)\,\vartheta_1(pv,q^p)}$$

wo $p=2^n$ die Potenzen von 2 durchläuft.

Ferner setzen wir*)

$$n = mn' + \mu$$

wo m eine beliebige ganze Zahl bedeuten soll. Damit n allen Zahlen zwischen $\pm\infty$ gleich werde, muss n' dieselben Werthe annehmen, während μ ein vollständiges System incongruenter Zahlen nach dem Modul m zu durchlaufen hat. Dadurch geht die Doppelsumme hervor

$$\frac{\vartheta_1'\vartheta_1(u+v)}{\vartheta_1 u\,\vartheta_1 v} = \frac{2}{i}\overset{\mathrm{mod}\,m}{\underset{\mu}{S}}\zeta^\mu \sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{\zeta^{mn}}{1-q^{2mn+2\mu}\omega}$$

Da ω den Factor $q^{2\mu}$ erhält, wenn u um $\mu i \lg\frac{1}{q}$ geändert wird, so folgt

$$1)\qquad \frac{\vartheta_1'\vartheta_1(u+v)}{\vartheta_1 u\,\vartheta_1 v} = \overset{\mathrm{mod}\,m}{\underset{\mu}{S}}\zeta^\mu\frac{\vartheta_1'(q^m)\,\vartheta_1(u+mv-\mu i\lg q, q^m)}{\vartheta_1(u-\mu i\lg q, q^m)\,\vartheta_1(mv, q^m)}$$

Lässt man jetzt ζ in $\alpha\zeta$ übergehen, wo $\alpha = e^{\frac{2\nu\pi i}{m}}$ eine $m$te Wurzel der Einheit bedeutet, so wächst v um $\frac{\nu\pi}{m}$ und es wird

$$\frac{\vartheta_1'\vartheta_1\left(u+v+\frac{\nu\pi}{m}\right)}{\vartheta_1 u\,\vartheta_1\left(v+\frac{\nu\pi}{m}\right)} = \overset{\mathrm{mod}\,m}{\underset{\mu}{S}}\alpha^\mu\zeta^\mu\frac{\vartheta_1'(q^m)\,\vartheta_1(u+mv-\mu i\lg q, q^m)}{\vartheta_1(u-\mu i\lg q, q^m)\,\vartheta_1(mv, q^m)}$$

Summirt man hier in Bezug auf die verschiedenen Wurzelwerthe von α, oder was dasselbe ist, lässt man auch ν ein Zahlensystem nach dem Modul m durchlaufen, so folgt, da $\underset{\alpha}{S}\alpha^\mu$ verschwindet, wofern nicht $\mu \equiv 0 \mod m$,

$$2)\qquad \overset{\mathrm{mod}\,m}{\underset{\nu}{S}}\frac{\vartheta_1'\vartheta_1\left(u+v+\frac{\nu\pi}{m}\right)}{\vartheta_1 u\,\vartheta_1\left(v+\frac{\nu\pi}{m}\right)} = m\frac{\vartheta_1'(q^m)\,\vartheta_1(u+mv, q^m)}{\vartheta_1(u, q^m)\,\vartheta_1(mv, q^m)}$$

Ersetzt man endlich q durch $q^{\frac{1}{m}}$, v durch $\frac{v}{m}$, so ergibt sich

$$3)\qquad \frac{\vartheta_1'\vartheta_1(u+v)}{\vartheta_1 u\,\vartheta_1 v} = \frac{1}{m}\overset{\mathrm{mod}\,m}{\underset{\nu}{S}}\frac{\vartheta_1'(q^{\frac{1}{m}})\,\vartheta_1\left(u+\frac{v+\nu\pi}{m}, q^{\frac{1}{m}}\right)}{\vartheta_1(u, q^{\frac{1}{m}})\,\vartheta_1\left(\frac{v+\nu\pi}{m}, q^{\frac{1}{m}}\right)}$$

Durch Verbindung dieser Gleichung mit 1), nachdem daselbst u und v vertauscht worden sind, erhält man die Doppelsumme

*) Vergl. Leipziger Berichte, 1862, S. 131.

$$\frac{\vartheta_1(u+v)}{\vartheta_1 u\,\vartheta_1 v} = \frac{1}{m}\overset{\mathrm{mod}\,m}{\underset{\mu,\nu}{S}}\omega^\mu \frac{\vartheta_1\left(mu+\frac{v+\nu\pi-\mu i\lg q}{m}\right)}{\vartheta_1(mu)\,\vartheta_1\left(\frac{v+\nu\pi-\mu i\lg q}{m}\right)} \qquad 4)$$

wo das Argument q auf beiden Seiten unverändert geblieben ist. Allgemeiner sind die Ausdrücke

$$\frac{\vartheta_1'\vartheta_1(u+v)}{\vartheta_1 u\,\vartheta_1 v} = \frac{1}{n}\overset{m}{\underset{\mu}{S}}\overset{n}{\underset{\nu}{S}}\omega^\mu \frac{\vartheta_1(q^{\frac{m}{n}})\,\vartheta_1\left(mu+\frac{v+\nu\pi-\mu i\lg q}{n}, q^{\frac{m}{n}}\right)}{\vartheta_1(mu, q^{\frac{m}{n}})\,\vartheta_1\left(\frac{v+\nu\pi-\mu i\lg q}{n}, q^{\frac{m}{n}}\right)}$$

$$= \frac{1}{n}\overset{m}{\underset{\mu}{S}}\overset{n}{\underset{\nu}{S}}\zeta^\mu \frac{\vartheta_1(q^{\frac{m}{n}})\,\vartheta_1\left(u+\frac{mv+\nu\pi}{n}-\mu i\lg q, q^{\frac{m}{n}}\right)}{\vartheta_1(u-\mu i\lg q, q^{\frac{m}{n}})\,\vartheta_1\left(\frac{mv+\nu\pi}{n}, q^{\frac{m}{n}}\right)}$$

In letzterem wird vorausgesetzt, dass m und n keinen gemeinschaftlichen Theiler haben. Analogen Transformationen sind auch die übrigen der sechszehn Quotienten des vorigen Artikels unterworfen.

44f.

Bei dieser Gelegenheit mögen noch folgende Ausdrücke für die bei den Integralen der zweiten und dritten Gattung auftretenden Thetafunctionen Erwähnung finden:

$$\frac{\vartheta' u}{\vartheta u} - \frac{\vartheta' v}{\vartheta v} = \frac{2}{i}\sum_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{1-q^{2n-1}\omega} - \frac{1}{1-q^{2n-1}\zeta}\right) = 2i\sum_{-\infty}^{\infty}\frac{q^{2n-1}(\zeta-\omega)}{(1-q^{2n-1}\omega)(1-q^{2n-1}\zeta)}$$

$$\frac{\vartheta_1' u}{\vartheta_1 u} - \frac{\vartheta_1' v}{\vartheta_1 v} = \frac{2}{i}\sum\left(\frac{1}{1-q^{2n}\omega} - \frac{1}{1-q^{2n}\zeta}\right) = 2i\sum\frac{q^{2n}(\zeta-\omega)}{(1-q^{2n}\omega)(1-q^{2n}\zeta)}$$

$$\frac{\vartheta_2' u}{\vartheta_2 u} - \frac{\vartheta_2' v}{\vartheta_2 v} = \frac{2}{i}\sum\left(\frac{1}{1+q^{2n}\omega} - \frac{1}{1+q^{2n}\zeta}\right) = 2i\sum\frac{q^{2n}(\omega-\zeta)}{(1+q^{2n}\omega)(1+q^{2n}\zeta)}$$

$$\frac{\vartheta_3' u}{\vartheta_3 u} - \frac{\vartheta_3' v}{\vartheta_3 v} = \frac{2}{i}\sum\left(\frac{1}{1+q^{2n-1}\omega} - \frac{1}{1+q^{2n-1}\zeta}\right) = 2i\sum\frac{q^{2n-1}(\omega-\zeta)}{(1+q^{2n-1}\omega)(1+q^{2n-1}\zeta)}$$

woraus für $u+v=0$ oder $\zeta\omega = 1$

$$\frac{\vartheta' u}{\vartheta u} = \frac{1}{i}\sum_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{1-q^{2n-1}\omega} - \frac{1}{1-\frac{q^{2n-1}}{\omega}}\right) = \frac{1}{i}\lim_{m=\infty}\sum_{-m}^{m+1}\frac{1+q^{2n-1}\omega}{1-q^{2n-1}\omega}$$

$$\frac{\vartheta_1' u}{\vartheta_1 u} = \frac{1}{i}\sum\left(\frac{1}{1-q^{2n}\omega} - \frac{1}{1-\frac{q^{2n}}{\omega}}\right) = \frac{1}{i}\lim\sum_{-m}^{m}\frac{1+q^{2n}\omega}{1-q^{2n}\omega}$$

$$\frac{\vartheta_2' u}{\vartheta_2 u} = \frac{1}{i}\sum\left(\frac{1}{1+q^{2n}\omega} - \frac{1}{1+\frac{q^{2n}}{\omega}}\right) = \frac{1}{i}\lim\sum_{-m}^{m}\frac{1-q^{2n}\omega}{1+q^{2n}\omega}$$

$$\frac{\vartheta_3' u}{\vartheta_3 u} = \frac{1}{i}\sum\left(\frac{1}{1+q^{2n-1}\omega} - \frac{1}{1+\frac{q^{2n-1}}{\omega}}\right) = \frac{1}{i}\lim\sum_{-m}^{m+1}\frac{1-q^{2n-1}\omega}{1+q^{2n-1}\omega}$$

und wenn man nach den Potenzen von ω entwickelt

$$\frac{\vartheta' u}{\vartheta u} = \frac{2}{i}\sum_1^\infty \frac{q^n}{1-q^{2n}}\left(\omega^n - \frac{1}{\omega^n}\right) \qquad q < \omega < \frac{1}{q}$$

$$\frac{\vartheta_1' u}{\vartheta_1 u} = \frac{1}{i}\frac{1+\omega}{1-\omega} + \frac{2}{i}\sum \frac{q^{2n}}{1-q^{2n}}\left(\omega^n - \frac{1}{\omega^n}\right) \qquad q^2 < \omega < \frac{1}{q^2}$$

$$= \frac{1}{i} + \frac{2}{i}\sum\frac{\omega^n - q^{2n}\omega^{-n}}{1-q^{2n}} \qquad q^2 < \omega < 1$$

$$\frac{\vartheta_2' u}{\vartheta_2 u} = \frac{1}{i}\frac{1-\omega}{1+\omega} + \frac{2}{i}\sum \frac{(-1)^n q^{2n}}{1-q^{2n}}\left(\omega^n - \frac{1}{\omega^n}\right) \qquad q^2 < \omega < \frac{1}{q^2}$$

$$= \frac{1}{i} + \frac{2}{i}\sum(-1)^n\frac{\omega^n - q^{2n}\omega^{-n}}{1-q^{2n}} \qquad q^2 < \omega < 1$$

$$\frac{\vartheta_3' u}{\vartheta_3 u} = \frac{2}{i}\sum \frac{(-1)^n q^n}{1-q^{2n}}\left(\omega^n - \frac{1}{\omega^n}\right) \qquad q < \omega < \frac{1}{q}$$

Für die Integrale dritter Gattung endlich wird

$(\zeta = e^{2vi})$ $(\omega = e^{2ui})$ $(\zeta = e^{-2v})$

$$\lg\frac{\vartheta(v+u)}{\vartheta(v-u)} = \sum_1^\infty \log\frac{1-q^{2n-1}\omega\zeta}{1-q^{2n-1}\frac{\zeta}{\omega}}\cdot\frac{1-\frac{q^{2n-1}}{\omega\zeta}}{1-q^{2n-1}\frac{\omega}{\zeta}} = -\lg\frac{\theta(v+ui)}{\theta(v-ui)}$$

$$\lg\frac{\vartheta_1(v+u)}{\vartheta_1(v-u)} = \lg\frac{1-\omega\zeta}{\omega-\zeta} + \sum\lg\frac{1-q^{2n}\omega\zeta}{1-q^{2n}\frac{\zeta}{\omega}}\cdot\frac{1-\frac{q^{2n}}{\omega\zeta}}{1-q^{2n}\frac{\omega}{\zeta}} = -\lg\frac{\theta_1(v+ui)}{\theta_1(v-ui)}$$

$$\lg\frac{\vartheta_2(v+u)}{\vartheta_2(v-u)} = \lg\frac{1+\omega\zeta}{\omega+\zeta} + \sum\lg\frac{1+q^{2n}\omega\zeta}{1+q^{2n}\frac{\zeta}{\omega}}\cdot\frac{1+\frac{q^{2n}}{\omega\zeta}}{1+q^{2n}\frac{\omega}{\zeta}} = -\lg\frac{\theta_2(v+ui)}{\theta_2(v-ui)}$$

$$\lg\frac{\vartheta_3(v+u)}{\vartheta_3(v-u)} = \sum\log\frac{1+q^{2n-1}\omega\zeta}{1+q^{2n-1}\frac{\zeta}{\omega}}\cdot\frac{1+\frac{q^{2n-1}}{\omega\zeta}}{1+q^{2n-1}\frac{\omega}{\zeta}} = -\lg\frac{\theta_3(v+ui)}{\theta_3(v-ui)}$$

wo in den Functionen ϑ $\zeta = e^{2vi}$, in den θ $\zeta = e^{-2v}$ gesetzt werden muss. Damit erhält man ohne Schwierigkeit

$$\lg\frac{\vartheta(v+u)}{\vartheta(v-u)} = \sum_1^\infty \lg\left(1+\frac{4q^{2n-1}\sin 2u\sin 2v}{1-2q^{2n-1}\cos 2(u-v)+q^{4n-2}}\right)$$

$$\lg\frac{\vartheta_1(v+u)}{\vartheta_1(v-u)} = \lg\frac{\sin(v+u)}{\sin(v-u)}+\sum\lg\left(1+\frac{4q^{2n}\sin 2u\sin 2v}{1-2q^{2n}\cos 2(u-v)+q^{4n}}\right)$$

$$\lg\frac{\vartheta_2(v+u)}{\vartheta_2(v-u)} = \lg\frac{\cos(v+u)}{\cos(v-u)}+\sum\lg\left(1-\frac{4q^{2n}\sin 2u\sin 2v}{1+2q^{2n}\cos 2(u-v)+q^{4n}}\right)$$

$$\lg\frac{\vartheta_3(v+u)}{\vartheta_3(v-u)} = \sum\lg\left(1-\frac{4q^{2n-1}\sin 2u\sin 2v}{1+2q^{2n-1}\cos 2(u-v)+q^{4n-2}}\right)$$

$$\frac{1}{2i}\lg\frac{\theta(v+ui)}{\theta(v-ui)} = \sum_1^\infty \operatorname{arc\,tg}\frac{q^{2n-1}e^{-2v}\sin 2u}{1-q^{2n-1}e^{-2v}\cos 2u}-\sum_1^\infty \operatorname{arc\,tg}\frac{q^{2n-1}e^{2v}\sin 2u}{1-q^{2n-1}e^{2v}\cos 2u}$$

$$= -\sum_1^\infty \operatorname{arc\,tg}\frac{q^{2n-1}(e^{2v}-e^{-2v})\sin 2u}{1-q^{2n-1}(e^{2v}+e^{-2v})\cos 2u+q^{4n-2}}$$

$$\frac{1}{2i}\lg\frac{\theta_1(v+ui)}{\theta_1(v-ui)} = u+\sum_0^\infty \operatorname{arc\,tg}\frac{q^{2n}e^{-2v}\sin 2u}{1-q^{2n}e^{-2v}\cos 2u}-\sum_1^\infty \operatorname{arc\,tg}\frac{q^{2n}e^{2v}\sin 2u}{1-q^{2n}e^{2v}\cos 2u}$$

$$\frac{1}{2i}\lg\frac{\theta_2(v+ui)}{\theta_2(v-ui)} = u-\sum_0^\infty \operatorname{arc\,tg}\frac{q^{2n}e^{-2v}\sin 2u}{1+q^{2n}e^{-2v}\cos 2u}+\sum_1^\infty \operatorname{arc\,tg}\frac{q^{2n}e^{2v}\sin 2u}{1+q^{2n}e^{2v}\cos 2u}$$

$$\frac{1}{2i}\lg\frac{\theta_3(v+ui)}{\theta_3(v-ui)} = -\sum_1^\infty \operatorname{arc\,tg}\frac{q^{2n-1}e^{-2v}\sin 2u}{1+q^{2n-1}e^{-2v}\cos 2u}+\sum_1^\infty \operatorname{arc\,tg}\frac{q^{2n-1}e^{2v}\sin 2u}{1+q^{2n-1}e^{2v}\cos 2u}$$

nebst den trigonometrischen Reihen

$$\lg\frac{\vartheta(v+u)}{\vartheta(v-u)} = 4\sum_1^\infty\frac{q^n}{1-q^{2n}}\cdot\frac{\sin 2nv}{n}\sin 2nu$$

$$\lg\frac{\vartheta_1(v+u)}{\vartheta_1(v-u)} = \lg\frac{\sin(v+u)}{\sin(v-u)}+4\sum\frac{q^{2n}}{1-q^{2n}}\cdot\frac{\sin 2nv}{n}\sin 2nu$$

$$\lg\frac{\vartheta_2(v+u)}{\vartheta_2(v-u)} = \lg\frac{\cos(v+u)}{\cos(v-u)}+4\sum\frac{(-1)^n q^{2n}}{1-q^{2n}}\cdot\frac{\sin 2nv}{n}\sin 2nu$$

$$\lg\frac{\vartheta_3(v+u)}{\vartheta_3(v-u)} = 4\sum\frac{(-1)^n q^n}{1-q^{2n}}\cdot\frac{\sin 2nv}{n}\sin 2nu$$

$$\frac{1}{2i}\lg\frac{\theta(v+ui)}{\theta(v-ui)} = -\sum\frac{q^n}{1-q^{2n}}\cdot\frac{e^{2nv}-e^{-2nv}}{n}\sin 2nu \qquad q<e^{-2v}<\frac{1}{q}$$

$$\frac{1}{2i}\lg\frac{\theta_1(v+ui)}{\theta_1(v-ui)} = u+\sum\frac{e^{-2nv}-q^{2n}e^{2nv}}{1-q^{2n}}\cdot\frac{\sin 2nu}{n} \qquad q<e^{-v}<1$$

$$\frac{1}{2i}\lg\frac{\theta_2(v+ui)}{\theta_2(v-ui)} = u+\sum(-1)^n\frac{e^{-2nv}-q^{2n}e^{2nv}}{1-q^{2n}}\cdot\frac{\sin 2nu}{n} \qquad q<e^{-v}<1$$

$$\frac{1}{2i}\lg\frac{\theta_3(v+ui)}{\theta_3(v-ui)} = -\sum\frac{(-1)^n q^n}{1-q^{2n}}\cdot\frac{e^{2nv}-e^{-2nv}}{n}\sin 2nu \qquad q<e^{-2v}<\frac{1}{q}$$

Dass die Ausdrücke $\frac{1}{2i}\lg\frac{\theta_1(v+ui)}{\theta_1(v-ui)}$ und $\frac{1}{2i}\lg\frac{\theta_2(v+ui)}{\theta_2(v-ui)}$ die Periode π nicht besitzen, weil bei einer stetigen Aenderung von u um π nicht der nämliche Werth des Logarithmus wiedererhalten wird, darauf hat bereits JACOBI in seiner Abhandlung über die Rotation (Werke Bd. II, S. 175) aufmerksam gemacht. Es ist auf diesen Umstand bei der im Art. 56 gegebenen Darstellung der trigonometrischen Integrale dritter Gattung Rücksicht zu nehmen.

148.

Umkehr der Gleichung $v = u - fu$.

Sei $fu = u - v$ eine Function mit der Periode 2π, so lässt sich die Entwickelung in eine trigonometrische Reihe sowohl nach u als nach v vornehmen und zwar erhält man letzterenfalls für

$$u - v = fu = \sum_{-\infty}^{\infty} a_n e^{nvi}$$

$$a_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(u-v)e^{-nvi}dv = \frac{1}{2n\pi i}\int_{-\pi}^{\pi}e^{-nvi}du = \frac{1}{2n\pi i}\int_{-\pi}^{\pi}e^{n(ft-t)i}dt$$

nebst

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(u-v)\,dv = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(u-v)\,du = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}ft\,dt$$

Damit folgt

$$u - v = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}ft\,dt + \sum_n \frac{e^{nvi}}{2n\pi i}\int_{-\pi}^{\pi}e^{n(ft-t)i}dt$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}ft\,dt + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sin n\,(v-t+ft)\,dt$$

Wenn z. B. $u - v = fu = 2\sum_1^{\infty} a_n \sin 2nv$, so ist

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{1}{2}\pi}(u-v)\sin 2nv\,dv = \frac{1}{n\pi}\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\cos 2nv\,du$$

oder

$$a_n = \frac{1}{n\pi}\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\cos 2n\,(t-ft)\,dt$$

nebst

$$u = v + \sum_1^{\infty}\frac{1}{n\pi}\int_{-\frac{1}{2}\pi}^{\frac{1}{2}\pi}\sin 2n\,(v-t+ft)\,dt$$

Man kann diese Formel zur Umkehr der elliptischen Integrale zweiter Gattung benutzen. Sei etwa

$$w = \alpha u - \beta \frac{\vartheta' u}{\vartheta u} = \alpha v$$

wo

$$\frac{\vartheta' u}{\vartheta u} = 4 \sum_1^\infty \frac{q^n}{1 - q^{2n}} \sin 2nu = 4 \sum_1^\infty \frac{q^{2n-1} \sin 2u}{1 - 2q^{2n-1} \cos 2u + q^{4n-2}}$$

so wird für $\frac{\beta}{\alpha} = \gamma$

$$u - v = \gamma \frac{\vartheta' u}{\vartheta u} = 2 \sum_1^\infty a_n \sin 2nv$$

$$a_n = \frac{1}{n\pi} \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \cos 2n \left(t - \gamma \frac{\vartheta' t}{\vartheta t} \right) dt = \frac{(-1)^n}{n\pi} \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \cos 2n \left(t - \gamma \frac{\vartheta_3' t}{\vartheta_3 t} \right) dt$$

$$u = v + \sum_1^\infty \frac{1}{n\pi} \int_{-\frac{1}{2}\pi}^{\frac{1}{2}\pi} \sin 2n \left(v - t + \gamma \frac{\vartheta' t}{\vartheta t} \right) dt$$

Schreibt man $e = \lim\limits_{q=0} 8\gamma q$, so erhält man für abnehmende Werthe von q

$$a_n = \frac{1}{2n\pi} \int_0^\pi \cos n\,(u - e \sin u)\, du$$

wie bei der Entwickelung des KEPLER'schen Problems, wo u die excentrische und $v = u - e \sin u$ die mittlere Anomalie bedeuten*).

Wenn man nach Art. 39 und 40 mittelst

$$\varpi^2 = \frac{\pi}{\lg \frac{1}{q}} = \frac{\lg \frac{1}{q'}}{\pi}, \qquad u' = \varpi^2 u$$

die Argumente u' und q' einführt, also $\vartheta(u, q)$ durch $\theta_2(u', q') = \vartheta_2(u'i, q')$ ersetzt, so ergibt sich für

$$\alpha' = \frac{\alpha}{\varpi^2} + \frac{2\beta}{\pi}, \qquad \beta' = \beta \varpi^2$$

---

*) Man sieht leicht, dass diese Methode auch auf Integrale dritter Gattung anwendbar sein wird, denn wenn in dem Ausdrucke für w noch ein Glied von der Form $\delta \lg \frac{\vartheta(u+h)}{\vartheta(u-h)}$ hinzutritt, so hat diess lediglich zur Folge, dass sich in der umgekehrten Entwickelung für $u - v$ das Argument des Sinus unter dem Integralzeichen um $2n \frac{\delta}{\alpha} \lg \frac{\vartheta(t+h)}{\vartheta(t-h)}$ ändert. Freilich ist mit der Aufstellung derartiger Integralformeln für die praktische Berechnung noch nicht viel gewonnen.

$$w = \alpha' u' - \beta' \frac{\theta_3' u'}{\theta_3 u'} = \alpha' v'$$

oder

$$u' - v' = \gamma' \frac{\theta_2' u'}{\theta_2 u'} = \gamma' i \frac{\vartheta_2'(u'i, q')}{\vartheta_2(u'i, q')}$$

eine Function mit der imaginären Periode πi. Schreibt man $u'' = u'i$, $v'' = v'i$, so wird

$$u'' - v'' = -\gamma' \frac{\vartheta_2'(u'', q')}{\vartheta_2(u'', q')} = 2 \sum_1^\infty a_n \sin 2nv''$$

$$a_n = \frac{1}{n\pi} \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \cos 2n \left(t + \gamma' \frac{\vartheta_2'(t, q')}{\vartheta_2(t, q')} \right) dt = \frac{(-1)^n}{n\pi} \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \cos 2n \left(t + \gamma' \frac{\vartheta_1'(t, q')}{\vartheta_1(t, q')} \right) dt$$

nebst

$$u' - v' = \sum_1^\infty a_n (e^{2nv'} - e^{-2nv'})$$

wo jedoch die Convergenz der Reihe vorausgesetzt werden muss, da die Ableitung der Formel keineswegs auf strengem Wege erfolgt ist. Die umgekehrte Reihe

$$u' - v' = \gamma' \frac{\theta_2' u'}{\theta_2 u'} = \gamma' \sum_{-\infty}^{\infty} b_n e^{2nu'}$$

mit

$$b_0 = 1, \qquad b_n = (-1)^{n-1} \frac{2q'^{2n}}{1 - q'^{2n}}$$

convergirt innerhalb des Intervalls $\mathrm{mod}\, q' < \mathrm{mod}\, e^{-u'} < 1$. Für $q' = 0$ würde sich hiernach ergeben

$$u' - v' = \gamma' \frac{e^{u'} - e^{-u'}}{e^{u'} + e^{-u'}} = \sum_1^\infty \frac{e^{nv'} - e^{-nv'}}{n\pi} \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \cos 2n (t - \gamma' \mathrm{tg}\, t)\, dt$$

* * *

S. 155, Z. 14 lies $\omega_1'\ \omega'\ \varphi$ statt ω.
S. 157, Z. 8 v. u. lies »ersteren« statt »ersten«.
S. 171, Z. 7 lies $i\, \mathrm{tg} \frac{1}{2} \varpi'$ statt ϖ.
S. 178, Z. 6 ist die Bezeichnung $\Pi' = \frac{2K}{\pi} \sin\varpi' \cos\varpi' \Delta(\varpi', \varkappa')$ hervorzuheben.
S. 181, Z. 9 v. u. lies $e^{3v} + e^{-3v}$.
S. 184. Zu Art. 58 ist anzumerken, dass die ganzen Integrale dritter Gattung durch unbestimmte Integrale der zweiten Gattung ausgedrückt werden.
S. 190, Z. 1 v. u. lies Chap. 24.

S. 191, Z. 4 v. u. Hier mögen der Vollständigkeit halber die symmetrischen Formeln des Additionstheorems eingeschaltet werden:

$$\frac{\vartheta' u}{\vartheta u} + \frac{\vartheta' v}{\vartheta v} - \frac{\vartheta'(u+v)}{\vartheta(u+v)} = \frac{2K\varkappa^2}{\pi} \sin\varphi \sin\chi \sin\psi$$

$$\frac{\vartheta_1' u}{\vartheta_1 u} + \frac{\vartheta_1' v}{\vartheta_1 v} - \frac{\vartheta_1'(u+v)}{\vartheta_1(u+v)} = \frac{2K}{\pi} \cdot \frac{1 - \cos\varphi \cos\chi \cos\psi}{\sin\varphi \sin\chi \sin\psi} = \frac{2K}{\varkappa^2 \pi} \cdot \frac{1 - \varDelta\varphi \varDelta\chi \varDelta\psi}{\sin\varphi \sin\chi \sin\psi}$$

$$\frac{\vartheta_2' u}{\vartheta_2 u} + \frac{\vartheta_2' v}{\vartheta_2 v} - \frac{\vartheta_2'(u+v)}{\vartheta_2(u+v)} = \frac{2K\varkappa'^2}{\pi} \operatorname{tg}\varphi \operatorname{tg}\chi \operatorname{tg}\psi$$

$$\frac{\vartheta_3' u}{\vartheta_3 u} + \frac{\vartheta_3' v}{\vartheta_3 v} - \frac{\vartheta_3'(u+v)}{\vartheta_3(u+v)} = -\frac{2K\varkappa^2\varkappa'^2}{\pi} \cdot \frac{\sin\varphi \sin\chi \sin\psi}{\varDelta\varphi \varDelta\chi \varDelta\psi}$$

von denen Art. 62 Gebrauch gemacht worden ist. Schreibt man folglich

$$U[y] = \int_0^{u+u_1} + \int_0^{u-u_1} - 2\int_0^u y^2 du = 2\int_u^{\frac{1}{2}\pi} - \int_{u-u_1}^{\frac{1}{2}\pi} - \int_{u+u_1}^{\frac{1}{2}\pi} y^2 du$$

$$V[y] = \int_0^{u+v} - \int_0^u - \int_0^v y^2 du$$

so erhält man für die verschiedenen Werthe von y

$$\frac{\pi}{K} \sin^2\varphi_1 \frac{\sin\varphi \cos\varphi \varDelta\varphi}{1 - \varkappa^2 \sin^2\varphi \sin^2\varphi_1} = U[\sin\varphi] = -U[\cos\varphi] = -\frac{1}{\varkappa\varkappa} U[\varDelta\varphi]$$

$$\frac{\pi}{K} \left(\frac{\sin\varphi_1}{\sin\varphi}\right)^2 \frac{\sin\varphi \cos\varphi \varDelta\varphi}{\cos^2\varphi - \cos^2\varphi_1} = U\left[\frac{1}{\sin\varphi}\right] = U[\cot\varphi] = U\left[\frac{\varDelta\varphi}{\sin\varphi}\right]$$

$$\frac{\pi}{K} \left(\frac{\sin\varphi_1}{\cos\varphi}\right)^2 \frac{\sin\varphi \cos\varphi \varDelta\varphi}{\cos^2\varphi - \sin^2\varphi_1 \varDelta^2\varphi} = U\left[\frac{1}{\cos\varphi}\right] = U[\operatorname{tg}\varphi] = \frac{1}{\varkappa'\varkappa'} U\left[\frac{\varDelta\varphi}{\cos\varphi}\right]$$

$$\frac{\pi}{K} \left(\frac{\sin\varphi_1}{\varDelta\varphi}\right)^2 \frac{\sin\varphi \cos\varphi \varDelta\varphi}{\varkappa'^2 + \varkappa^2 \cos^2\varphi \cos^2\varphi_1} = \frac{1}{\varkappa\varkappa} U\left[\frac{1}{\varDelta\varphi}\right] = U\left[\frac{\sin\varphi}{\varDelta\varphi}\right] = -\frac{1}{\varkappa'\varkappa'} U\left[\frac{\cos\varphi}{\varDelta\varphi}\right]$$

$$\frac{\pi}{2K} \sin\varphi \sin\chi \sin\psi = V[\sin\varphi] = -V[\cos\varphi] = -\frac{1}{\varkappa\varkappa} V[\varDelta\varphi]$$

$$\frac{\pi}{2K} \operatorname{tg}\varphi \operatorname{tg}\chi \operatorname{tg}\psi = V\left[\frac{1}{\cos\varphi}\right] = V[\operatorname{tg}\varphi] = \frac{1}{\varkappa'\varkappa'} V\left[\frac{\varDelta\varphi}{\cos\varphi}\right]$$

$$\frac{\pi}{2K} \frac{\sin\varphi \sin\chi \sin\psi}{\varDelta\varphi \varDelta\chi \varDelta\psi} = \frac{1}{\varkappa\varkappa} V\left[\frac{1}{\varDelta\psi}\right] = V\left[\frac{\sin\varphi}{\varDelta\varphi}\right] = -\frac{1}{\varkappa'\varkappa'} V\left[\frac{\cos\varphi}{\varDelta\varphi}\right]$$

S. 199, Z. 9 v. u. lies $\varkappa_2 = \operatorname{tg}^4 \frac{1}{2}\zeta$ statt $\operatorname{tg}^8 \frac{1}{2}\zeta$.

S. IX des Supplements, Z. 5 lies $\operatorname{tg}\frac{1}{2}(\frac{1}{2}\pi + \varphi) = \dfrac{\theta_1(u' - \frac{1}{2}\lg q', q'^2)}{\theta(u' - \frac{1}{2}\lg q', q'^2)}$.

S. XII, Z. 10 lies $(\cos 2u - q^{2n-1})$.

S. XII, Z. 12 lies $(\cos 2u - q^{2n})$.

Inhaltsübersicht.

Erster Abschnitt. **Die Reduction auf die Normalform des elliptischen Differentials.**

Im **Art. 1** wird nach EULER aus der in x und y quadratischen Gleichung

$$f(x, y) = py^2 + 2p_1 y + p_2 = qx^2 + 2q_1 x + q_2 = 0$$

wobei

$$p = ax^2 + 2a_1 x + a_2 , \qquad p_1 = bx^2 + 2b_1 x + b_2 , \qquad p_2 = cx^2 + 2c_1 x + c_2$$
$$q = ay^2 + 2by + c , \qquad q_1 = a_1 y^2 + 2b_1 y + c_1 , \qquad q_2 = a_2 y^2 + 2b_2 y + c_2$$

bedeuten, die elliptische Differentialgleichung

$$\frac{dx}{\xi} + \frac{dy}{\eta} = 0 \qquad \text{oder genauer} \qquad \frac{dx^2}{\xi\xi} = \frac{dy^2}{\eta\eta}$$

abgeleitet, in welcher zur Abkürzung gesetzt ist

$$\xi = \sqrt{p_1^2 - pp_2} = \sqrt{Ax^4 + 4Bx^3 + 6Cx^2 + 4Dx + E}$$
$$\eta = \sqrt{q_1^2 - qq_2} = \sqrt{\mathfrak{A}y^4 + 4\mathfrak{B}y^3 + 6\mathfrak{C}y^2 + 4\mathfrak{D}y + \mathfrak{E}}$$

Ueberall wird die Realität der angewandten Grössen vorausgesetzt. Die gefundene Differentialgleichung kann auch als Transformation des elliptischen Differentials

$$dz = \frac{dx}{\xi} = \mp \frac{dy}{\eta}$$

angesehen werden. Wegen des doppelten Vorzeichens vergl. Art. 43. Ausserdem enthält Art. 1 noch einige andere Differentialformeln, die gelegentlich Anwendung finden können.

Im **Art. 2** werden zunächst die zehn Coefficienten $A, \mathfrak{A}, \ldots$ durch die neun Constanten $a, a_1 \ldots$ (deren Verhältnisse acht unabhängige Constanten repräsentiren) bestimmt. Hierbei ergeben sich für die ersteren zwei Bedingungsgleichungen, die in der Gleichheit der Invarianten der Polynome ξ^2 und η^2 bestehen und in der Form geschrieben werden

$$G = \mathfrak{G} , \qquad H = \mathfrak{H}$$

wo

$$G = AE - 4BD + 3CC , \qquad H = \begin{vmatrix} A & B & C \\ B & C & D \\ C & D & E \end{vmatrix}$$

Aus dem Nachweise, dass $f(x,y) = 0$ vermöge der darin enthaltenen unabhängigen Constanten das vollständige Integral der Differentialgleichung $\frac{dx}{\xi} \pm \frac{dy}{\eta} = 0$ ist, folgt, dass die algebraische Gleichung $f(x,y) = 0$ und die transscendente Integralgleichung $\int_{x_0}^{x} \frac{dx}{\xi} \pm \int_{y_0}^{y} \frac{dy}{\eta} = 0$ einander äquivalent sind. Diess ergibt das Additionstheorem für elliptische Integrale erster Gattung mit gleichen Invarianten.

Zur Lösung der Hauptaufgabe, die Coefficienten $a, a_1 \ldots$ durch die Coefficienten $A, \mathfrak{A} \ldots$ auszudrücken, wird im **Art. 3** die Zerlegung von ξ^2 in trinomische Factoren betrachtet, welche mit Hülfe der Wurzeln λ der cubischen Resolvente

$$4\lambda^3 - G\lambda - H = 0$$

geleistet wird; zugleich sind die Bedingungen angegeben, ob die den drei Wurzeln λ entsprechenden Zerlegungen reell sind oder nicht. Vergl. hierzu den Nachtrag zu S. 61.

Wählt man die nämliche Wurzel λ zur Zerlegung von ξ^2 und η^2, was wegen $G = \mathfrak{G}$, $H = \mathfrak{H}$ möglich ist, setzt man ferner $\xi = \xi_1 \xi_2$, $\eta = \eta_1 \eta_2$ und bezeichnet mit dem Index 0 die Grössen, in denen x und y resp. durch x_0 und y_0 ersetzt sind, so lehrt der **Art. 4**, dass der Gleichung

$$z = \int_{x_0}^{x} \frac{dy}{\xi} = \int_{y_0}^{y} \frac{dy}{\eta}$$

die algebraische Relation

$$\frac{\xi_1 \xi_2^0 + \xi_1^0 \xi_2}{x - x_0} = \frac{\eta_1 \eta_2^0 + \eta_1^0 \eta_2}{y - y_0} \tag{I}$$

äquivalent ist. Selbstverständlich kann diese Gleichung nur formell, nicht materiell von der Wahl der Wurzel λ abhängen. Das Quadrat der aufgestellten Gleichung wird durch Einführung der Hülfsgrössen

$$L = Ax^2 + 2Bx + C\,, \qquad M = Bx^2 + 2Cx + D\,, \qquad N = Cx^2 + 2Dx + E$$

nebst den entsprechenden $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{N}$ auf die Form gebracht

$$\frac{\xi_0 \xi + L_0 x^2 + 2M_0 x + N_0}{(x - x_0)^2} = \frac{\eta_0 \eta + \mathfrak{L}_0 y^2 + 2\mathfrak{M}_0 y + \mathfrak{N}_0}{(y - y_0)^2} \tag{I*}$$

und entspricht jetzt sowohl der Integralgleichung $\int_{x_0}^{x} \frac{dx}{\xi} = \int_{y_0}^{y} \frac{dy}{\eta}$ als auch der Gleichung $\int_{x_0}^{x} \frac{dx}{\xi} + \int_{y_0}^{y} \frac{dy}{\eta} = 0$.

Schreibt man die Gleichung (I*) in der abgekürzten Form $2X = 2Y$, so wird im **Art. 5**

$$X = \frac{\xi_0(\xi + \xi_0)}{2(x - x_0)^2} + \frac{\xi_0 \xi_0'}{2(x - x_0)} + \tfrac{1}{2} L_0$$

gefunden und dazu eine neue Function eingeführt

$$X_1 = -\xi \frac{dX}{dx} = \frac{\xi \xi_0}{(x - x_0)^2} \left\{ \frac{\xi + \xi_0}{x - x_0} - \tfrac{1}{2}(\xi' - \xi_0') \right\}$$

Damit kann die Integralgleichung $X = Y$ durch die äquivalente $X_1 = \pm Y_1$ ersetzt werden, woraus folgt, dass X_1^2 als Function von X ausdrückbar sein muss. Als Covarianten der biquadratischen Form ergeben sich

$$f = \xi\xi\ , \qquad g = \tfrac{1}{2}\xi^2(\xi'\xi' - 2\xi\xi'')\ , \qquad h = \tfrac{1}{12}\xi^5\xi'''$$

Stellt man auch die Invarianten G und H als Functionen von ξ und dessen Differentialquotienten dar, so erhält man ohne Weiteres die Cayley-Hermite'sche Gleichung

$$h^2 = 4g^3 - Gf^2g - Hf^3$$

mit ihren Folgerungen. Für das elliptische Differential entspringt der Ausdruck

$$dz = \frac{dx}{\xi} = \mp \frac{dw}{2\sqrt{4w^3 - Gw - H}}\ , \qquad w = \frac{g}{f}$$

welcher durch Einführung der absoluten Invariante $J = \frac{G^3}{H^2}$ transformirt werden kann.

Weitere Betrachtungen über die Covarianten folgen im **Art. 6** und dem Nachtrage zu S. 66. Es werden die Coefficienten in g und h entwickelt, die Relationen zwischen den Covarianten und Invarianten von g und von f angegeben und schliesslich eine grössere Anzahl von Differentialformeln für die Covarianten abgeleitet. Die Kenntniss der Wurzeln λ führt zur Auflösung der Gleichungen

$$f = 0\ , \qquad g = 0 \qquad \text{und} \qquad h = 0\ .$$

Aus der zwischen X und X_1 bestehenden Gleichung

$$X_1^2 = 4X^3 - GX - H$$

geht im **Art. 7** die Weierstrass'sche Normalform hervor

$$dz = \mp \frac{dX}{\sqrt{4X^3 - GX - H}}$$

Die Werthe von X und X_1 werden weiter umgeformt und nach einigen Reductionen eine quadratische Gleichung gefunden, aus der die identischen Formeln folgen:

$$(12X^2 - f_0''X + g_0'' - G)(x - x_0) = 3(f_0'X - g_0' + 2\xi_0 X_1)$$

oder

$$(2\xi_0 X_1 - f_0'X + g_0')(x - x_0) = 4(f_0 X - g_0)$$

Wird in dieser Gleichung X mit Y und X_1 mit $\pm Y_1$ vertauscht, so erhält man die Substitution

$$x - x_0 = 3\frac{f_0'Y - g_0' \pm 2\xi_0 Y_1}{12Y^2 - f_0''Y + g_0'' - G} = 4\frac{f_0 Y - g_0}{g_0' - f_0'Y \pm 2\xi_0 Y_1}$$

durch welche $\frac{dx}{\xi}$ in $\pm\frac{dy}{\eta}$ übergeführt wird, folglich muss sich nach Elimination von η die gesuchte Gleichung $f(x, y) = 0$ ergeben. Allein dieser Weg wird nur angedeutet.

Art. 8 gibt eine bequemere Methode, $f(x, y) = 0$ zu finden; nachdem diese Gleichung in der Form geschrieben

$$[\alpha(y - y_0)^2 + 2\beta(y - y_0) + \gamma](x - x_0)^2 + [\alpha_1(y - y_0)^2 + 2\beta_1(y - y_0) + \gamma_1](x - x_0)$$
$$+ [\alpha_2(y - y_0)^2 + 2\beta_2(y - y_0) + \gamma_2] = 0$$

werden die Coefficienten im Art. 8 und **Art. 9** durch directe Rechnung als Functionen von ξ_0, η_0 und den zugehörigen Covarianten resp. deren Differentialquotienten entwickelt. Die Function $f(x, y)$ nimmt dann nach Multiplication mit $k = \mathfrak{f}g - \mathfrak{g}f$, wo $\mathfrak{f}$ und $\mathfrak{g}$ ebenso von y abhängen wie f und g von x, die Gestalt an

$$k_0 f(x, y) = \xi_0 \Xi + \eta_0 T = 0$$

Die Werthe von Ξ und T sind am Ende des Art. 9 angegeben.

Art. 10 stellt die Form auf, in der nunmehr die Substitution des Art. 7 erscheint; für den einfacheren Fall, dass η_0 verschwindet, ist die Substitution für $x - x_0$ und der Werth des Radicals ξ, nebst der umgekehrten Substitution $y - y_0$ und dem Radicale η, ausführlich berechnet.

Im Falle $\eta_0 = 0$ nehmen, wie im **Art. 11** gezeigt wird, k nnd dessen Differentialquotienten eine einfachere Gestalt an, so dass auch der Ausdruck für $k_0 f(x, y) = \xi_0 \Xi$ sich vereinfacht. Die Coefficienten $a, b \ldots$ bestimmen sich dann ohne Schwierigkeit. Die daraus entspringenden Werthe von x und y stehen mit denen des Art. 10 in Einklang.

Der allgemeinere Fall, in dem η_0 nicht verschwindet, wird im **Art. 12** kurz berührt, sodann aber zu speciellen Beispielen übergegangen.

Als erstes Beispiel wird der Fall betrachtet, in dem die $A, B \ldots$ den $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \ldots$ gleich sind; aus den allgemeinen Formeln ergeben sich die entsprechenden Werthe für k und Ξ.

Da jetzt in der transscendenten Gleichung $\int_{x_0}^{x} + \int_{y_0}^{y} \frac{dx}{\xi} = 0$ x und y miteinander vertauscht werden können, werden im **Art. 13** Ξ und T so umgeformt, dass auch in ihnen diese Vertauschbarkeit in die Augen springt; die Ausdrücke für x, y, ξ und η folgen dann ohne Schwierigkeit.

Im **Art. 14** findet sich das vorliegende Beispiel weiter specialisirt für die Fälle $y_0 = 0$, $y_0 = \infty$ und $\eta_0 = 0$. Durch die zulässigen Vertauschungen der Grössen $x\, x_0\, y\, y_0$ erhalten letzterenfalls die betreffenden Relationen mannichfaltige Formen.

Art. 15 zeigt, dass aus demselben Grunde auch die Integralgleichungen

$$X = Y \qquad \text{und} \qquad \frac{\xi_1 \xi_2^0 + \xi_1^0 \xi_2}{x - x_0} = \frac{\eta_1 \eta_2^0 + \eta_1^0 \eta_2}{y - y_0}$$

in verschiedener Gestalt aufgestellt werden können, wodurch ein Mittel zur directen Bestimmung der Coefficienten $a\, b \ldots$ in $f(x, y)$ für den jetzigen Fall gewonnen wird.

Werden die gefundenen Gleichungen der irrationalen Substitution

$$\frac{\xi_1 \xi_2^0 + \xi_1^0 \xi_2}{x - x_0} = \frac{\eta_1 \eta_2^0 + \eta_1^0 \eta_2}{y - y_0}, \qquad \frac{\xi_1 \eta_2 + \xi_2 \eta_1}{x - y} = \frac{\xi_1^0 \eta_2^0 + \xi_2^0 \eta_1^0}{x_0 - y_0}$$

$$\frac{\xi_1 \eta_2^0 - \xi_2 \eta_1^0}{x - y_0} = \frac{\eta_1 \xi_2^0 - \eta_2 \xi_1^0}{y - x_0}$$

auf die Normalform mit dem Modul $\varkappa < 1$, also auf

$$\xi\xi = 1 - x^2 \cdot 1 - \varkappa^2 x^2$$

angewandt, so gehen im **Art. 16** nach Einführung von

$$x = \sin\varphi \qquad y = \sin\psi$$

$$\sqrt{1 - \varkappa^2 \sin^2\varphi} = \Delta(\varphi, \varkappa) \qquad \varkappa^2 + \varkappa'^2 = 1$$

die trigonometrischen Relationen hervor, durch welche

$$\int_{\varphi_0}^{\varphi} \frac{d\varphi}{\Delta\varphi} \quad \text{in} \quad \int_{\psi_0}^{\psi} \frac{d\varphi}{\Delta\varphi}$$

übergeführt wird. Diese Formeln können auch als Additionsformeln für

$$\int_{\varphi_0}^{\varphi} + \int_{\varphi_0}^{\psi_0} = \int_{\varphi}^{\psi} + \int_{\psi_0}^{\psi} = \int_{\varphi_0}^{\psi} \frac{d\varphi}{\Delta\varphi}$$

angesehen werden. Als Nachtrag zum ersten Abschnitt S. 117 (61) wird eine Construction dieses allgemeinen Additionstheorems mit Hülfe zweier sphärischen Dreiecke gegeben. Wird $\varphi = \psi_0$ gesetzt, so geht die Verdoppelung der elliptischen Integrale hervor.

Setzt man dagegen $\varphi_0 = 0$, $\psi_0 = \chi$, so erhält man, wie im **Art. 17** gezeigt ist, die gewöhnlichen Additionsformeln für

$$\int_0^{\varphi} + \int_0^{\chi} = \int_{\varphi}^{\psi} + \int_{\chi}^{\psi} = \int_0^{\psi} \frac{d\varphi}{\Delta\varphi}$$

aus denen $\sin\psi$, $\cos\psi$, $\Delta\psi$ und $\operatorname{tg}\psi$ in vierfacher Gestalt berechnet werden. Eine andere Ableitung derselben Ausdrücke findet sich im Art. 51, während Art. 60 $\psi = \operatorname{am}\frac{2K}{\pi}(u + vi)$ gesetzt ist. Hieran schliesst sich die Construction des Additionstheorems mittelst eines sphärischen Dreiecks (vergl. den Nachtrag zu S. 89), aus der sich der dem Satze von der Winkelsumme im ebenen Dreiecke entsprechende Satz für das sphärische Dreieck ergibt. Die Beziehung zwischen den Formeln der sphärischen Trigonometrie und den elliptischen Additionsformeln wird nach LAGRANGE und JACOBI zur Aufstellung einer Formeltabelle benutzt.

Im **Art. 18** wird in den allgemeinen Formeln des Art. 16 zunächst

$$\psi = \tfrac{1}{2}\pi, \qquad \varphi_0 = \omega \quad \text{und} \quad \psi_0 = \chi$$

und zweitens $\varphi_0 = 0$, $\psi_0 = \omega$, $\varphi = \psi$ und $\psi = \frac{1}{2}\pi$

gesetzt und die Form, welche die entsprechenden Additionssätze alsdann annehmen, ausführlich entwickelt. Die betreffenden Verdoppelungsformeln gehen hervor, wenn $\chi = \varphi$ gemacht wird.

Ein z w e i t e s Beispiel wird in den **Artt. 19** bis 22 behandelt und die Coefficienten $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{D}$ in η gleich Null angenommen. Aus der Gleichheit der Invarianten von ξ und η ergibt sich alsdann

$$\mathfrak{C} = -\lambda \quad \text{und} \quad \mathfrak{A}\mathfrak{C} = G - 3\lambda^2$$

Eine und nur eine Wurzel λ der cubischen Resolvente $4\lambda^3 - G\lambda - H = 0$ kann stets reell und von gleichem Vorzeichen mit H bestimmt werden. Wird die Bedingung

$$\mathfrak{A} + \mathfrak{C} = 6\lambda$$

hinzugefügt, so sind $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{C}$ die Wurzeln der quadratischen Gleichung

$$\varpi^2 - 6\lambda\varpi - 3\lambda^2 + G = 0$$

welche mit λ reell sein müssen. Es nimmt dann das elliptische Differential die Form an

$$\frac{dy}{\eta} = \frac{dy}{\sqrt{\mathfrak{A}y^4 - (\mathfrak{A} + \mathfrak{C})y^2 + \mathfrak{C}}}$$

Um reelle Ausdrücke zu erhalten, hat man $y_0 = 1$ zu setzen. So bekommt man die leicht auf die sogenannte Normalform reductibeln Integrale

$$z = \int_{x_0}^{x} \frac{dx}{\xi} = \int_{y}^{1} \frac{dy}{\sqrt{1 - y^2 \cdot \mathfrak{C} - \mathfrak{A}y^2}} = -\int_{1}^{y} \frac{dy}{\sqrt{\mathfrak{A}y^2 - \mathfrak{C} \cdot y^2 - 1}}$$

Zum Schlusse des Art. 19 werden ausserdem die Invarianten G und H, ferner die Wurzeln λ, λ_1, λ_2 der cubischen Resolvente nebst den Werthen für $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{C}$ als Functionen der Wurzeln von $\xi = 0$ ausgedrückt.

Art. 20 enthält die sechs verschiedenen Werthe, welche man für y je nach der Beschaffenheit der Werthe von $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{C}$ zu substituiren hat, um die LEGENDRE'sche Normalform $\int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\Delta(\varphi\, \varkappa)}$ zu erhalten; dabei sind zugleich die zugehörigen Werthe der Moduln $\varkappa$ und $\varkappa'$ angegeben. Die Betrachtung der verschiedenen Werthe von $\varkappa^2$ zeigt, dass sich dieselben als Wurzeln einer reciproken Gleichung sechsten Grades darstellen lassen, welche auf eine cubische Gleichung von einfacher Form reductibel ist. Weitere Untersuchungen über die Grösse der Moduln enthält Art. 41.

Im **Art. 21** wird die irrationale Substitution für den gegenwärtigen Fall, wo einer der Factoren von η für $y = y_0 = 1$ verschwindet, in der Gestalt

$$2(X - \lambda) = \pm \mu \frac{1 + y}{1 - y}$$

angegeben, wo $\mu^2 = 12\lambda^2 - G$, ferner die rationale Gleichung $f(x, y) = 0$ sowohl nach den Formeln des Art. 9 wie des Art. 11 entwickelt.

Art. 22 stellt aus den allgemeinen Formeln des Art. 10 die dem jetzigen Beispiel entsprechenden Werthe von x, y, ξ und η dar.

Die Artt. 19—22 enthalten also eine Reductionsmethode des elliptischen Differentials auf die Normalform, die stets anwendbar ist, weil sich $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{C}$ in allen Fällen reell bestimmen lassen.

Ein drittes Beispiel behandeln die **Artt. 23** bis 25. Wird

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{C} = 0$$

gesetzt, so folgt vermöge der Invariantengleichungen

$$\mathfrak{C} = 2\lambda\,, \qquad 4\mathfrak{B}\mathfrak{D} = 12\lambda^2 - G$$

Unter Hinzufügung der Bedingung $\mathfrak{B} + \mathfrak{D} = 3\lambda$ ergeben sich $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{D}$ als Wurzeln der quadratischen Gleichung

$$\varpi^2 - 3\lambda\varpi + 3\lambda^2 - \tfrac{1}{4}G = 0\,,$$

sind aber nur reell für $G > 3\lambda^2$ oder $G^3 > 27H^2$. Je nachdem H einen positiven oder negativen Werth hat, erhält man

$$\frac{dy}{\eta} = \frac{ds}{\sqrt{(s^2 + 1)(\mathfrak{B}s^2 + \mathfrak{D})}} \quad \text{oder} \quad = -\frac{dt}{\sqrt{(1 - t^2)(\mathfrak{B}t^2 - \mathfrak{D})}}$$

Art. 24 gibt die Abhängigkeit der Coefficienten $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{D}$ von den Wurzeln der Gleichung $\xi = 0$, vergleicht ihre Werthe mit denen von $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{C}$ des vorigen Beispiels, und lehrt die vier verschiedenen Substitutionen, welche für die verschiedenen Werthe von $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{D}$ auf die LEGENDRE'sche Normalform führen. Weiter ist die reciproke Gleichung aufgestellt, deren Wurzeln die zugehörigen Moduln $\varkappa^2$ und $\varkappa'^2$ sind; die entsprechende cubische Gleichung hängt jetzt nur von der absoluten Invariante ab (vergl. Nachtrag zu S. 103).

Neben der irrationalen Substitution

$$y = \frac{\mathfrak{D}}{X - \lambda}$$

für den vorliegenden Fall enthält **Art. 25** den Werth von Ξ, unter Benutzung der allgemeinen Formeln der Artt. 9 und 11, ferner die aus Art. 10 abgeleiteten, dem jetzigen Beispiele entsprechenden Werthe für x, y, ξ und η.

Als viertes Beispiel ist im **Art. 26**

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{C} = 0, \qquad \mathfrak{B} = 1$$

gesetzt. Dadurch wird $G = -4\mathfrak{D}$, $H = -\mathfrak{E}$, $\eta^2 = 4y^3 - Gy - H$, also

$$dz = \frac{dx}{\xi} = -\frac{dy}{\sqrt{4y^3 - Gy - H}}$$

und für $y_0 = \infty$

$$z = \int_y^\infty \frac{dy}{\sqrt{4y^3 - Gy - H}}$$

Nach Angabe der WEIERSTRASS'schen Entwickelung für y nach Potenzen von z findet sich für beliebige Werthe von y_0 die Gleichung $-k_0 f(x, y) = 0$ ausführlich aufgestellt.

Art. 27 enthält die Anwendung für $y_0 = \infty$ und gibt den Werth für $x - x_0$, die irrationale Substitution in der einfachen Form $y = X$, mit dem zugehörigen $\eta = X_1$, den Werth von ξ und endlich die Substitution, die man zur Reduction auf die LEGENDRE'sche Normalform anzuwenden hat. Dabei wird man auf die Moduln des Art. 24 zurückgeführt.

In den Artt. 28 bis 32 werden einige Fälle betrachtet, in denen eine quadratische Gleichung von der Form $f(x, y) = 0$ der Differentialgleichung

$$\frac{dx}{\xi} + \frac{dy}{\eta} = 0$$

genügt, ohne dass ξ und η gleiche Invarianten besitzen. Es sind diess zunächst die Substitutionen der Artt. 20 und 23:

$$y = \cos\varphi, \qquad \varDelta\varphi, \qquad \mathrm{tg}^2\varphi \qquad \text{und} \qquad -\sin^2\varphi$$

Art. 28 betrachtet die Substitutionen $y = \cos\varphi$, $y = \varDelta\varphi$ und leitet mit Hülfe der Wurzeln der Gleichungen

$$4\lambda^3 - G\lambda - H = 0 \qquad \text{und} \qquad 4\mu^3 - \mathfrak{G}\mu - \mathfrak{H} = 0$$

die Beziehungen zwischen den Invarianten G und H einerseits und $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{H}$ andererseits ab.

Das Nämliche leistet **Art. 29** rücksichtlich der Substitutionen $y = \mathrm{tg}^2\varphi$ und $y = -\sin^2\varphi$.

Art. 30 behandelt unter diesem Gesichtspunkte die Substitution des Art. 27 nebst der reciproken Substitution.

Zu den Substitutionen, die auf ungleiche Invarianten führen, gehört auch die GAUSS'sche Substitution des arithmetisch-geometrischen Mittels, welche nebst ihrer reciproken im **Art. 31** untersucht wird, sowie

die Substitution des complementären Moduls, die den Gegenstand des **Art. 32** bildet. Am Schlusse des Art. 32 finden sich endlich noch die Invariantenrelationen angegeben, die bei einer Transformation $n$ter Ordnung stattfinden, welche dem Uebergange von q in q^n entspricht und selbstverständlich nicht auf eine quadratische Gleichung von der Form $f(x, y) = 0$ führt. Die Rechnung vereinfacht sich durch Einführung der Grösse $h = \frac{2\varkappa}{\varkappa'\varkappa'}$ an Stelle des Moduls $\varkappa$, worüber einige Bemerkungen beigefügt sind.

A. Donadt.

Zweiter Abschnitt. **Die Reduction der elliptischen Integrale auf die Thetafunctionen Jacobi's.**

Art. 33 definirt die vier Thetafunctionen

$$\vartheta(uq) = \sum_{-\infty}^{\infty}(-1)^n q^{nn}\cos 2nu\,, \qquad \vartheta_2(uq) = \sum q^{(n+\frac{1}{2})^2}\cos(2n+1)u$$

$$\vartheta_1(uq) = \sum(-1)^n q^{(n+\frac{1}{2})^2}\sin(2n+1)u\,, \qquad \vartheta_3(uq) = \sum q^{nn}\cos 2nu$$

durch unendliche Reihen und unendliche Producte, woraus für $u = 0$ die Gleichungen

$$\vartheta = \chi_1\chi^2\,, \qquad \vartheta_1' = 2q^{\frac{1}{4}}\chi_1^3\,, \qquad \vartheta_2 = 2q^{\frac{1}{4}}\chi_1\chi_2^2\,, \qquad \vartheta_3 = \chi_1\chi_3^2$$

hervorgehen, wenn

$$\chi = \prod_1^{\infty}(1-q^{2p-1})\,, \qquad \chi_1 = \prod(1-q^{2p}) = \sum(-1)^n q^{n(3n+1)}$$

$$\chi_2 = \prod(1+q^{2p})\,, \qquad \chi_3 = \prod(1+q^{2p-1})$$

Vermöge der zwölf für die Quotienten je zweier Thetafunctionen geltenden Differentialformeln (vergl. Art. 44[d] des Nachtrags) und der daraus entspringenden linearen Relationen zwischen den Quadraten der verschiedenen Thetafunctionen, ergeben sich 24 Formen für das elliptische Integral u der ersten Gattung nebst den zugehörigen Substitutionen zur Reduction auf die Normalform

$$\frac{2Ku}{\pi} = \int_0^{\varphi}\frac{d\varphi}{\Delta(\varphi\varkappa)} \quad \text{oder nach JACOBI's Bezeichnung} \quad \varphi = \mathrm{am}\,\frac{2Ku}{\pi}$$

wo $\varkappa = \frac{\vartheta_2^2}{\vartheta_3^2}\,, \quad \varkappa' = \frac{\vartheta^2}{\vartheta_3^2}\,, \quad \varkappa^2 + \varkappa'^2 = 1\,, \quad K = \int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{d\varphi}{\Delta(\varphi\varkappa)} = \frac{1}{2}\pi\,\vartheta_3^2$

gesetzt ist und

$$\frac{\vartheta_1 u}{\vartheta u} = \sqrt{\varkappa}\sin\varphi\ , \qquad \frac{\vartheta_2 u}{\vartheta u} = \sqrt{\frac{\varkappa}{\varkappa'}}\cos\varphi\ , \qquad \frac{\vartheta_3 u}{\vartheta u} = \sqrt{\frac{1}{\varkappa'}}\Delta\varphi$$

gefunden wird.

Die Producte zweier Thetafunctionen, welche in den Differentialformeln vorkommen, werden **Art. 34** auf einfache Thetafunctionen reducirt, wobei das Argument (u, q) durch $(u, q^{\frac{1}{2}})$, $(2u, q^2)$ und $(u, iq^{\frac{1}{2}})$ ersetzt wird. Damit folgen zugleich die entsprechenden Beziehungen zu den Argumenten (u, q^2), $(\frac{1}{2}u, q^{\frac{1}{2}})$ und $(u, -q^2)$. Bezeichnet man durch $\lambda\ \mu\ \nu\ \varrho$ die Werthe, in welche sich $\varkappa$ durch den Uebergang von q resp. in $q^{\frac{1}{2}}$, q^2, $iq^{\frac{1}{2}}$ und $-q^2$ verwandelt, während gleichzeitig K in $\Lambda\ M\ N\ P$ übergeht, und lässt $K'\ \Lambda'\ M'$ den complementären Moduln $\varkappa'\ \lambda'\ \mu'$ entsprechen, so ergibt sich, dass μ ebenso von $\varkappa$ abhängt, wie $\varkappa$ von λ, und dass durch Vertauschung von $\varkappa$ und $\varkappa'$ λ und μ' sowie μ und λ' ineinander übergehen. Ferner wird

$$\frac{2K}{\pi} = \sqrt{\frac{\mu'\mu_1'\mu_2'\mu_3'\,.\,.}{\varkappa'}}\ , \qquad \frac{2K'}{\pi} = \sqrt{\frac{\lambda\lambda_1\lambda_2\lambda_3\,.\,.}{\varkappa}}$$

wenn der Fortschritt in der Grössenreihe $.\ .\ \lambda_2\ \lambda_1\ \lambda\ \varkappa\ \mu\ \mu_1\ \mu_2\ .\ .$ dem wiederholten Uebergange von q zu q^2 correspondirt.

Art. 35 führt die den sechs Argumenten des vorigen Artikels entsprechenden Amplituden $\chi'\ \psi\ \omega'$ resp. $\chi\ \psi'\ \omega$ ein und leitet die den sechs Integralgleichungen

$$\int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\Delta(\varphi\ \varkappa)} = \frac{2}{1+\varkappa'}\int_0^\chi \frac{d\chi}{\Delta(\chi\ \mu)} = \frac{1}{1+\varkappa}\int_0^{\chi'} \frac{d\chi}{\Delta(\chi\ \lambda)} = \frac{1}{1+\varkappa'}\int_0^\psi \frac{d\psi}{\Delta(\psi\ \mu)}$$

$$= \frac{2}{1+\varkappa}\int_0^{\psi'} \frac{d\psi}{\Delta(\psi\ \lambda)} = \frac{1}{\sqrt{\varkappa'}}\int_0^\omega \frac{d\omega}{\Delta(\omega\ \varrho)} = (\varkappa'-\varkappa i)\int_0^{\omega'} \frac{d\omega}{\Delta(\omega\ \nu)}$$

zugehörenden, paarweise reciproken Substitutionen ab. Die beiden letzten führen auf complexe Moduln und werden benutzt, um Transformationen aufzustellen, welche ein elliptisches Integral, dessen Modul eine complexe Einheit, auf ein anderes mit reellem Modul < 1 reduciren, und welche dem Uebergang von q in $-q$ entsprechen.

Im **Art. 36** sind die verschiedenen Umformungen der vier vorhergehenden Transformationen, welche die Namen von GAUSS und von LANDEN tragen, tabellarisch zusammengestellt.

Art. 37 enthält einige historische Notizen und zeigt den directen Zusammenhang sowohl der GAUSS'schen Transformation des arithmetisch-geometrischen Mittels, wie der von LANDEN in der LEGENDRE'schen Form, mit der LAGRANGE'schen Substitution

$$y = y_1\sqrt{\frac{1 \pm m_1^2 y_1^2}{1 \pm n_1^2 y_1^2}}\ , \qquad \text{wo} \qquad m_1 = \frac{m+n}{2}\ , \qquad n_1 = \sqrt{mn}$$

welche zu der Gleichung

$$\int_0^y \frac{dy}{\sqrt{(1 \pm m^2 y^2)(1 \pm n^2 y^2)}} = \int_0^{y_1} \frac{dy_1}{\sqrt{(1 \pm m_1^2 y_1^2)(1 \pm n_1^2 y_1^2)}}$$

führt.

Art. 38 beschäftigt sich mit der Berechnung der Argumente u und q, wenn φ und $\varkappa$ gegeben sind. Die Grösse q wird nach Jacobi mittelst der Formel

$$q = \frac{\varkappa^2}{16\varkappa'} \varkappa_1'^{\frac{1}{2}} \varkappa_2'^{\frac{1}{4}} \varkappa_3'^{\frac{1}{8}} \ldots$$

gefunden, wo $\varkappa_1\, \varkappa_2\, \varkappa_3 \ldots$ statt $\mu\, \mu_1\, \mu_2$ geschrieben sind, also $\varkappa_n$ dem Uebergange von q zu q^{2^n} entspricht. Die numerische Berechnung lässt sich, unter Benutzung der sogenannten Additionslogarithmen, durch Einführung von Hülfsgrössen erleichtern, welche zugleich zur Ableitung der Werthe des ganzen Integrals K resp. von $\lg\vartheta_i$ und $\lg\chi_i$ dienen. Im Nachtrage zu S. 132 finden sich stark convergirende Reihen- und Kettenbruchsentwickelungen zur Berechnung von q, z. B. für $q^{\frac{1}{4}}$ nach den Potenzen von $\frac{1}{16}\operatorname{tg}^4\frac{1}{2}\varepsilon$ und von $\frac{1}{64}\operatorname{tg}^4\delta$, wenn $\varkappa = \sin\varepsilon = \sqrt{2}\sin\delta$ gesetzt wird. Die Berechnung von u wird geleistet sowohl durch wiederholte Anwendung der Gauss'schen, wie der Landen'schen Transformation, oder der Jacobi'schen Substitution $m\operatorname{tg}^2\varphi = n\operatorname{tg}^2\varphi_1$, für welche

$$\frac{d\varphi}{\sqrt{m^2\sin^2\varphi + n^2\cos^2\varphi}} = \frac{d\varphi_1}{\sqrt{m_1^2\sin^2 2\varphi_1 + n_1^2\cos^2 2\varphi_1}}$$

Im **Art. 39** wird der complementäre Modul $\varkappa'$ eingeführt, wodurch für

$$\int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\varDelta(\varphi\,\varkappa)} = \int_0^{\varphi'} \frac{d\varphi'}{\varDelta(\varphi'\,\varkappa')} \qquad \text{oder} \qquad Ku = K'u'$$

$$\varpi^2 = -\frac{\lg q'}{\pi} = -\frac{\pi}{\lg q}, \qquad u' = \varpi^2 u, \qquad q = e^{-\pi\frac{K'}{K}}, \qquad q' = e^{-\pi\frac{K}{K'}}$$

werden. Bezeichnet man durch

$$\theta = \sum_{-\infty}^{\infty}(-1)^n q^{nn} e^{2nu}, \qquad \theta_1 = \sum(-1)^n q^{(n+\frac{1}{2})^2} e^{(2n+1)u}$$

$$\theta_2 = \sum q^{(n+\frac{1}{2})^2} e^{(2n+1)u}, \qquad \theta_3 = \sum q^{nn} e^{2nu}$$

die vier Thetafunctionen, in denen die trigonometrischen Functionen durch reelle Exponentialgrössen ersetzt worden sind, so lassen sich die Functionen $\vartheta_i(u\,q)$ mittelst des Factors $\varpi e^{-\frac{uu'}{\pi}}$ auf die Functionen $\theta_i(u'q')$ reduciren, wenn man zugleich θ und θ_2 vertauscht. In analoge Beziehung treten die Werthe der Functionen $\chi_i(q)$ und $\chi_i(q')$; für $\chi\,\chi_2\,\chi_3$ werden Differentialgleichungen der ersten, für $\chi_1(q)$ eine solche der zweiten Ordnung aufgestellt. Ferner wird auf die approximative Richtigkeit der Gleichung

$$\frac{a}{r} = 1 + 2e^{-\pi\frac{a^2}{r^2}} + 2e^{-4\pi\frac{a^2}{r^2}} + 2e^{-9\pi\frac{a^2}{r^2}} + \ldots$$

aufmerksam gemacht, welche schon für mässige Werthe der willkürlichen Constanten a anwendbar ist und selbst nach r differentiirt werden kann. An den Werth $\lg q = -\pi\frac{K'}{K}$ wird mittelst der Substitution $m\operatorname{tg}^2\varphi = n\operatorname{tg}^2\varphi_1$ ein directer Nachweis dafür geknüpft, dass der Uebergang zum arithmetischen und geometrischen Mittel der Verwandlung von q in q^2 oder der Verdoppelung des Verhältnisses $\frac{K'}{K}$ entspricht.

Für $\varkappa^2 > \frac{1}{2}$ ist wegen $q' < e^{-\pi}$ im Allgemeinen die Berechnung der Functionen $\theta(u' q')$ vortheilhaft, und wie sich q' direct aus $\varkappa'$ oder $\varkappa$ ergibt, lässt sich u' ohne u durch Anwendung sowohl der GAUSS'schen Transformation, wie der LEGENDRE'schen Form der LANDEN'schen Substitution, direct aus φ berechnen. Die Vorschriften dazu enthält **Art. 40.** Im Nachtrag zu S. 138 ist bemerkt, dass wenn man das Imaginäre nicht ausschliessen will, bei complexen Werthen von q mod $q < e^{-\pi\sqrt{\frac{3}{4}}}$ gemacht werden kann.

Art. 41 untersucht die Reductionsformeln der Artt. 20 und 24 mit Bezug auf die Grösse des Moduls $\varkappa$. Hierbei sind je nach den Vorzeichen der Discriminante $G^3 - 27H^2$ und der Invariante H vier Fälle zu unterscheiden, und zwar führt, wenn man den Vortheil des kleinsten Moduls erreichen will, die erste Reductionsmethode stets zum Ziel, allerdings für $H < 0$ unter Anwendung des complementären Moduls. Für $G^3 < 27H^2$ wird q resp. $q' < 0{,}043214$, für $G^3 > 27H^2$ dagegen < 0.0018674.

Art. 42 beschäftigt sich mit der Reduction des allgemeinen elliptischen Integrals von der Form

$$\Omega = \int_{x_0}^{x} X\frac{dx}{\xi} = -\int_{y_0}^{y} X\frac{dy}{\eta} = \int_0^z X dz$$

wo X rational von x und ξ, resp. von y und η abhängt. Für

$$\eta^2 = 4y(\mathfrak{B}y^2 + 3\lambda y + \mathfrak{D})$$

lassen sich die durch Zerlegung von X entspringenden Integrale

$$v_m = \int_0^z y^m dz \quad \text{und} \quad w_n = \int_0^z \frac{dz}{(y-p)^n}$$

durch geeignete Recursionsformeln auf die drei Integrale $z\ v_1$ und w_1 zurückführen. Für

$$\eta^2 = \mathfrak{A}y^4 - 6\lambda y^2 + \mathfrak{E}$$

setzt man

$$v_m = \int_0^z y^{2m} dz\,, \qquad w_n = \int_0^z \frac{dz}{(y^2-p)^n}$$

und reducirt diese Grössen in analoger Weise auf die elliptischen Integrale der ersten, zweiten und dritten Gattung. Für

$$\eta^2 = 4y^3 - Gy - H\,, \qquad y_0 = \infty$$

endlich würde $v_m = \int_0^z y^m dz$ unendlich werden und man hat

$$w_n = \int_y^\infty \frac{dy}{(y-p)^n \eta}$$

mittelst $z\ w_1$ und $w_2 = \dfrac{\partial w_1}{\partial p}$ zu bestimmen.

Art. 43 leitet die Werthe des Factors r in den Gleichungen

$$z = ru\,, \qquad v_1 = rv\,, \qquad w_1 = rw$$

ab, wo $v = \int_0^u y^2 du$ und $w = \int_0^u \frac{du}{y^2 - p}$

vergleicht damit die Form $\int_0^u \frac{du}{y-p}$ und gibt den Grund an, wesshalb auch bei Beschränkung auf reelle Grössen complexe Werthe des Parameters p berücksichtigt werden müssen. Auch findet sich hier ein Umstand erörtert, der gewisse Beschränkungen in den Vorzeichen der vorkommenden Radicale erklärt, und der darin besteht, dass die zwischen x und y gefundene Gleichung $f(x\,y) = 0$ den beiden Differentialgleichungen $\frac{dx}{\xi} = \frac{dy}{\eta}$ und $\frac{dx}{\xi} + \frac{dy}{\eta} = 0$ genügt.

Art. 44 geht von den Ausdrücken für die dritten logarithmischen Differentialquotienten der Thetafunctionen aus und zeigt, wie durch zweimalige Integration die elliptischen Integrale zweiter Gattung als lineare Functionen von u und den ersten logarithmischen Differentialquotienten der Thetafunctionen erhalten werden. Die Constanten $\frac{\vartheta''}{\vartheta}$, $\frac{\vartheta_2''}{\vartheta_2}$ und $\frac{\vartheta_3''}{\vartheta_3}$ liefern die Werthe der ganzen Integrale; ihre Differenzen lassen sich durch die Potenzen der ϑ ausdrücken, analog den Differenzen der ersten logarithmischen Differentialquotienten, welche vermöge der Differentialformeln des Art. 33 Quotienten von Producten der Thetafunctionen gleich werden.

Im Nachtrag finden sich hier einige auf die Entwickelungen in trigonometrische und in Partialbruchsreihen bezügliche Artikel eingeschaltet. Solche Reihen werden im **Art. 44**[a] abgeleitet für die Logarithmen der Thetafunctionen und ihre Differentialquotienten, so wie für die Quotienten je zweier Thetafunctionen und die reciproken Werthe der letzteren.

Art. 44[b] enthält die Integrale der bezeichneten Ausdrücke nebst den sich daraus ergebenden Folgerungen.

Art. 44[c] leitet mittelst der zweiten logarithmischen Differentialquotienten die Entwickelungen der Quadrate, sowohl der Quotienten, als der ersten logarithmischen Differentialquotienten der Thetafunctionen ab, so wie die betreffenden Entwickelungen der ganzen Integrale zweiter Gattung.

Art. 44[d] beweist nach JACOBI durch Partialbruchzerlegung die Gleichungen

$$\frac{\vartheta_1'\vartheta_1(u+v)}{\vartheta_1 u\,\vartheta_1 v} = \frac{2}{i}\sum_{-\infty}^{\infty}\frac{\zeta^n}{1-q^{2n}\omega} = \frac{2}{i}\sum\frac{\omega^n}{1-q^{2n}\zeta}$$

wo $\omega = e^{2ui}$, $\zeta = e^{2vi}$, und gibt in reeller wie imaginärer Form eine Zusammenstellung der 16 coordinirten Formeln von analoger Beschaffenheit nebst den zugehörigen Convergenzbedingungen.

Im **Art. 44**[e] sind die auf Multiplication und Theilung der Argumente bezüglichen Transformationen der obigen Formel enthalten, wobei q in q^m resp. $q^{\frac{1}{m}}$ und allgemein in $q^{\frac{n}{m}}$ übergeht.

Art. 44[f] gibt Anwendung der Reihenentwickelungen auf die Integrale der zweiten und dritten Gattung, mit anderen Worten auf die Werthe der logarithmischen Differentialquotienten und die Logarithmen der Quotienten von der Form

$$\lg\frac{\vartheta(v+u)}{\vartheta(v-u)} \quad \text{und} \quad \frac{1}{2i}\lg\frac{\theta(v+ui)}{\theta(v-ui)}$$

wobei sich herausstellt, dass bei den Functionen ϑ_1 und ϑ_2 resp. θ_1 und θ_2 die reelle Periode π nicht vorhanden ist.

Art. 44[8] endlich enthält Betrachtungen über die Umkehr der Gleichung $v = u - fu$, wo fu eine Function mit reeller Periode bezeichnet, nebst Anwendung auf die Umkehr der elliptischen Integrale zweiter Gattung (wenn $w = \alpha u - \beta\frac{\vartheta' u}{\vartheta u} = \alpha v$), sowohl für das Argument (u, q) als für das Argument (u', q').

Art. 45 gibt eine Tabelle für die Werthe der den zwölf verschiedenen Werthen von y entsprechenden Integrale zweiter Gattung $v = \int_0^u y^2 du$ nebst den complementären Ausdrücken $\mathfrak{v} = \int_u^{\frac{1}{2}\pi} y^2 du$ und den sechs ganzen Integralen in der trigonometrischen Form. Für die letzteren werden bequeme Rechnungsmethoden, mit Hülfe der Additions- und Subtractionslogarithmen, abgeleitet.

Im **Art. 46** werden die Art. 34 aufgestellten Relationen, welche der Einführung der Argumente

$$(u, q^2) \qquad (u, q^{\frac{1}{2}}) \qquad (2u, q^2) \qquad (\tfrac{1}{2}u, q^{\frac{1}{2}}) \qquad (u, -q^2) \qquad (u, iq^{\frac{1}{2}})$$

entsprechen, in 24 Formeln von recurrirender Beschaffenheit zwischen den Thetafunctionen umgesetzt, deren logarithmische Differentiale gebildet und die zugehörigen Amplituden $\chi\,\chi'\,\psi\,\psi'\,\omega\,\omega'$ des Art. 35 angewandt.

Die gefundenen Ausdrücke können dazu dienen, um die Logarithmen der Thetafunctionen und ihre Differentialquotienten in Reihen zu entwickeln. Diess wird **Art. 47** an dem Beispiele von $\lg\vartheta u$ und $\frac{\vartheta' u}{\vartheta u}$ erläutert, wobei sich drei Entwickelungen für die unbestimmten Integrale der zweiten Gattung ergeben. Bei der nöthigen Convergenzuntersuchung zeigt sich, dass der Grenzwerth $\lim\frac{1}{n}\lg\frac{\vartheta(u, q^{\frac{1}{n}})}{\vartheta(q^{\frac{1}{n}})}$, der durch den Uebergang zum complementären Modul erhalten werden kann, aufhört periodisch zu sein, wesshalb die Gültigkeit der dritten, für grosse Werthe des Moduls vortheilhaften Entwickelung an die Bedingung $0 < \varphi < \pi$ geknüpft ist.

Art. 48 leitet den bezeichneten Grenzwerth ohne den Uebergang von q zu q' durch Benutzung der Relationen her, welche den Uebergang von q zu $\frac{1}{q}$ vermitteln. Durch Einführung der EULER'schen Function

$$X(\omega, q) = (1-\omega)X(q\omega, q) = \prod_0^\infty (1 - q^p\omega)$$

wird mittelst der Formel $\quad X(\omega, \frac{1}{q})X(q\omega, q) = 1$

gezeigt, dass die Transscendente $\chi_1(q)$ für $\mod q > 1$ aufhört eine Function von q

zu sein, während die vier Quotienten $\frac{\vartheta_i(u)}{\chi_1}$ gleichzeitig mit q in ihre reciproken Werthe übergehen.

Art. 49 wendet den Uebergang von (u, q) zu (u', q') auf die Integrale der zweiten Gattung an, wobei sich neben der LEGENDRE'schen Formel

$$KE' + K'E - KK' = \tfrac{1}{2}\pi$$

die Ausdrücke für die Werthe von $v = \int_0^u y^2\, du$ mittelst der Functionen $\theta_i(u'\, q')$ ergeben.

Der Uebergang zu den Integralen der dritten Gattung wird **Art. 50** durch Aufstellung des JACOBI'schen Formelsystems vermittelt, welches zwischen den Producten von vier Thetafunctionen verschiedener Argumente besteht. Das System enthält fünf Gruppen von Formelquaternionen, die sich lediglich durch die Indices der Thetafunctionen unterscheiden, während die eingehenden Argumente reciproken Gleichungen von der nämlichen Form, wie die Gleichungen zwischen den Producten Π der einzelnen Quaternionen unterworfen sind. Man schliesst daraus, dass überhaupt zu jeder Argumentenrelation eine entsprechende Formel zwischen den bezüglichen Thetaproducten, und zwar in jeder Quaternion, existiren muss.

Art. 51 werden durch Specialisirung der allgemeinen Formeln 24 Ausdrücke abgeleitet, welche nicht allein durch Division die verschiedenen Formen der Additionssätze des Art. 17 ergeben, sondern auch mittelst logarithmischer Differentiation nach v und Integration nach u 48 Integralformeln für die Werthe von $\lg\frac{\vartheta_i(v+u)}{\vartheta_i(v-u)}$ liefern.

Analoge Formeln ergeben sich **Art. 52** für

$$\lg\frac{\vartheta_3(u+v,\, q^2)\,\vartheta_2(v,\, q^2)}{\vartheta_2(u-v,\, q^2)\,\vartheta_3(v,\, q^2)}, \qquad \lg\frac{\vartheta_1(u+v,\, q^2)\,\vartheta(v,\, q^2)}{\vartheta(u-v,\, q^2)\,\vartheta_1(v,\, q^2)}$$

$$\lg\frac{\vartheta(\overline{\tfrac{1}{2}u+v},\, q^{\frac{1}{2}})\,\vartheta_3(\tfrac{1}{2}v,\, q^{\frac{1}{2}})}{\vartheta_3(\overline{\tfrac{1}{2}u-v},\, q^{\frac{1}{2}})\,\vartheta(\tfrac{1}{2}v,\, q^{\frac{1}{2}})}, \qquad \lg\frac{\vartheta_1(\overline{\tfrac{1}{2}u+v},\, q^{\frac{1}{2}})\,\vartheta_2(\tfrac{1}{2}v,\, q^{\frac{1}{2}})}{\vartheta_2(\overline{\tfrac{1}{2}u-v},\, q^{\frac{1}{2}})\,\vartheta_1(\tfrac{1}{2}v,\, q^{\frac{1}{2}})}$$

Durch Einführung der Amplituden

$$\varphi = \operatorname{am}\frac{2Ku}{\pi}, \qquad \varpi = \operatorname{am}\frac{2Kv}{\pi}$$

erhält man acht Integrale dritter Gattung.

Art. 53 zeigt, dass hier namentlich das Beispiel des Art. 24 in Betracht kommt, sofern für die canonische Form $\int_0^u \frac{du}{y \mp \sqrt{p}}$ mit

$$y = \cot\varphi,\quad \varkappa'\operatorname{tg}\varphi,\quad \operatorname{tg}\varphi,\quad \cot\varphi,\quad \frac{1}{\sin\varphi},\quad \varkappa\sin\varphi,\quad \sin\varphi \text{ und } \frac{1}{\sin\varphi}$$

die correspondirenden Parameterwerthe

$$\pm\sqrt{p} = \varkappa'\operatorname{tg}\varpi,\quad \cot\varpi,\quad \operatorname{tg}\varpi,\quad \cot\varpi,\quad \varkappa\sin\varpi,\quad \frac{1}{\sin\varpi},\quad \sin\varpi \text{ und } \frac{1}{\sin\varpi}$$

zu verbinden sind. Dabei wird für negative Werthe von p das Argument v rein imaginär, so dass für

$$\frac{2Kv}{\pi} = \int_0^{\varpi}\frac{d\varphi}{\varDelta(\varphi\,\varkappa)} = \int_0^{\varpi'}\frac{d\varphi}{\varDelta(\varphi\,\varkappa')}$$

$$i\sin\varpi', \quad i\,\mathrm{tg}\,\varpi', \quad i\,\mathrm{tg}\tfrac{1}{2}\varpi', \quad \sec\varpi' \text{ und } \frac{\Delta(\varpi'\varkappa')}{\cos\varpi'}$$

an die Stelle von

$$\mathrm{tg}\,\varpi, \quad \sin\varpi, \quad \mathrm{tg}\tfrac{1}{2}\varpi, \quad \cos\varpi \text{ und } \Delta\varpi$$

treten. Um den einem beliebigen complexen Parameter p entsprechenden complexen Werth $v = v_0 + v_1 i$ (oder $\bar{v} = v_0 - v_1 i$) zu bestimmen, sei $\bar{\varpi}$ der conjugirte Werth von ϖ und

$$\mathrm{tg}\,\varpi\,\Delta\bar{\varpi} = \mathrm{tg}\tfrac{1}{2}h e^{h'i}, \quad \text{ferner} \quad \frac{4Kv_0}{\pi} = \int_0^k \frac{d\varphi}{\Delta(\varphi\,\varkappa)}, \quad \frac{4Kv_1}{\pi} = \int_0^{k'} \frac{d\varphi}{\Delta(\varphi\,\varkappa')}$$

dann werden $h\,k\,k'$ Hypotenuse und Katheten eines rechtwinkligen sphärischen Dreiecks, in welchem die Seiten h und k den Winkel h' einschliessen.

Art. 54 enthält eine Zusammenstellung der 48 Ausdrücke für $\lg\frac{\vartheta_i(v+u)}{\vartheta_i(v-u)}$ mit Hülfe der von den Amplituden φ und ϖ abhängigen Integrale dritter Gattung. Dieselben zerfallen in Gruppen von je drei nur der Form nach verschiedenen Integralen.

Im **Art. 55** werden die Integrale $w = \int_0^u \frac{du}{y^2 - p}$ nach den Werthen von y geordnet und die zugehörigen Intervalle der reellen Parameter p angegeben; als Factor tritt die Grösse

$$\Pi = \frac{2K}{\pi}\sin\varpi\cos\varpi\,\Delta(\varpi,\varkappa)$$

auf. Dadurch entstehen zwölf Gruppen von Formelquaternionen für die Integrale logarithmischen Charakters, in denen y^2 den Werth p nicht annehmen darf, während u das Integrationsintervall durchläuft.

Durch die Vertauschung von v mit vi resp. $\mathrm{tg}\frac{1}{2}\varpi$ mit $i\,\mathrm{tg}\frac{1}{2}\varpi'$ gehen die Integrale w' trigonometrischen Charakters hervor, bei denen der Factor

$$\Pi' = \frac{2K}{\pi}\sin\varpi'\cos\varpi'\,\Delta(\varpi',\varkappa')$$

und die Functionen θ_i erscheinen. **Art. 56** enthält die betreffende Formeltabelle in analoger Anordnung wie der vorhergehende Artikel, und gibt die Reduction von $\frac{1}{2i}\lg\frac{\theta(v+ui)}{\theta(v-ui)}$ auf die reelle Form eines arc tg, wozu die Entwickelungen des Art. 44^f zu vergleichen.

Art. 57 zeigt, welche Modificationen die Ausdrücke der vorigen Artikel erleiden, wenn man bei ihrer Ableitung v nicht verändert, sondern u mit ui vertauscht, sowie wenn q' statt q eingeführt wird; endlich werden noch die complementären Integrale $\mathfrak{w} = \int_u^{\frac{1}{2}\pi} \frac{du}{y^2 - p}$, sowohl logarithmischer wie trigonometrischer Art betrachtet.

Im **Art. 58** schliessen sich hieran die ganzen Integrale dritter Gattung, welche durch unbestimmte Integrale der zweiten Gattung gegeben sind, und 24 Formeln für die logarithmischen und 48 Formeln für die trigonometrischen Integrale liefern, mit Rücksicht darauf, dass (unter Voraussetzung eines reellen Integrationswegs) y^2 nicht mit p zusammenfallen darf.

Für den Fall eines complexen Parameters hat man nach der Methode des Art. 53 $v = v_0 + v_1 i$ zu bestimmen. Dann lassen sich die Integrale w der dritten Gattung in ihren reellen und imaginären Theil $P + Qi$ zerlegen, dergestalt dass nicht allein P und Qi durch Vertauschung von v_0 und $v_1 i$ in einander übergehen, sondern auch durch Integrale mit reellem Parameter w_0 und w_1' ausgedrückt werden, welche aus w und w' hervorgehen, wenn man v durch v_0 resp. v_1 ersetzt. Gleichzeitig sollen sich ϖ und ϖ' in ϖ_0 und ϖ_1' verwandeln. Diese Reduction ist im **Art. 59** unter Anwendung der Amplituden

$$\psi_0 = \operatorname{am}\frac{2K}{\pi}(u + v_0)\ , \qquad \omega_0 = \operatorname{am}\frac{2K}{\pi}(u - v_0)$$

$$\psi_1' = \operatorname{am}\frac{2K}{\pi}(u + v_1 i)\ , \qquad \omega_1' = \operatorname{am}\frac{2K}{\pi}(u - v_1 i)$$

für das Beispiel

$$y = \frac{1}{\sin\varphi}\ , \qquad p = \varkappa^2 \sin^2\varpi$$

durchgeführt, welches bekanntlich die von JACOBI in den Vordergrund gestellte Form des Integrals

$$w = \int_0^u \frac{\sin^2\varphi\, du}{1 - \varkappa^2 \sin^2\varpi \sin^2\varphi}$$

liefert.

Art. 60 wird gezeigt, wie eine modificirte Bestimmung von Q auf das Additionstheorem für Integrale dritter Gattung führt, nebst den zugehörigen Formeln für Verdoppelung des Arguments (in den letzteren treten die Amplituden

$$\psi = \operatorname{am}\frac{2K}{\pi}(u + v)\ , \qquad \omega = \operatorname{am}\frac{2K}{\pi}(u - v)$$

$$\psi' = \operatorname{am}\frac{2K}{\pi}(u + vi)\ , \qquad \omega' = \operatorname{am}\frac{2K}{\pi}(u - vi)$$

auf). Bei dieser Gelegenheit werden die entsprechenden Additionssätze für die Integrale zweiter Gattung hinzugefügt nnd im Nachtrage eine Ergänzung dazu in der gewöhnlichen symmetrischen Form gegeben. Endlich finden sich die Ausdrücke zusammengestellt, in welche die Additionsformeln des Art. 17 sich verwandeln, wenn v in vi übergeht und

$$\frac{2Kv}{\pi} = \int_0^{\chi'} \frac{d\varphi}{\Delta(\varphi\,\varkappa')}\ , \qquad \psi = \operatorname{am}\frac{2K}{\pi}(u + vi)$$

gesetzt wird.

An Stelle der Amplituden ϖ_0 und ϖ_1', für welche die Gleichungen

$$\frac{2Kv_0}{\pi} = \int_0^{\varpi_0} \frac{d\varphi}{\Delta(\varphi\,\varkappa)} \qquad \text{und} \qquad \frac{2Kv_1}{\pi} = \int_0^{\varpi_1'} \frac{d\varphi}{\Delta(\varphi\,\varkappa')}$$

gelten, werden **Art. 61** mit Hülfe des Additionstheorems für den Parameter die Art. 53 definirten Amplituden k und k' eingeführt, wodurch sich vereinfachte Ausdrücke für P und Q ergeben, welche von den reellen Integralen w_k und w_k' abhängen, in denen v resp. durch $2v_0$ und $2v_1 i$ ersetzt ist. Die vorkommenden Amplituden sind

$$\psi = \operatorname{am}\frac{2K}{\pi}(u + 2v_0)\ , \qquad \omega = \operatorname{am}\frac{2K}{\pi}(u - 2v_0)$$

$$\psi' = \operatorname{am}\frac{2K}{\pi}(u + 2v_1 i)\ , \qquad \omega' = \operatorname{am}\frac{2K}{\pi}(u - 2v_1 i)$$

Die Werthe von P und Q enthalten ferner die Grösse $\varrho = \operatorname{mod} p$ und führen für $v_1 = 0$ resp. $v_0 = 0$ zu Verdoppelungssätzen mit Bezug auf das Argument des Parameters, wobei ϖ und ϖ' durch k und k' ersetzt werden.

Im **Schlussart. 62** endlich wird gezeigt, wie auch bei den übrigen Formen der Integrale dritter Gattung die Trennung in den reellen und imaginären Theil für den Fall complexer Parameter ausgeführt werden kann. Einer Zusammenstellung der für die Reduction dienlichen Relationen zwischen den bez. Thetafunctionen sind Reductionsformeln beigefügt, welche die Moduln λ, μ, ν der Grössen

$$\sin\varpi\ , \qquad \frac{\sin\varpi}{\Delta\varpi} \qquad \text{und} \qquad \operatorname{tg}\varpi$$

so wie die Amplituden $\varphi\ \psi\ \omega\ k$ resp. $\psi'\ \omega'\ k'$ enthalten.

Druck von Breitkopf und Härtel in Leipzig.

SECHSTER BAND. (IX. Bd.) Mit 10 Tafeln. hoch 4. 1864. brosch. Preis 19 ℳ 20 ₰.

W. G. HANKEL, Elektrische Untersuchungen. Fünfte Abhandlung: Maassbestimmungen der elektromotorischen Kräfte. Erster Theil. 1861. 1 ℳ 60 ₰.

—— Messungen über die Absorption der chemischen Strahlen des Sonnenlichtes. 1862. 1 ℳ 20 ₰.

P. A. HANSEN, Darlegung der theoretischen Berechnung der in den Mondtafeln angewandten Störungen. Erste Abhandlung. 1862. 9 ℳ.

G. METTENIUS, Ueber den Bau von Angiopteris. Mit 10 Tafeln. 1863. 4 ℳ 40 ₰.

W. WEBER, Elektrodynamische Maassbestimmungen, insbesondere über elektrische Schwingungen. 1864. 3 ℳ.

SIEBENTER BAND. (XI. Bd.) Mit 5 Tafeln. hoch 4. 1865. brosch. 17 ℳ.

P. A. HANSEN, Darlegung der theoretischen Berechnung der in den Mondtafeln angewandten Störungen. Zweite Abhandlung. 1864. 9 ℳ.

G. METTENIUS, Ueber die Hymenophyllaceae. Mit 5 Tafeln. 1864. 3 ℳ 60 ₰.

P. A. HANSEN, Relationen einestheils zwischen Summen und Differenzen und anderntheils zwischen Integralen und Differentialen. 1865. 2 ℳ.

W. G. HANKEL, Elektrische Untersuchungen. Sechste Abhandlung: Maassbestimmungen der elektromotorischen Kräfte. Zweiter Theil. 1865. 2 ℳ 80 ₰.

ACHTER BAND. (XIII. Bd.) Mit 3 Tafeln. hoch 4. 1868. brosch. Preis 24 ℳ.

P. A. HANSEN, Geodätische Untersuchungen. 1865. 5 ℳ 60 ₰.

—— Bestimmung des Längenunterschiedes zwischen den Sternwarten zu Gotha und Leipzig, unter seiner Mitwirkung ausgeführt von Dr. Auwers und Prof. Bruhns im April des Jahres 1865. Mit 1 Figurentafel. 1866. 2 ℳ 80 ₰.

W. G. HANKEL, Elektrische Untersuchungen. Siebente Abhandlung: Ueber die thermoelektrischen Eigenschaften des Bergkrystalles. Mit 2 Tafeln. 1866. 2 ℳ 40 ₰.

P. A. HANSEN, Tafeln der Egeria mit Zugrundelegung der in den Abhandlungen der Königl. Sächs. Gesellschaft der Wissenschaften in Leipzig veröffentlichten Störungen dieses Planeten berechnet und mit einleitenden Aufsätzen versehen. 1867. 6 ℳ 80 ₰.

—— Von der Methode der kleinsten Quadrate im Allgemeinen und in ihrer Anwendung auf die Geodäsie. 1867. 6 ℳ.

NEUNTER BAND. (XIV. Bd.) Mit 6 Tafeln. hoch 4. 1871. brosch. Preis 18 ℳ.

P. A. HANSEN, Fortgesetzte geodätische Untersuchungen, bestehend in zehn Supplementen zur Abhandlung von der Methode der kleinsten Quadrate im Allgemeinen und in ihrer Anwendung auf die Geodäsie. 1868. 5 ℳ 40 ₰.

—— Entwickelung eines neuen veränderten Verfahrens zur Ausgleichung eines Dreiecksnetzes mit besonderer Betrachtung des Falles, in welchem gewisse Winkel vorausbestimmte Werthe bekommen sollen. 1869. 3 ℳ.

—— Supplement zu der geodätische Untersuchungen benannten Abhandlung, die Reduction der Winkel eines sphäroidischen Dreiecks betr. 1869. 2 ℳ.

W. G. HANKEL, Elektrische Untersuchungen. Achte Abhandlung: Ueber die thermoelektrischen Eigenschaften des Topases. Mit 4 Tafeln. 1870. 2 ℳ 40 ₰.

P. A. HANSEN, Bestimmung der Sonnenparallaxe durch Venusvorübergänge vor der Sonnenscheibe mit besonderer Berücksichtigung des im Jahre 1874 eintreffenden Vorüberganges. Mit zwei Planigloben. 1870. 3 ℳ.

G. T. FECHNER, Zur experimentalen Aesthetik. Erster Theil. 1871. 3 ℳ.

ZEHNTER BAND. (XV. Bd.) Mit 7 Tafeln. hoch 4. 1874. brosch. Preis 21 ℳ.

W. WEBER, Elektrodynamische Maassbestimmungen, insbesondere über das Princip der Erhaltung der Energie. 1871. 1 ℳ 60 ₰.

P. A. HANSEN, Untersuchung des Weges eines Lichtstrahls durch eine beliebige Anzahl von brechenden sphärischen Oberflächen. 1871. 3 ℳ 60 ₰.

C. BRUHNS, Bestimmung der Längendifferenz zwischen Leipzig und Wien. 1872. 2 ℳ.

W. G. HANKEL, Elektrische Untersuchungen. Neunte Abhandlung: Ueber die thermoelektrischen Eigenschaften des Schwerspathes. Mit 4 Tafeln. 1872. 2 ℳ.

—— Elektrische Untersuchungen. Zehnte Abhandlung: Ueber die thermoelektrischen Eigenschaften des Aragonites. Mit 3 Tafeln. 1872. 2 ℳ.

C. NEUMANN, Ueber die den Kräften elektrodynamischen Ursprungs zuzuschreibenden Elementargesetze. 1873. 3 ℳ 80 ₰.

P. A. HANSEN, Von der Bestimmung der Theilungsfehler eines gradlinigen Maassstabes. 1874. 4 ℳ.

—— Ueber die Darstellung der graden Aufsteigung und Abweichung des Mondes in Function der Länge in der Bahn und der Knotenlänge. 1874. 1 ℳ.

—— Dioptrische Untersuchungen mit Berücksichtigung der Farbenzerstreuung und der Abweichung wegen Kugelgestalt. Zweite Abhandlung. 1874. 2 ℳ.

ELFTER BAND. (XVIII. Bd.) Mit 8 Tafeln. hoch 4. 1878. brosch. Preis 21 ℳ.

G. T. FECHNER, Ueber den Ausgangswerth der kleinsten Abweichungssumme, dessen Bestimmung, Verwendung und Verallgemeinerung. 1874. 2 ℳ.

C. NEUMANN, Ueber das von Weber für die elektrischen Kräfte aufgestellte Gesetz. 1874. 3 ℳ.

W. G. HANKEL, Elektrische Untersuchungen. Elfte Abhandlung: Ueber die thermoelektrischen Eigenschaften des Kalkspathes, des Berylles, des Idocrases und des Apophyllites. Mit 3 Tafeln. 1875. 2 ℳ.

P. A. HANSEN, Ueber die Störungen der grossen Planeten, insbesondere des Jupiter. 1875. 6 ℳ.

W. G. HANKEL, Elektrische Untersuchungen. Zwölfte Abhandlung: Ueber die thermoelektrischen Eigenschaften des Gypses, des Diopsids, des Orthoklases, des Albits und des Periklins. Mit 4 Tafeln. 1875. 2 ℳ.

W. SCHEIBNER, Dioptrische Untersuchungen, insbesondere über das Hansen'sche Objectiv. 1876. 3 ℳ

C. NEUMANN, Das Webersche Gesetz bei Zugrundelegung der unitarischen Anschauungsweise. 1876. 1 ℳ.

W. WEBER, Elektrodynamische Maassbestimmungen, insbesondere über die Energie der Wechselwirkung. Mit 1 Tafel. 1878. 2 ℳ.

ZWÖLFTER BAND. (XX. Bd.) hoch 4.

W. G. HANKEL, Elektrische Untersuchungen. Dreizehnte Abhandlung: Ueber die thermoelektrischen Eigenschaften des Apatits, Brucits, Coelestins, Prehnits, Natroliths, Skolezits, Datoliths und Axinits. Mit 3 Tafeln. 1878. 2 ℳ.

W. SCHEIBNER, Zur Reduction elliptischer Integrale in reeller Form. 1879. 5 ℳ.

—— Supplement zur Abhandlung über die Reduction elliptischer Integrale in reeller Form. 1880. 1 ℳ 50 ₰.

W. G. HANKEL, Elektrische Untersuchungen. Vierzehnte Abhandlung: Ueber die photo- und thermoelektrischen Eigenschaften des Flussspathes. Mit 3 Tafeln. 1879. 2 ℳ.

C. BRUHNS, Neue Bestimmung der Längendifferenz zwischen der Sternwarte in Leipzig und der neuen Sternwarte auf der Türkenschanze in Wien. 1880. 2 ℳ 40 ₰.

C. NEUMANN, Ueber die peripolaren Coordinaten. 1880. 1 ℳ 50 ₰.

—— Die Vertheilung der Elektricität auf einer Kugelcalotte. 2 ℳ 40 ₰.

Leipzig, October 1880. S. Hirzel.

SITZUNGSBERICHTE
DER
KÖNIGL. SÄCHSISCHEN GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN.
KLEINERE ABHANDLUNGEN.

BERICHTE über die Verhandlungen der Königlich Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig. Erster Band. Aus den Jahren 1846 und 1847. Mit Kupfern. gr. 8. 12 Hefte.

—— Zweiter Band. Aus dem Jahre 1848. Mit Kupfern. gr. 8. 6 Hefte.

Vom Jahre 1849 an sind die Berichte der beiden Classen getrennt erschienen.

—— Mathematisch-physische Classe. 1849 (3) 1850 (3) 1851 (2) 1852 (2) 1853 (3) 1854 (3) 1855 (2) 1856 (2) 1857 (3) 1858 (3) 1859 (4) 1860 (3) 1861 (2) 1862 (1) 1863 (2) 1864 (1) 1865 (1) 1866 (5) 1867 (4) 1868 (3) 1869 (4) 1870 (5) 1871 (7) 1872 (4 mit Beiheft) 1873 (7) 1874 (5) 1875 (4) 1876 (2) 1877 (2) 1878 (1) 1879 (1) 1880 (1).

—— Philologisch-historische Classe. 1849 (5) 1850 (4) 1851 (5) 1852 (4) 1853 (5) 1854 (6) 1855 (4) 1856 (4) 1857 (2) 1858 (2) 1859 (4) 1860 (4) 1861 (4) 1862 (1) 1863 (3) 1864 (3) 1865 (1) 1866 (4) 1867 (2) 1868 (3) 1869 (3) 1870 (3) 1871 (1) 1872 (1) 1873 (1) 1874 (2) 1875 (2) 1876 (1) 1877 (2) 1878 (3) 1879 (2).

Jedes Heft der Berichte ist einzeln zu dem Preise von 1 Mark zu haben.

SCHRIFTEN
DER FÜRSTLICH-JABLONOWSKI'SCHEN GESELLSCHAFT ZU LEIPZIG.

ABHANDLUNGEN bei Begründung der Königl. Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften am Tage der zweihundertjährigen Geburtsfeier Leibnizens herausgegeben von der Fürstl. Jablonowski'schen Gesellschaft. Mit dem Bildnisse von Leibniz in Medaillon und zahlreichen Holzschnitten und Kupfertafeln. 61 Bogen in hoch 4⁰. 1846. broch. Preis 15 *M*.

PREISSCHRIFTEN gekrönt und herausgegeben von der Fürstlich Jablonowski'schen Gesellschaft.

1. H. GRASSMANN, Geometrische Analyse geknüpft an die von Leibniz erfundene geometrische Charakteristik. Mit einer erläuternden Abhandlung von *A. F. Möbius*. (Nr. I der mathematisch-physischen Section.) hoch 4⁰. 1847. 2 *M*.
2. H. B. GEINITZ, Das Quadergebirge oder d. Kreideformation in Sachsen, mit Berücks. der glaukonitreichen Schichten. Mit 1 color. Tafel. (Nr. II d. math.-phys. Sect.) hoch 4⁰. 1850. 1 *M* 60 *Pf*.
3. J. ZECH, Astronomische Untersuchungen über die Mondfinsternisse des Almagest. (Nr. III d. math.-phys. Sect.) hoch 4⁰. 1851. 1 *M*.
4. J. ZECH, Astron. Untersuchungen üb. die wichtigeren Finsternisse, welche v. d. Schriftstellern des class. Alterthums erwähnt werden. (No. IV d. math.-phys. Sect.) hoch 4⁰. 1853. 2 *M*.
5. H. B. GEINITZ, Darstellung der Flora des Hainichen-Ebersdorfer und des Flöhaer Kohlenbassins. (Nr. V d. math.-phys. Sect.) hoch 4⁰. Mit 14 Kupfertafeln in gr. Folio. 1854. 24 *M*.
6. TH. HIRSCH, Danzigs Handels- und Gewerbsgeschichte unter der Herrschaft des deutschen Ordens. (Nr. I der historisch-nationalökonomischen Section.) hoch 4⁰. 1858. 8 *M*.
7. H. WISKEMANN, Die antike Landwirthschaft und das von Thünensche Gesetz, aus den alten Schriftstellern dargelegt. (Nr. II d. hist.-nat. ök. Sect.) 1859. 2 *M* 40 *Pf*.
8. K. WERNER, Urkundliche Geschichte der Iglauer Tuchmacher-Zunft. (Nr. III d. hist.-nat. ök. Sect.) 1861. 3 *M*.
9. V. BÖHMERT, Beiträge zur Gesch. d. Zunftwesens. (Nr. IV d. hist.-nat. ök. Sect.) 1862. 4 *M*.
10. H. WISKEMANN, Darstellung der in Deutschland zur Zeit der Reformation herrschenden nationalökonomischen Ansichten. (Nr. V d. hist.-nat. ök. Sect.) 1862. 4 *M*.
11. E. L. ETIENNE LASPEYRES, Geschichte der volkswirthschaftl. Anschauungen der Niederländer und ihrer Litteratur zur Zeit der Republik. (Nr. VI d. hist.-nat. ök. Sect.) 1863. 8 *M*.
12. J. FIKENSCHER, Untersuchung der metamorphischen Gesteine der Lunzenauer Schieferhalbinsel. (Nr. VI d. math.-phys. Sect.) 1867. 2 *M*.
13. JOH. FALKE, Die Geschichte des Kurfürsten August von Sachsen in volkswirthschaftlicher Beziehung. (Nr. VII d. hist.-nat. ök. Sect.) 1868. 8 *M*.
14. B. BÜCHSENSCHÜTZ, Die Hauptstätten des Gewerbfleisses im classischen Alterthume. (Nr. VIII d. hist.-nat. ök. Sect.) 1869. 2 *M* 80 *Pf*.
15. DR. HUGO BLÜMNER, Die gewerbliche Thätigkeit der Völker des classischen Alterthums. (Nr. IX d. hist.-nat. ök. Sect.) 1869. 4 *M*.
16. HERMANN ENGELHARDT, Flora der Braunkohlenformation im Königreich Sachsen. (Nr. VII d. math.-phys. Sect.) Mit 15 Tafeln. 1870. 12 *M*.
17. H. ZEISSBERG, Die polnische Geschichtschreibung des Mittelalters. (Nr. X d. hist.-nat. ök. Sect.) 1873. 12 *M*.
18. ALBERT WANGERIN, Reduction der Potentialgleichung für gewisse Rotationskörper auf eine gewöhnliche Differentialgleichung. (Nr. VIII d. math.-phys. Sect.) 1875. 1 *M* 20 *Pf*.
19. A. LESKIEN, Die Declination im Slavisch-Litauischen und Germanischen. (Nr. XI d. hist.-nat. ök. Sect.) 1876. 5 *M*.
20. DR. R. HASSENCAMP, Ueber den Zusammenhang des lettoslavischen und germanischen Sprachstammes. (Nr. XII d. hist.-nat. ök. Sect.) 1876. 3 *M*.
21. DR. PÖHLMANN, Die Wirthschaftspolitik der Florentiner Renaissance und das Princip der Verkehrsfreiheit. (Nr. XIII d. hist.-nat. ök. Sect.) 1878. 4 *M* 20 *Pf*.
22. DR. ALEXANDER BRÜCKNER, Die slavischen Ansiedelungen in der Altmark und im Magdeburgischen. (Nr. XIV d. hist.-nat. ök. Sect.) 1879. 4 *M* 20 *Pf*.

Leipzig. S. Hirzel.

Druck von Breitkopf & Härtel in Leipzig.

W. G. HANKEL,
MITGLIED DER KÖNIGL. SÄCHS. GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN.

ELEKTRISCHE UNTERSUCHUNGEN.

VIERZEHNTE ABHANDLUNG.

ÜBER DIE PHOTO- UND THERMOELEKTRISCHEN EIGENSCHAFTEN DES FLUSSSPATHES.

Des XII. Bandes der Abhandlungen der mathematisch-physischen Classe der Königl. Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften

No III.

MIT DREI TAFELN.

LEIPZIG
BEI S. HIRZEL.
1879.

ABHANDLUNGEN
DER
KÖNIGL. SÄCHS. GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN
ZU LEIPZIG.

MATHEMATISCH-PHYSISCHE CLASSE.

ERSTER BAND. (I. Bd.)*) Mit 3 Tafeln. hoch 4. 1852. brosch. Preis 13 ℳ 60 ₰.

A. F. MÖBIUS, Ueber die Grundformen der Linien der dritten Ordnung. Mit 1 Tafel. 1849. 2 ℳ 40 ₰.
P. A. HANSEN, Auflösung eines beliebigen Systems von linearischen Gleichungen. — Ueber die Entwickelung der Grösse $(1-2\alpha H+\alpha\alpha)^{-\frac{1}{2}}$ nach den Potenzen von α. 1849. 1 ℳ 20 ₰.
A. SEEBECK, Ueber die Querschwingungen elastischer Stäbe. 1849. 1 ℳ.
C. F. NAUMANN, Ueber die cyclocentrische Conchospirale und über das Windungsgesetz von Planorbis Corneus. 1849. 1 ℳ.
W. WEBER, Elektrodynamische Maassbestimmungen (Widerstandsmessungen). 1851. 3 ℳ.
F. REICH, Neue Versuche mit der Drehwaage. 1852. 2 ℳ.
M. W. DROBISCH, Zusätze zum Florentiner Problem. Mit 1 Tafel. 1852. 1 ℳ 60 ₰.
W. WEBER, Elektrodynamische Maassbestimmungen (Diamagnetismus). Mit 1 Tafel. 1852. 2 ℳ.

ZWEITER BAND. (IV. Bd.) Mit 19 Tafeln. hoch 4. 1855. brosch. Preis 20 ℳ.

M. W. DROBISCH, Ueber musikalische Tonbestimmung und Temperatur. 1852. 3 ℳ.
W. HOFMEISTER, Beiträge zur Kenntniss der Gefässkryptogamen. Mit 18 Tafeln. 1852. 4 ℳ.
P. A. HANSEN, Entwickelung des Products einer Potenz des Radius Vectors mit dem Sinus oder Cosinus eines Vielfachen der wahren Anomalie in Reihen, die nach den Sinussen oder Cosinussen der Vielfachen der wahren, excentrischen oder mittleren Anomalie fortschreiten. 1853. 3 ℳ.
—— Entwickelung der negativen und ungraden Potenzen der Quadratwurzel der Function $r^2 + r'^2 - 2rr'(\cos U \cos U' + \sin U \sin U' \cos J)$. 1854. 3 ℳ.
O. SCHLÖMILCH, Ueber die Bestimmung der Massen und der Trägheitsmomente symmetrischer Rotationskörper von ungleichförmiger Dichtigkeit. 1854. 80 ₰.
—— Ueber einige allgemeine Reihenentwickelungen und deren Anwendung auf die elliptischen Functionen. 1854. 1 ℳ 60 ₰.
P. A. HANSEN, Die Theorie des Aequatoreals. 1855. 2 ℳ 40 ₰.
C. F. NAUMANN, Ueber die Rationalität der Tangenten-Verhältnisse tautozonaler Krystallflächen. 1855. 1 ℳ.
A. F. MÖBIUS, Die Theorie der Kreisverwandtschaft. 1855. 2 ℳ.

DRITTER BAND. (V. Bd.) Mit 15 Tafeln. hoch 4. 1857. brosch. Preis 19 ℳ 20 ₰.

M. W. DROBISCH, Nachträge zur Theorie der musik. Tonverhältnisse. 1855. 1 ℳ 20 ₰.
P. A. HANSEN, Auseinandersetzung einer zweckmässigen Methode zur Berechnung der absoluten Störungen der kleinen Planeten. 1856. 5 ℳ.
R. KOHLRAUSCH und W. WEBER, Elektrodynamische Maassbestimmungen, insbesondere Zurückführung der Stromintensitäts-Messungen auf mechanisches Maass. 1856. 1 ℳ 60 ₰.
H. D'ARREST, Resultate aus Beobachtungen der Nebelflecken und Sternhaufen. Erste Reihe. 1856. 2 ℳ 40 ₰.
W. G. HANKEL, Elektrische Untersuchungen. Erste Abhandlung: Ueber der Messung der atmosphärischen Elektricität nach absolutem Maasse. Mit 2 Tafeln. 1856. 6 ℳ.
W. HOFMEISTER, Beiträge zur Kenntniss der Gefässkryptogamen. No. II. Mit 13 Tafeln. 1857. 4 ℳ.

VIERTER BAND. (VI. Bd.) Mit 29 Tafeln. hoch 4. 1859. brosch. Preis 22 ℳ 50 ₰.

P. A. HANSEN, Auseinandersetzung einer zweckmässigen Methode zur Berechnung der absoluten Störungen der kleinen Planeten. Zweite Abhandlung. 1857. 4 ℳ.
W. G. HANKEL, Elektrische Untersuchungen. Zweite Abhandlung: Ueber die thermo-elektrischen Eigenschaften des Boracites. 1857. 2 ℳ 40 ₰.
—— Elektrische Untersuchungen. Dritte Abhandlung: Ueber Elektricitätserregung zwischen Metallen und erhitzten Salzen. 1858. 1 ℳ 60 ₰.
P. A. HANSEN, Theorie der Sonnenfinsternisse und verwandten Erscheinungen. Mit 2 Tafeln. 1858. 6 ℳ.
G. T. FECHNER, Ueber ein wichtiges psychophysisches Grundgesetz und dessen Beziehung zur Schätzung der Sterngrössen. 1858. 2 ℳ.
W. HOFMEISTER, Neue Beiträge zur Kenntniss der Embryobildung der Phanerogamen. I. Dikotyledonen mit ursprünglich einzelligem, nur durch Zellentheilung wachsendem Endosperm. Mit 27 Tafeln. 1859. 8 ℳ.

FÜNFTER BAND. (VII. Bd.) Mit 30 Tafeln. hoch 4. 1861. brosch. Preis 24 ℳ.

W. G. HANKEL, Elektrische Untersuchungen. Vierte Abhandlung: Ueber das Verhalten der Weingeistflamme in elektrischer Beziehung. 1859. 2 ℳ.
P. A. HANSEN, Auseinandersetzung einer zweckmässigen Methode zur Berechnung der absoluten Störungen der kleinen Planeten. Dritte Abhandlung. 1859. 7 ℳ 20 ₰.
G. T. FECHNER, Ueber einige Verhältnisse des binocularen Sehens. 1860. 5 ℳ 60 ₰.
G. METTENIUS, Zwei Abhandlungen: I. Beiträge zur Anatomie der Cycadeen. Mit 5 Tafeln. II. Ueber Seitenknospen bei Farnen. 1860. 3 ℳ.
W. HOFMEISTER, Neue Beiträge zur Kenntniss der Embryobildung der Phanerogamen. II. Monokotyledonen. Mit 25 Tafeln. 1861. 8 ℳ.

---

*) Die eingeklammerten römischen Ziffern geben die Zahl des Bandes in der Reihenfolge der Abhandlungen beider Classen an.

ELEKTRISCHE UNTERSUCHUNGEN.

VIERZEHNTE ABHANDLUNG.

ÜBER DIE PHOTO- UND THERMOELEKTRISCHEN EIGENSCHAFTEN DES FLUSSSPATHES.

VON

W. G. HANKEL,

MITGLIED DER KÖNIGL. SÄCHS. GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN.

Des XII. Bandes der Abhandlungen der mathematisch-physischen Classe der Königl. Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften

N⁰ III.

MIT DREI TAFELN.

LEIPZIG

BEI S. HIRZEL.

1879.

Vom Verfasser übergeben den 15. Juli 1879.
Der Abdruck vollendet den 23. August 1879.

ELEKTRISCHE UNTERSUCHUNGEN

VON

W. G. HANKEL.

VIERZEHNTE ABHANDLUNG.

ÜBER DIE PHOTO- UND THERMOELEKTRISCHEN EIGENSCHAFTEN DES FLUSSSPATHES.

MIT DREI TAFELN.

Nachdem ich durch die Untersuchung der Krystalle des Topases, des Schwerspathes und des Aragonites gezeigt hatte, dass die bis dahin geltende Ansicht, wonach das Auftreten thermoelektrischer Spannungen auf Krystallen durch einen Mangel an Symmetrie in der Ausbildung der beiden Enden einer Axe bedingt sein sollte, zu eng ist, dass vielmehr schon ein Unterschied, wie er im rhombischen Systeme zwischen den verschiedenen Axen uns entgegentritt, genügt, um bei Temperaturveränderungen auf Krystallen dieses Systemes elektrische Differenzen hervorzurufen, so lag die Vermuthung nahe, dass auch in den sogenannten einaxigen Systemen die zwischen der Hauptaxe und den Nebenaxen vorhandene Verschiedenheit zur Erzeugung elektrischer Spannungen hinreichend sein werde; und ich habe die Richtigkeit dieser Ansicht durch den Nachweis der elektrischen Spannungen auf den Krystallen des Kalkspathes, Berylles, Idokrases (Vesuvianes), des Apophyllites, des Apatites und des Brucites dargethan.

In einer kurzen Uebersicht, welche ich über meine Untersuchungen der Topas-, Schwerspath- und Aragonitkrystalle im Jubelbande von Poggendorff's Annalen veröffentlichte, fügte ich S. 652 die Bemerkung bei: »Ob vielleicht selbst eine Ungleichheit, wie sie zwischen den Flächen- und Eckenaxen eines Würfelkrystalles vorhanden ist, unter sonst günstigen Umständen auch für eine thermoelektrische Erregung ausreichend sein kann, wage ich noch nicht zu entscheiden.«

Behufs einer Prüfung dieses Ausspruches habe ich früher wiederholt die farblosen Flussspathkrystalle von Stolberg und die gelben Krystalle desselben Minerales von Annaberg geprüft, jedoch ohne entscheidende Resultate zu erzielen.

Als ich im Jahre 1877 dunkelviolette Flussspathkrystalle von Weardale in Durham (England) erhielt, nahm ich mit Hoffnung auf günstigen Erfolg die Untersuchung von Neuem auf, weil ich die Empfindlichkeit meines Elektrometers seit den früheren Prüfungen be-

trächtlich erhöht hatte, und weil Brewster*) in seinem Verzeichnisse der thermoelektrischen Krystalle gerade den rothen und blauen Flussspath aufführt. Und in der That gelang es mir auch, auf den Oberflächen jener violblauen Krystalle bei der Abkühlung schwache positive Spannungen zu beobachten.

Da nun aber diese violblauen Flussspäthe starke Fluorescenz zeigen und nach Bestrahlung durch Sonnenlicht eine kurze Zeit im Dunkeln phosphoresciren, also für die Einwirkung des Lichtes empfindlich sind, und da ich nicht lange zuvor die Entstehung elektrischer Spannungen und Strömungen durch die Einwirkung des Lichtes auf in Wasser und Salzlösungen befindliche Metallplatten wahrgenommen hatte**), so hielt ich es für möglich, dass auf jenen Flussspäthen auch unter dem Einflusse des Lichtes elektrische Erregungen entstehen könnten.

Der Versuch zeigte, dass nicht blos durch das Sonnenlicht, sondern selbst durch das zerstreute Tageslicht sehr merkliche elektrische Spannungen auf der Oberfläche jener Krystalle hervorgerufen werden.

Eine vorläufige Mittheilung über diese photoelektrischen Erregungen der Flussspathkrystalle habe ich bereits in den Berichten der math.-phys. Klasse der Gesellschaft für 1877 S. 71—85 veröffentlicht, jedoch ohne dabei die durch Temperaturänderungen erzeugten elektrischen Spannungen in Betracht zu ziehen. Es ist wohl erklärlich, dass die neuen photoelektrischen Erscheinungen anfangs mein Interesse ganz in Anspruch nahmen, so dass ich mich in jener vorläufigen Mittheilung zu der Aeusserung veranlasst sah, ich hätte bis dahin noch keine Zeit gehabt, die infolge von Temperaturänderungen auf der Oberfläche der Flussspathkrystalle auftretende Elektricität ihrer Entstehung und Bedeutung nach näher zu untersuchen.

Nachdem es mir dann aber gelungen, eine grössere Anzahl für diese Untersuchungen brauchbarer Flussspäthe theils käuflich zu erwerben, theils durch die Güte meines Collegen, des Herrn Professor Zirkel, sowie des Herrn Bergraths Professor Weisbach in Freiberg geliehen zu erhalten, habe ich beide Erregungsweisen, sowohl

*) *The Edinb. Journal of Science*, conducted by David Brewster, Heft 2; übersetzt im Jahrb. der Chem. u. Phys. von Schweigger, 1825, Bd. 43. S. 94.

**) Berichte der math.-phys. Klasse der K. Sächs. Ges. der Wiss. 1875 S. 229; Wiedemann, Annal. d. Phys. u. Chem. Bd. I. S. 402.

die photoelektrische als auch die thermoelektrische, einer sorgfältigen und umfassenden Prüfung unterwerfen können.

In der folgenden Abhandlung werde ich zuvörderst die nöthigen Erläuterungen über die Art und Weise der Beobachtung jener beiden Erscheinungen, sowie über die Einrichtung und Leistung meines Elektrometers und über das von Brewster bei seinen Untersuchungen der Thermoelektricität angewandte Verfahren geben, darauf über die an einer Anzahl von Flussspathkrystallen sowohl nach dem Belichten als auch bei Temperaturänderungen gemessenen elektrischen Spannungen, meistens mit Hülfe von Abbildungen, in welche die beobachteten Ausschläge des Elektrometers eingetragen sind, berichten, und daran eine kurze Zusammenfassung der gewonnenen allgemeinen Resultate anschliessen.

I. Verfahren bei den Beobachtungen.

A. Vorbereitung der Krystalle.

Die Krystalle des Flussspathes werden durch Reibung ausserordentlich leicht und stark elektrisch, und es haftet die hierdurch erzeugte Elektricität unter Umständen sehr lange auf ihren Flächen. Sie lässt sich auch nicht sofort durch Anhauchen (Ueberziehen des Krystalles mit einem Beschlage von Wasser) oder durch Ueberstreichen mit einer Alkoholflamme beseitigen.

Hat man z. B. eine Fläche durch Ueberstreichen mit einem feinen Haarpinsel in einen elektrischen Zustand versetzt, und diese Fläche dann durch Anhauchen oder Annähern der Alkoholflamme für den Augenblick anscheinend unelektrisch gemacht, so würde die Annahme, dass der unelektrische oder höchstens sehr schwach elektrische Zustand, wie er unmittelbar nach den genannten Operationen beobachtet worden, fortbesteht, sehr irrig sein; es entwickeln sich vielmehr allmählich wieder sehr beträchtliche Spannungen, deren Höhe selbstverständlich von den vorhergegangenen Zuständen abhängt. Man muss das Anhauchen und Ueberstreichen mit der Flamme in längeren Zwischenzeiten wiederholen. Selbst ein ruhiges Stehenlassen durch 24 Stunden reicht nicht hin, um die durch Ueberfahren der Fläche

mit dem Haarpinsel erzeugte Elektricität zum Verschwinden zu bringen, wofür später ein Beispiel angeführt werden soll.

Bei dieser hohen Erregbarkeit für Elektricität durch Reibung durften die Flussspathkrystalle bei ihrer Prüfung nicht berührt werden; es empfahl sich daher dasselbe Verfahren, welches ich bisher bei meinen thermoelektrischen Beobachtungen befolgt habe. Die Krystalle wurden bis auf die zu prüfende Fläche, Kante oder Ecke in Kupferfeilicht, das sich in kleinen angemessen gestalteten kupfernen Kästchen oder Schälchen befand, eingehüllt. Durch Ueberstreichen mit einem feinen Haarpinsel wurden alle Feilspähne von den freien Theilen entfernt, und der Krystall nicht eher auf sein photo- oder thermoelektrisches Verhalten untersucht, als bis er durch öfteres Anhauchen und Bestreichen mit der Flamme dauernd unelektrisch geworden war.

In den kupfernen Schälchen oder Kästchen konnten die in dem Kupferfeilicht fest eingebetteten Krystalle ohne jede Reibung an der Oberfläche beliebig von einem Orte zum anderen getragen werden.

B. Elektrometer.

Zur Beobachtung und Messung der auf der Oberfläche der Flussspathkrystalle auftretenden photo- und thermoelektrischen Vorgänge diente das von mir construirte Elektrometer*). Ein an dem unteren Ende eines durch Schellack isolirten Messingstäbchens anhängendes sehr schmales Goldblättchen schwebt mit seinem unteren Ende zwischen zwei Messingscheiben, welche durch einen Commutator mit den beiden Polen einer Volta'schen Säule in Verbindung gesetzt werden können. Die Länge des aus sehr dünnem Golde hergestellten Blättchens beträgt bei dem zu den folgenden Beobachtungen benutzten Instrumente 70^{mm}, und der Abstand der beiden Scheiben 17^{mm}.

Die Beobachtung der Ausschläge des Goldblättchens geschieht mittelst eines Mikroskops von 40facher Vergrösserung, welches von der vorderen aus einer starken Messingplatte bestehenden Wand des Instrumentes getragen wird und sich mittelst einer Schraube in einer Führung seitlich etwas verschieben lässt. In dem Brennpunkte des

*) Ausführliches darüber in den Berichten der math.-phys. Klasse der Ges. d. Wissensch. für 1850 S. 74 (Pogg. Ann. Bd. 84. S. 28) und in diesen Abhandl. Bd. V. S. 292 und Bd. IX. S. 6.

Oculars befindet sich ein Glasmikrometer, auf welchem eine Länge von 10^{mm} in 100 Theile getheilt ist. Die Theilstriche erscheinen durch das Ocular gesehen in solchem Abstande, dass sich noch Zehntel der Theilung schätzen lassen.

Die galvanischen Elemente, welche zur Ladung der Scheiben dienen, sind schmale aus Kupfer und Zink zusammengelöthete Bügel, welche in kleine mit Wasser gefüllte Gläschen tauchen. Die Mitte der aus ihnen gebildeten Volta'schen Säule wird stets zur Erde abgeleitet, während die beiden Pole derselben, wie bereits erwähnt, durch einen Commutator, dessen mit Quecksilber gefüllte Näpfchen auf Schellackstäben ruhen, mit den Messingscheiben des Elektrometers in Verbindung gesetzt werden. Die Gläschen stehen wohl isolirt auf einem grossen Harzkuchen, und es bleibt die Spannung in den Polen der Säulen längere Zeit sehr nahe constant, wenn jeder Schluss zwischen den Polen oder einem Theile der Säule, sowie Erschütterungen und Aenderungen der Temperatur und der Belichtung vermieden werden.

Sind die Metallstücke frisch geputzt und das Wasser erneut worden, so ändert sich allerdings unmittelbar nach der Zusammenstellung der Säule die Spannung in ihren Polen, erreicht aber nach einigen Stunden einen nahe constanten Werth.

Durch Aenderung in der Temperatur der Elemente ändert sich, wie ich schon in meiner Abhandlung über die Messung der atmosphärischen Elektricität nach absolutem Maasse*) gezeigt habe, die Spannung, wenn die Elemente bereits längere Zeit im Wasser gestanden haben. Ebenso erzeugen Aenderungen in der Belichtung Schwankungen in den Spannungen der Pole**). Im Verlaufe eines Tages treten daher in diesen Spannungen gewisse Aenderungen ein. Durch in angemessenen Zwischenzeiten wiederholte Beobachtung des Ausschlages, welchen ein constantes Daniell'sches Element, dessen einer Pol mit dem Goldblättchen verbunden wird, während der andere zur Erde abgeleitet ist, hervorruft, lässt sich leicht die Spannung in den Polen der Säule prüfen, und sodann durch Hinzufügung oder Hinweg-

*) Diese Abhandl. Bd. V. S. 438.

**) Berichte der math.-phys. Klasse d. K. Sächs. Ges. d. Wiss. 1875 S. 299, und Wiedemann, Annal. Bd. I. S. 402.

nahme von Elementen der ursprüngliche Werth derselben wiederherstellen.

Ist die Empfindlichkeit des Elektrometers bei Anwendung einer beträchtlichen Anzahl von Elementen eine sehr grosse, so würde die Spannung eines Daniell'schen Elementes das Goldblättchen ganz aus dem Gesichtsfelde treiben. Wo es nun, wie bei den nachfolgenden Versuchen, nicht auf eine genaue Vergleichung der zu verschiedenen Zeiten gemachten Beobachtungen, sondern überhaupt nur auf die Erhaltung einer nahe gleichen Empfindlichkeit des Elektrometers ankommt, benutze ich anstatt jenes Elementes ein Zinn-Kupfer-Wasser-Element, dessen elektromotorische Kraft ungefähr $\frac{1}{3}$ eines Daniell'schen beträgt.

In Fällen, wo keine grosse Empfindlichkeit des Elektrometers verlangt wird, wenn es z. B. genügt, dass die Spannung eines Daniell-schen Elementes nur einen Ausschlag von 6 Skalentheilen des Ocularmikrometers erzeugt, lässt sich, wenn das Goldblättchen von beiden Scheiben gleich weit absteht*), die elektrische Spannung in diesen Scheiben unter Zuhülfenahme einiger Elemente Zinn-Kupfer-Wasser stets so weit abgleichen, dass während der Ableitung des Goldblättchens zur Erde beim Ein- und Umlegen des Bügels im Commutator das Goldblättchen fast unverändert an seinem Orte bleibt**). Bei diesem Zustande des Instrumentes wird man dann zweckmässig die dem Goldblättchen mitgetheilten Spannungen durch Umlegen des Commutators messen, und den bei abgeleitetem Goldblättchen noch vorhandenen sehr geringen Ausschlag in Rechnung ziehen. Durch dieses Verfahren wird der Ausschlag verdoppelt, und die Messung unabhängig von der Ruhelage des Blättchens.

Hat man jedoch die Empfindlichkeit des Elektrometers durch Vermehrung der Elemente in der Säule sehr erhöht, so ist es nicht mehr möglich, die Spannungen in den beiden Hälften der in ihrer Mitte abgeleiteten Säule und somit die Einwirkung der beiden Messingscheiben auf das Goldblättchen absolut gleich zu machen, oder vielmehr bei den fortwährend eintretenden, wenn auch nur sehr schwachen

*) Ueber ein Verfahren, dies mit Leichtigkeit zu erzielen, s. meine Maassbestimmungen der elektromotorischen Kräfte Bd. IX. S. 6 dieser Abhandlungen.

**) Der noch zurückbleibende sehr kleine Ausschlag ist eine Folge der im Goldblättchen durch seine Ableitung zur Erde erzeugten Elektricität.

Aenderungen in der Temperatur und Belichtung, sowie bei den Erschütterungen der Säule in diesem gleichen Zustande zu erhalten*). Man lässt dann den Bügel des Commutators in einer bestimmten Lage und beobachtet die bei Elektrisirung des Goldblättchens eintretenden Ausschläge.

Selbst bei hoher Empfindlichkeit des Instrumentes steigen die Ausschläge des Goldblättchens ziemlich nahe proportional der demselben zugeführten elektrischen Spannung noch bis zu einer Grösse von 30 Skalentheilen**). In der That wachsen sie jedoch infolge der Annäherung des Goldblättchens an die eine Scheibe etwas stärker als proportional den Spannungen, so dass bei einem Ausschlage von 30 Skth. die Correction ungefähr 1 Skth. beträgt, um welchen Betrag der gemessene Ausschlag also zu verkleinern ist.

Bei den in der oben erwähnten vorläufigen Mittheilung über die photoelektrischen Eigenschaften des Flussspathes angeführten Messungen war die Empfindlichkeit des Elektrometers bereits so weit erhöht, dass das Goldblättchen für den elektrischen Unterschied in den beiden Polen eines Elementes Zinn-Kupfer-Wasser einen Ausschlag von 25 Skth. gab; bei den nachfolgenden Beobachtungen wurde aber die Empfindlichkeit in den meisten Fällen nahe auf das Doppelte und selbst noch mehr gesteigert, so dass das eben erwähnte Element einen Ausschlag von 40 bis 50, ja selbst von 70 Skth. hervorrief***). Nur

---

*) Das physikalische Institut der hiesigen Universität liegt von der Mitte der Fahrbahn der nächsten gepflasterten Strasse ungefähr 30 Meter ab; das Elektrometer steht auf einer festen Fensterbank, der die Säule tragende Harzkuchen auf einem in der Ecke der Stube befindlichen Schranke. Ein auf der bezeichneten Strasse fahrender Wagen stört die Genauigkeit der Beobachtungen, jedoch nicht etwa durch das Erzittern des Goldblättchens, sondern durch die Erschütterung der Elemente in der Säule, in welcher sich die Spannungsverhältnisse in beiden Hälften nicht in genau gleicher Weise ändern, was natürlich eine, wenn auch meistens nur sehr schwache Bewegung des Goldblättchens zur Folge hat.

**) Ueber die Reduction der beobachteten Ausschläge s. diese Abhandlungen Bd. V. S. 421.

***) Das längere Zeit in Wasser gestandene Element Zinn-Kupfer-Wasser besass ungefähr ein Drittel der elektromotorischen Kraft eines Daniell'schen Elementes. Letzteres würde also einen Ausschlag von weit über 100 Skth. gegeben haben. Da sich nun $\frac{1}{10}$ Skth. noch wahrnehmen lässt, so konnte mit dem Elektrometer noch weniger als $\frac{1}{1000}$ der Spannung eines Daniell'schen Elementes direct beobachtet werden.

bei stark elektrischen Krystallen, oder wenn die durch äussere Umstände bedingten Störungen in dem elektrischen Zustande der umgebenden Luft eine sehr hohe Empfindlichkeit des Instrumentes nicht gestatteten, wurde die frühere oder auch eine noch geringere Empfindlichkeit benutzt.

C. Messung der elektrischen Spannungen.

Um die einzelnen Stellen einer Krystallfläche (Kante, Ecke) auf ihr photoelektrisches Verhalten zu prüfen, wurden die Krystalle, nachdem sie wie oben beschrieben in Kupferfeilicht so eingesetzt waren, dass nur die zu untersuchende Fläche (Kante, Ecke) frei blieb, von jeder etwa durch Reibung entstandenen Elektricität gesäubert, und dann dem Tageslichte oder dem directen Sonnenlichte oder dem elektrischen Kohlenlichte*) während angemessener Zeit ausgesetzt. Darauf wurden dieselben mit dem Kästchen oder Schälchen, in welchem sie eingebettet lagen, auf einen höher und tiefer stellbaren metallischen und zur Erde abgeleiteten, neben dem Elektrometer befindlichen Träger gestellt, und sodann mittelst der Bd. XIII. S. 344 und Bd. XIV. S. 379 dieser Abhandlungen beschriebenen Hebelvorrichtung das untere möglichst abgerundete Ende eines 52^{mm} langen und 0,7^{mm}

*) Das elektrische Kohlenlicht wurde durch eine dynamoelektrische Maschine (Lichtmaschine) von Siemens & Halske (System v. Hefner-Alteneck), welche eine Lichtstärke von ungefähr 4000 Kerzen gab, erzeugt. Zur Umdrehung der Trommel dieser Maschine diente eine Gasmaschine (von Otto in Deutz, neuerer Construction) von vier Pferdekräften. Da die Aufstellung der beiden Maschinen im hiesigen physikalischen Institute jedoch erst nach Durchführung der photoelektrischen Untersuchung vollendet war, so habe ich nur einen Theil der Beobachtungen, namentlich auf Flächen, welche ein besonderes Interesse darboten, mit der Bestrahlung durch das elektrische Kohlenlicht wiederholt. Bei der Siemens-Halske'schen Lampe steht die positive Kohle oben; es bildet sich in ihr eine kleine concave Fläche, so dass die stärkste Ausstrahlung des Lichtes etwas nach unten erfolgt. Dieser Umstand war für die Bestrahlung der Krystalle günstig; dieselben wurden in einigem Abstande von der elektrischen Lampe in etwas zur Lampe geneigter Lage auf den Tisch gestellt, so dass die Krystallfläche ungefähr 300^{mm} von der leuchtenden Kohlenspitze entfernt war. Die Dauer der Bestrahlung betrug meistens $\frac{1}{2}$ bis 1 Minute, unter Umständen aber auch 5 bis 10 Minuten. In dem letzten Falle wurde, wenn die Wärmestrahlen wenigstens zum grössten Theile abgehalten werden sollten, eine etwa zolldicke Schicht einer concentrirten Alaunlösung vor den Krystall gestellt.

dicken Platindrahtes, welcher durch einen zum Theil mit Siegellack überzogenen Glasstab isolirt, und an seinem oberen Ende mittelst eines ungefähr 200mm langen Drahtes mit dem das Goldblättchen des Elektrometers tragenden Messingstäbchen verbunden war, den einzelnen Punkten der freiliegenden Krystallfläche möglichst genähert. Eine Berührung der Krystallfläche mit dem Ende des Platindrahtes war durchaus zu vermeiden, weil sie Reibungselektricität zur Folge hatte; es geschah deshalb die Annäherung unter Beobachtung der Spitze mittelst einer Loupe.

Durch Stellschrauben war die Hebelvorrichtung so regulirt, dass beim Heben des Platindrahtes sein oberes Ende sich an eine zur Erde geführte Ableitung anlegte, wenn das untere Ende 24mm über dem Niveau der Krystallfläche stand. Beim Niederlassen wurde der Draht in der angegebenen Höhe oberhalb der Krystallfläche isolirt, und später die Bewegung durch eine Schraube gehemmt, sobald sein unteres Ende der Krystallfläche möglichst nahe gekommen war. So konnte der Ausschlag, welcher durch die Bewegung des Platindrahtes entstand, mittelst des Mikroskops wiederholt beobachtet werden, während die Hand die Hebelvorrichtung senkte und wieder hob.

Sollten die nach vorhergehender Erwärmung durch die Abkühlung eintretenden thermoelektrischen Spannungen untersucht werden, so wurden die in den kupfernen Gefässen befindlichen Krystalle in einem kleinen kupfernen Ofen mit doppelten Wänden, deren Zwischenraum mit Wasser ausgefüllt war, auf einer Temperatur von 100° C. (oder auch nach Umständen auf einer niedrigeren) je nach ihrer Grösse $\frac{1}{2}$ bis 3 Stunden hindurch erhalten, und sowohl nach dem Herausnehmen aus dem Ofen, als auch nach Verlauf kürzerer oder längerer Zeit untersucht. Die Erhitzung der Krystalle auf höhere Temperaturen als 100° C. geschah in einem anderen kleinen kupfernen Luftbade. Während der zur Abkühlung dienenden Zwischenzeit standen die Krystalle in einem dunkeln Raume (grosses Metallgefäss), um jede photoelektrische Erregung auszuschliessen.

Wenn es sich dagegen um die während der Erwärmung, also bei steigender Temperatur entstehenden elektrischen Spannungen handelte, so wurde der oben erwähnte metallische Träger entfernt und an seine Stelle der kleine Bd. XIII. S. 342 dieser Abhandlnngen beschriebene eiserne Ofen gebracht. In seine schüsselförmige mit Kupfer-



feilicht gefüllte Vertiefung wurden die Schälchen mit den in ihnen befindlichen Krystallen eingesetzt, und die Erwärmung durch eine im Innern des Ofens angebrachte kleine Alkohol- oder Gasflamme bewirkt. Die Temperatur wurde angenähert durch ein in das Kupferfeilicht eingesenktes Thermometer bestimmt. Um in diesem Falle die Einwirkung des Tageslichtes möglichst abzuhalten, war ein dichtes Rouleau zwischen den beiden Doppelfenstern heruntergelassen und durch vorgesetzte Papier- und Metallschirme das Licht soweit geschwächt, dass es eben nur noch zur Beobachtung der Annäherung der Platinspitze an die Krystallfläche und des Ausschlages des Goldblättchens im Elektrometer ausreichte.

Waren bei den zu prüfenden Krystallen jedoch nur sehr geringe Elektricitätserregungen zu erwarten, so liess sich das eben angegebene Verfahren nicht anwenden. Denn obwohl die Alkohol- oder Gasflamme völlig von Metall umgeben war und der abziehende Dampf durch ein mehr als fusshohes Rohr oberhalb des Krystalles austrat, so entstand doch durch das Brennen der Lampe in der Umgebung des Elektrometers eine elektrische Ladung der Luft, so dass das Goldblättchen bereits durch das blosse Senken des Platindrahtes einen (wenn auch unter günstigen Umständen nur schwachen) Ausschlag hervorbrachte. Dazu kam noch, dass durch die Nähe des kleinen Ofens trotz der vorgesetzten Metallschirme doch Luftströmungen in dem Gehäuse des Elektrometers entstanden, welche um so störender wurden, je grösser die Empfindlichkeit des Elektrometers war. In solchen Fällen blieb nichts übrig, als den betreffenden Krystall in etwas grösseren kupfernen Kästchen oder Schälchen je nach seiner Grösse nur 10 bis 25 Minuten in den erhitzten Ofen zu stellen, und dann sofort nach dem Herausnehmen in der gewöhnlichen Weise auf sein elektrisches Verhalten zu prüfen. Da beim Herausnehmen das Kupferfeilicht noch wärmer war, als die in ihm eingebetteten Krystalle, so stieg die Temperatur des Krystalles noch eine kurze Zeit, und es gelang so, die bei steigender Temperatur auftretende Elektricität sichtbar zu machen.

Ausser den vorstehend beschriebenen Verfahren lässt sich, wenn es nur im Allgemeinen auf die Nachweisung sowohl der photoelektrischen als auch der thermoelektrischen Spannungen auf den Flussspathkrystallen ankommt, ein gewissermassen umgekehrtes anwenden,

das bereits früher auch von P. Erman*) zur Untersuchung der Thermoelektricität des Topases benutzt worden ist. Das kupferne Kästchen, welches den Krystall in Kupferfeilicht eingesetzt enthält, wird, nachdem die zu prüfende Fläche während einer angemessenen Zeit dem Lichte ausgesetzt worden, oder nachdem der zuvor erhitzte Krystall fast erkaltet ist, auf eine isolirende Unterlage gestellt, und mit dem Goldblättchen des Elektrometers in leitende Verbindung gebracht. Nähert man dann irgend einer mit einer elektrischen Spannung versehenen Stelle der freien Oberfläche des Krystalles einen Leiter, so zeigt das Goldblättchen einen Ausschlag, der durch seine Richtung gerade auf eine der an der betreffenden Stelle der Krystallfläche vorhandenen entgegengesetzte Polarität hinweist.

D. Bedeutung und Werth der gemessenen Ausschläge.

Bei meinen thermoelektrischen Untersuchungen hatte ich mir die Aufgabe gestellt, nicht blos im Allgemeinen zu beobachten, ob ein Krystall überhaupt elektrisch wird, sondern vielmehr speciell die Vertheilung der positiven und negativen Elektricität auf den einzelnen Flächen derselben zu ermitteln, und möglichst annährend in ihrer relativen Intensität zu bestimmen, und zwar sowohl bei steigender als auch bei sinkender Temperatur. Die Erreichung dieses Zieles macht das zuvor beschriebene Verfahren durchaus nothwendig. Die dabei erforderliche Hinzufügung einer 200^{mm} langen Drahtleitung, welche den der Krystallfläche zu nähernden Platindraht mit dem das Goldblättchen tragenden Messingstäbchen verbindet, hat nun aber den Uebelstand zur Folge, dass die durch Vertheilung seitens der elektrischen Krystallfläche im Platindrahte erzeugte freie Elektricität durch ihre Verbreitung über einen längeren Leiter an dem Ende des Goldblättchens mit einer geringeren Intensität auftritt. Es muss also der eben bezeichnete Uebelstand durch eine grössere Empfindlichkeit des Elektrometers ausgeglichen werden.

Die Ausschläge im Elektrometer werden bei dem von mir angewandten Verfahren auch noch durch den Umstand verringert, dass nicht die ganze Vertheilungswirkung zur Erscheinung kommt. Es ist

*) Abhandl. der Berl. Akad. 1829 S. 57.

oben erwähnt worden, dass, wenn das untere Ende des Platindrahtes mittelst eines Hebelarmes 24^{mm} über das Niveau der Krystallfläche gehoben ist, sein oberes Ende an eine zur Erde geführte Ableitung stösst, und in dieser Stellung der Platindraht also ebenfalls mit der Erde leitend verbunden ist. Liegt nun unterhalb des unteren Endes des Platindrahtes eine elektrische Krystallfläche, so hält diese auch in dem Abstande von 24^{mm} stets noch eine gewisse Menge Elektricität in dem abgeleiteten Drahte gebunden; beim Niederlassen des Platindrahtes bis zur möglichsten Annäherung seines unteren Endes an die Krystallfläche wird daher nicht der ganze Betrag der durch die Vertheilung seitens der Krystallfläche erzeugten Elektricität frei, sondern nur der Theil, um welchen diese Vertheilungswirkung bei möglichster Annäherung des unteren Endes an die Krystallfläche grösser ist, als bei 24^{mm} Abstand von derselben.

Sollte der ganze Betrag dieser Vertheilung zur Wirkung auf das Goldblättchen kommen, so musste, während der Platindraht gehoben war, eine zur Erde abgeleitete Kupferscheibe zwischen sein unteres Ende und die Krystallfläche geschoben, und nachdem der Draht etwas niedergelassen, so dass sein oberes Ende die Ableitung nicht mehr berührte, wieder entfernt werden. Ich habe bisweilen eine solche Vorrichtung angewandt; die Metallscheibe wurde von einem starken Metallarme getragen, welcher mittelst einer verticalen am Fensterrahmen befestigten Axe in horizontaler Ebene beweglich war; die Metallscheibe liess sich durch Drehung des Armes zwischen das Drahtende und die Krystallfläche einschieben und wieder entfernen.

Das einfachste Mittel, um den ganzen Betrag der Vertheilung zur Wirkung kommen zu lassen, hätte die Entfernung des Platindrahtes auf einen grösseren Abstand dargeboten. Indess ist, ganz abgesehen von anderen Schwierigkeiten, eine zu grosse Hubhöhe des Drahtes nicht immer anwendbar, weil der elektrische Zustand in der Nähe des Elektrometers auch bei der grössten Sorgfalt sich nicht fortdauernd so erhalten lässt, dass bei beträchtlicher Senkung des Platindrahtes nicht bereits ein Ausschlag im Elektrometer blos infolge dieser Ortsveränderung eintritt.

In welchem Verhältnisse sich durch das Verbleiben des unteren Endes des Platindrahtes in einem Abstande von 24^{mm} über dem Ni-

veau der Krystallfläche die Ausschläge vermindern, werden die folgenden Angaben nachweisen.

Auf den S. 210 erwähnten metallischen Träger, auf welchen sonst die kleinen kupfernen Schälchen mit den zu prüfenden Krystallen gesetzt wurden, war eine ebengeschliffene Kupferplatte von 73^{mm} Durchmesser, jedoch durch Schellack von demselben isolirt, horizontal gelegt; durch einen mit Schellackstäben versehenen Commutator konnte dieselbe mit dem einen oder dem andern Pole einer aus Zink-Kupfer-Wasser-Elementen gebildeten Säule verbunden werden, während der zweite Pol derselben zur Erde abgeleitet war. Der Mitte dieser Kupferplatte, welche also aus der Säule eine Elektrisirung empfangen hatte, wurde nun das untere Ende des Platindrahtes ebenso genähert, wie sonst der Krystallfläche, d. h. aus der anfänglichen abgeleiteten Lage in isolirtem Zustande um 24^{mm} gesenkt. Bei dieser Bewegung des Platindrahtes bewirkte also nur der Ueberschuss der Vertheilungswirkung bei grosser Nähe über die im Abstande von 24^{mm} bereits eingetretene den Ausschlag des Elektrometers.

Wenn dagegen der Platindraht zuerst der im nicht-elektrischen Zustande befindlichen Kupferplatte genähert, und dann durch Einlegen des Commutatorbügels die Kupferplatte mit dem Pole der Säule verbunden wurde, so hing der Ausschlag im Elektrometer von dem Betrage der ganzen Vertheilungswirkung ab.

Unter den gegebenen Umständen (Durchmesser der Kupferplatte 73^{mm}, Hebung des Platindrahtes 24^{mm}) betrug der Ausschlag im ersten Falle nahe die Hälfte des im zweiten Falle eintretenden, d. h. es wurde nur nahe die Hälfte des Ausschlages beobachtet, welcher eintreten müsste, wenn der Platindraht aus sehr grosser Entfernung der Kupferplatte genähert würde.

Die Ausschläge sind in beiden Fällen bei Ladung der Platte durch dieselbe Säule von der Grösse der Platte abhängig. Wenn z. B. der Ausschlag im ersten Falle (wo nur die Differenz der Vertheilungswirkungen in der Anfangs- und Endlage zur Wirkung kommt) bei der Kupferplatte von 73^{mm} Durchmesser 13,6 Skth. betrug, so stieg er unter gleichen Umständen bei einer Platte von 95^{mm} Durchmesser auf 14,9 Skth.; sank dagegen bei einer Platte von 40^{mm} Durchmesser auf 12,9, und bei einer Platte von $20,7^{mm}$ Durchmesser auf 10,9 Skth.

Im zweiten Falle (wo also die ganze Vertheilungswirkung gemessen wurde) betrug der Ausschlag bei der Platte von 73^{mm} Durchmesser 27 Skth., bei der Platte von 95^{mm} 31, bei der Platte von 40^{mm} 22,5 und bei der Platte von 20^{mm} 17,5 Skth.

Während bei den beiden Platten von 73 und 95^{mm} Durchmesser nur nahe 0,5 der Gesammtvertheilung zur Wirkung kommen, wenn der Draht in 24^{mm} Höhe abgeleitet ist und dann der Platte möglichst genähert wird, erhöht sich bei gleicher Hubhöhe für kleinere Platten diese Wirkung bis 0,57 für 40^{mm}, und bis 0,62 für 20^{mm} Durchmesser.

Diese Angaben gestatten eine Schätzung des Einflusses, welchen die Grösse der Flächen bei den im Folgenden untersuchten Krystallen auf die Ausschläge des Goldblättchens ausübt. Die Grösse dieser Krystallflächen änderte sich von 4 bis zu 55^{mm} Seitenlänge.

Die Spitze des Platindrahtes wurde unter Beobachtung mittelst einer schwach vergrössernden Loupe der Metallplatte möglichst genähert; eine geringe Schwankung in dem kleinen Abstande zwischen der Spitze und der Platte, der also jedes Mal nur nach dem Augenmaasse eingestellt wurde, hat, wie die folgenden Messungen zeigen, auf die Grösse des Ausschlages keinen merklichen Einfluss.

Wenn der äusserste Abstand, bis auf welchen die Spitze des Platindrahtes sich über das Niveau der Metallfläche erhob, stets 24^{mm} blieb, entstand bei Verbindung der Platte mit derselben Säule bei möglichster Annäherung der Spitze des Platindrahtes an die Oberfläche der Platte ein Ausschlag von 15 Skth.; bei Annäherung bis auf 1^{mm} Abstand an die Platte betrug der Ausschlag 14,5, bei Annäherung bis auf 5^{mm} 11,7 Skth., bei Annäherung bis auf 7,5^{mm} 10,6 Skth., und bei Annäherung bis auf 15^{mm} 8,7 Skth.*)

Wenn nun auch mein Elektrometer noch weniger als $\frac{1}{1000}$ der Spannung eines Daniell'schen Elementes bei unmittelbarer Zuführung zum Goldblättchen wahrzunehmen gestattet, so sind doch die schwächsten auf den Krystallflächen überhaupt noch wahrnehmbaren elektrischen Spannungen infolge des angewandten Verfahrens um Vieles

*) Ich bemerke, dass der Platindraht zwar bei der grössten Annäherung an die Platte senkrecht über der Mitte derselben stand, dagegen beim Heben mittelst der Hebelvorrichtung (Länge des Hebelarmes 150^{mm}) sich etwas zur Seite stellte.

grösser. Es wird ja bei diesem Verfahren, wie ich zuvor nachgewiesen, nicht die Spannung unmittelbar in unveränderter Grösse dem Goldblättchen zugeführt, sondern nur die Vertheilungswirkung auf den genäherten Platindraht, und auch diese nicht einmal in ihrem vollen Betrage, sondern nur zur Hälfte oder zu Zweidrittheilen gemessen.

Um sich ein Urtheil über die Bedeutung oder den Werth der auf den Krystallflächen gemessenen Ausschläge zu bilden, mögen die folgenden Angaben dienen.

Das Elektrometer besass eine solche Empfindlichkeit, dass die elektrische Differenz an den Enden eines aus Zinn, Kupfer und Wasser gebildeten Elementes einen Ausschlag von nahe 50 Skth. gab; ein Daniell'sches Element würde daher einen Ausschlag von ungefähr 150 Skth. bewirkt haben. Als nun der eine Pol des Daniell'schen Elementes mit der Kupferplatte von 73^{mm} Durchmesser verbunden wurde, und der Platindraht mittelst der Hebelvorrichtung aus 24^{mm} Abstand der Platte möglichst genähert wurde, entstand im Elektrometer ein Ausschlag von 2,3 Skth.; bei halb so grosser Empfindlichkeit des Elektrometers, wie sie ja auch sehr häufig benutzt worden, würde also dieselbe Ladung der Platte nur einen Ausschlag von 1,15 Skth. hervorbringen. Die geringste auf der Kupferplatte durch das angewandte Verfahren noch wahrnehmbare Spannung würde also ungefähr $\frac{1}{20}$ der Spannung eines Daniell'schen Elementes betragen *).

*) Zur Charakterisirung der Empfindlichkeit meines Elektrometers will ich noch einen Versuch mittheilen, der mir seiner Eigenthümlichkeit wegen nicht ohne Interesse zu sein scheint.

Auf die oben mehrfach erwähnte, aber zur Erde abgeleitete Kupferscheibe von 73^{mm} Durchmesser wurde eine Zinkscheibe von 40^{mm} Durchmesser gelegt, und der durch Abschaben blank gemachten Mitte dieser Zinkscheibe das untere Ende des Platindrahtes mittelst der Hebelvorrichtung möglichst genähert. Durch seine Ableitung zur Erde besitzt das Zink eine positive Spannung, infolge deren es auf den genäherten Platindraht vertheilend wirkt. Es giebt daher z. B. bei einer Empfindlichkeit, bei welcher ein Element Zinn-Kupfer-Wasser einen Ausschlag von 50 Skth. hervorbringt, bei Annäherung des Platindrahtes das Elektrometer einen positiven Ausschlag von 1,7 Skth. Wird der Platindraht bis zur Berührung des blanken Zinkes gesenkt, so kehrt infolge der Ableitung zur Erde das Goldblättchen in seine anfängliche Lage zurück.

Das untere abgerundete Ende des 0,7^{mm} dicken Platindrahtes bildet nun aber mit der von ihm berührten Zinkfläche einen Condensator: auf der Platinspitze ist

Die eben gemachten Angaben sollen nur dienen, um überhaupt eine Vorstellung über die Grösse der weiterhin auf den Flussspathkrystallen beobachteten elektrischen Spannungen zu geben. Es sind ja die untersuchten Flächen in der Form und in der Vertheilung der Elektricität von der zuvor elektrisirten Metallplatte gar sehr verschieden*). Ferner wurde das untere Ende des Platindrahtes nicht blos der Mitte, sondern auch den Rändern und Ecken der Krystallfläche genähert; je nach der Lage der untersuchten Stelle wird aber natürlich das Verhältniss zwischen der daselbst vorhandenen Spannung und dem durch Annäherung des Platindrahtes entstehenden Ausschlage des Goldblättchens sich ändern.

E. Ueber die Empfindlichkeit des von Brewster bei seinen thermoelektrischen Beobachtungen angewandten Verfahrens.

Während Hauy stets die Ansicht hegte, dass die damals an einigen wenigen Krystallen beobachtete Eigenschaft, durch Temperaturänderungen elektrisch zu werden, durch einen Mangel an Symmetrie in der Gestaltung derselben bedingt sei, scheint dagegen Brewster diese Bedingung nicht für nöthig erachtet zu haben, wie man wohl aus seiner Prüfung einer Reihe von Krystallen, bei denen ein Hemimorphismus nicht beobachtet worden, schliessen muss; und es ist auch Brewster**) gelungen, die Anzahl der thermoelektrischen Krystalle erheblich zu vermehren.

Leider hat Brewster gar keine speciellen Angaben über seine Beobachtungen gemacht, sondern einfach die von ihm elektrisch befundenen Krystalle in ein kurzes Verzeichniss zusammengestellt. In diesem Verzeichnisse findet sich nun auch der rothe und blaue Flussspath aufgeführt, aber, wie bereits erwähnt, ohne irgend eine Bemerkung über die Beschaffenheit der elektrischen Spannung und den Ort, wo sie wahrgenommen worden.

---

negative und auf der Zinkfläche positive Elektricität gebunden. Wird der Platindraht gehoben (jedoch nicht bis zur Berührung der oberen Ableitung), so zeigt das Elektrometer infolge der freiwerdenden negativen Elektricität einen negativen Ausschlag von 2 Skth.

*) Es kommt z. B. selbst öfter vor, dass die Mitte einer Krystallfläche negativ, der Rand derselben aber positiv ist, oder umgekehrt.

**) S. oben S. 204.

Die Untersuchung, ob eine Stelle eines Krystalles positive oder negative Elektricität besass, war übrigens bei dem von Brewster angewandten Verfahren ganz unmöglich. Um nämlich zu prüfen, ob ein Krystall elektrisch war, näherte er denselben sehr kleinen Stückchen des im Innern der Röhre von Arundo phragmites befindlichen dünnen Häutchens und schloss aus ihrer Anziehung auf eine an der Krystallfläche vorhandene elektrische Spannung.

Brewster hat (wenigstens findet sich in seiner Mittheilung keine weitere Bemerkung) jedenfalls die Krystalle, um sie auf ihr elektrisches Verhalten zu prüfen, in die Hand genommen, und bei der bereits oben S. 205 hervorgehobenen ausserordentlich leichten elektrischen Erregung der Flussspathkrystalle durch Reibung könnte man fürchten, dass Brewster durch Reibungselektricität getäuscht worden sei. Indess der Zusatz »rother und blauer« Flussspath scheint (natürlich unter der Voraussetzung, dass er farblose Krystalle, jedoch ohne Erfolg geprüft habe) anzuzeigen, dass von ihm nicht Reibungselektricität, sondern eine andere gerade diesen farbigen Flussspäthen eigenthümliche elektrische Erregung beobachtet worden ist.

Hat nun aber Brewster in der That, wie er angiebt, thermoelektrische Spannungen auf seinen Flussspathkrystallen beobachtet? Diese Frage wird wahrscheinlich verneint werden müssen, indem nach meinen vielfachen Untersuchungen der Flussspäthe die durch Temperaturänderung erzeugte elektrische Spannung zu gering ist, um durch das von Brewster angewandte Beobachtungsverfahren noch wahrgenommen werden zu können, wie sich leicht nachweisen lässt.

Da ich gerade keine dünnen Häutchen von Arundo phragmites zur Hand hatte, so legte ich sehr kleine Stückchen eines äusserst dünnen Scheibchens von Hollundermark*) auf die zur Erde abgeleitete Kupferplatte von 73^{mm} Durchmesser, befestigte an dem unteren Ende des 0,7^{mm} dicken Platindrahtes eine Kugel von 13^{mm} Durchmesser und näherte dieselbe mittelst der Hebelvorrichtung den kleinen Hollundermarkstückchen. Für die kleinste Ladung, welche der Kugel mitzutheilen war, um eine Anziehung des dicht unter ihr liegenden Hollundermarks zu ermöglichen, musste die Kugel mit dem einen Pole

*) Spätere Versuche zeigten, dass Stückchen der dünnen Haut von Arundo phragmites keine geringeren Werthe für die zur Hebung eben nöthige elektrische Spannung gaben, als die oben benutzten Stückchen Hollundermark.

einer Säule aus 20 Daniell'schen Elementen, deren anderer Pol zur Erde abgeleitet war, verbunden werden. Durch die grosse Annäherung der Kugel an die Kupferplatte wurde die Dichtigkeit auf dem untersten Punkte der Kugel, welcher über dem Stückchen Hollundermark lag, beträchtlich grösser, als in der Mitte der isolirten Kupferplatte von 73mm Durchmesser, wenn sie mit derselben Säule verbunden war. Aber auch selbst wenn eine Spannung, wie sie sich in der Mitte dieser Kupferplatte durch ihre Verbindung mit der genannten Säule findet, hingereicht hätte, die Anziehung des kleinen Hollundermarkstückchens zu bewirken, so wäre diese Spannung doch stets noch grösser gewesen, als ich sie je auf einer (nach einer Erhitzung auf 100°) erkaltenden Fläche eines Flussspathes beobachtet habe*); die grösste Spannung auf den erkaltenden Flussspathkrystallen ist wohl höchstens gleich der durch 10 Daniell'sche Elemente in der Mitte jener Kupferplatte erzeugten Spannung zu setzen; eine solche Spannung reicht aber nicht aus, um das Stückchen Hollundermark zu heben.

Dagegen kann durch die Belichtung der Flussspathkrystalle eine Spannung erzeugt werden, welche die oben bezeichnete Spannung von 20 Daniell'schen Elementen erreicht und sogar übertrifft. Da nun Brewster, welcher von der elektrischen Erregung der Flussspathkrystalle durch das Licht keine Ahnung hatte, seine Versuche jedenfalls am hellen Tage vorgenommen hat, was ja schon durch die genaue Beobachtung der Anziehung der Häutchen gefordert wurde, wobei möglicherweise die Krystalle zufällig sogar dem Sonnenlichte ausgesetzt gewesen sein können, so ist es für mich das Wahrscheinlichste, dass die durch Brewster beobachteten Anziehungen nicht sowohl eine Folge der Thermoelektricität, als vielmehr der Photoelektricität dieser Krystalle gewesen sind. Dann müssen aber unter der von Brewster gebrauchten Bezeichnung »rother und blauer« Flussspath die violblauen Krystalle von Weardale oder Alston Moor verstanden werden, denn die mehr rothbraunen sind, wie wir später sehen werden, zwar thermoelektrisch erregbar, haben mir aber durch-

*) Ob etwa auf frisch aus der Grube entnommenen und mässig stark erhitzten Flussspathkrystallen eine viel grössere Spannung erzeugt werden kann, als auf den mir vorliegenden, vermag ich aus Mangel an solchen Krystallen nicht zu entscheiden.

aus kein Anzeichen von einer durch die Einwirkung des Tages- oder Sonnenlichtes entstehenden elektrischen Spannung gegeben.

Das Verfahren, die Krystallfläche kleinen Stückchen eines leichten Häutchens zu nähern, hat Brewster in Betreff der Empfindlichkeit mit Recht den damals üblichen Elektrometern mit doppelten Goldblättchen vorgezogen, weil es noch geringere Spannungen auf diesen Flächen erkennen lässt, als dies durch die Divergenz der Goldblättchen möglich ist, wenn die Krystallfläche dem oberen Ende des die Blättchen tragenden Messingstäbchens genähert wird.

Um an einem sehr empfindlichen Goldblattelektrometer eine noch eben sichtbare Trennung der beiden Blättchen zu erhalten, muss ihnen die Spannung aus dem einen Pole einer Säule von 25 Daniell'schen Elementen, deren anderer Pol zur Erde abgeleitet ist, zugeführt werden, wobei es, um ein Aneinanderhaften der Blättchen zu vermeiden, sich als nothwendig herausstellt, denselben zuvor eine grössere Divergenz zu ertheilen und sie dann erst mit dem Säulenpole zu verbinden.

Bei den thermoelektrischen Versuchen mit Krystallen aus einer gut isolirenden Substanz wird nun ausserdem die auf der Fläche derselben erregte Elektricität nicht zu dem Goldblättchen geleitet, sondern erzeugt auf dem die Blättchen tragenden Messingstäbchen nur eine Vertheilungswirkung.

II. Beobachtung der photo- und thermoelektrischen Spannungen auf den Oberflächen der einzelnen Flussspathkrystalle.

Um eine Vorstellung von der Grösse der Krystalle und der mehr oder minder vollständigen Ausbildung ihrer Flächen zu geben, bilde ich die Netze derselben ab, und zwar stelle ich die Abbildungen der 6 Würfelflächen in einigem Abstande neben einander. Sind auf einer Seite eines Krystalles keine ausgebildeten Krystallflächen vorhanden, wird also daselbst die Begrenzung durch unregelmässige Bruchflächen oder durch andere aufgewachsene Krystalle gebildet, so habe ich denjenigen Theil derselben, welcher sichtbar bleibt, wenn der Krystall so in das Kupferfeilicht eingesetzt wird, dass die fehlende Fläche horizontal liegen würde, an Stelle dieser Fläche abgebildet.

Alle von Krystallflächen gebildeten Kanten sind durch ausgezogene Linien gekennzeichnet, während Kanten oder Ränder, an welchen ein Bruch oder ein Durchgang Theil hat, durch punktirte Linien dargestellt sind.

Hätte ich die Netze der untersuchten Krystalle in natürlicher Grösse abgebildet, so würde durch die beträchtliche Ausdehnung vieler derselben die Uebersichtlichkeit sehr erschwert worden sein. Die Zeichnungen sind daher sämmtlich nur in halber linearer Grösse ausgeführt.

In die Abbildung jeder einzelnen Fläche (oder in die an ihrer Stelle gezeichnete Projection der Bruchfläche oder der aufgewachsenen Krystalle) habe ich nun die Ausschläge des Elektrometers eingetragen, die bei der Annäherung der Spitze des Platindrahtes an die verschiedenen Punkte dieser Fläche, welche allein frei aus dem Kupferfeilicht hervorsah, beobachtet wurden, und zur leichteren Uebersicht sind die Stellen, wo positive Ausschläge sich zeigten, mit bräunlicher, dagegen diejenigen, wo negative stattfanden, mit grünlicher Farbe überzogen worden.

Der Ausschlag des Goldblättchens ist aber nicht allein von der in dem gerade unterhalb der Spitze des Platindrahtes liegenden Punkte vorhandenen Elektricität abhängig, sondern wird auch durch die Vertheilungswirkung seitens der angrenzenden Flächenstücke beeinflusst. Es tritt sogar, wie wir später sehen werden, der Fall ein, dass an einem bestimmten Punkte einer Krystallfläche die ihm eigenthümliche elektrische Spannung in ihrer Vertheilungswirkung auf den Platindraht durch die stärkere Wirkung der seitlich liegenden entgegengesetzt elektrischen Flächenstücke vollständig unterdrückt wird, so dass das Elektrometer bei Annäherung der Platinspitze an jenen Punkt eine wenn auch nur schwache Polarität angiebt, welche der in Wirklichkeit auf demselben vorhandenen gerade entgegengesetzt ist. Soll dieser Einfluss der nebenliegenden Flächenstücke ausgeschlossen werden, so sind sämmtliche Theile der Fläche mit Ausnahme der auf ihr elektrisches Verhalten speciell zu untersuchenden Stelle mit Kupferfeilicht zu bedecken.

In die Abbildungen der sechs Projectionen sind, wie bereits zuvor bemerkt, die Ausschläge eingetragen, welche beobachtet wurden, wenn die ganzen Flächen frei lagen. Die specielle Untersuchung einzelner

Theile der Flächen habe ich im Texte der Abhandlung näher angegeben, und auch wohl in einer besondern Zeichnung dargestellt.

Es wird öfter nöthig werden, die einzelnen Stellen einer Krystallfläche im Texte namhaft zu machen. Um dies kurz und doch mit möglichster Bestimmtheit ausführen zu können, denken wir uns die Würfelfläche oder die an ihre Stelle getretene Projection mit den Buchstaben *a* bis *i* wie in nebenstehender Figur beschrieben, und verwenden die einzelnen Buchstaben zur Bezeichnung der von ihnen eingenommenen Flächenstücke.

a	*b*	*c*
d	*e*	*f*
g	*h*	*i*

Es wäre sehr wünschenswerth gewesen, sämmtliche in die Zeichnungen eingetragene Zahlen unter sich vergleichen zu können; indess ist eine solche Vergleichbarkeit bei den photoelektrischen Untersuchungen selbst nicht einmal für die verschiedenen Flächen eines und desselben Krystalles zu erzielen. Dieselbe würde erfordern, dass sämmtliche Flächen gleichlange einer und derselben Strahlung ausgesetzt werden. Dies ist aber in unserem Klima bei dem so stark veränderlichen Zustande des Himmels absolut unmöglich, namentlich deshalb, weil die Beobachtungen auf den einzelnen Flächen nicht rasch auf einander folgen können, sondern nach dem Umlegen und Abpinseln des Krystalles eine längere Zeit (häufig bis zum folgenden Tage) verfliessen muss, bis die neue freiliegende Krystallfläche unelektrisch gemacht und zu einer Prüfung auf ihr Verhalten gegen das Licht brauchbar ist*).

Ich habe 66 verschiedene Flussspathkrystalle, und zwar jeden einzelnen wenigstens zwei Mal, auf das Verhalten seiner Flächen gegen das Licht geprüft. Zu einer klaren Einsicht in die betreffenden Erscheinungen wird es indess genügen, nur die auf einem Theile dieser Krystalle gemachten Beobachtungen mitzutheilen.

In die Zeichnungen sind fast überall die bei der letzten Untersuchung beobachteten Skalentheile eingetragen, weil ich durch die vorangegangenen Prüfungen bereits darüber unterrichtet war, welchen Stellen der Fläche ich meine besondere Aufmerksamkeit zuzuwenden hatte. Eben diese früheren Prüfungen hatten mir auch ein Urtheil

*) Mit dem elektrischen Kohlenlichte würden, wenn dasselbe mir von Anfang an zu Gebote gestanden hätte, besser vergleichbare Messungen zu erhalten gewesen sein.

über die Empfindlichkeit der Krystallfläche beziehentlich ihrer elektrischen Erregung durch das Licht gegeben, so dass ich je nach dem Zustande des Himmels die Zeit abschätzen konnte, während welcher die Fläche dem Lichte ausgesetzt werden musste, um auf derselben elektrische Spannungen von gewünschter, gut messbarer Grösse zu erlangen.

Die Krystalle wurden meistens nur dem Tageslichte (also gegen die Sonnenstrahlen im Schatten stehend) ausgesetzt; sie wurden auf die Fensterbank, womöglich bei geöffneten Fenstern, in etwas geneigter Lage gestellt, so dass das Licht des Himmels die freien Flächen besser bestrahlen konnte, als bei horizontaler Lage derselben. Der Zustand des Himmels war aber dabei sehr verschieden. Bei starken Winden aus Südost, Süd und Südwest und ebenso an kalten Tagen musste das Fenster geschlossen werden, so dass erst die durch das Glas einer Fensterscheibe gegangenen Lichtstrahlen die Krystallfläche trafen.

In einzelnen Fällen, wenn der Krystall gegen das Licht überhaupt wenig empfindlich war, oder wenn besondere Vorgänge beobachtet werden sollten, wurden die Krystalle dem directen Sonnenlichte, oder später auch dem elektrischen Kohlenlichte ausgesetzt. Wo diese letzteren Bestrahlungen stattgefunden haben, ist es im Texte ausdrücklich bemerkt.

Besser unter einander vergleichbar sind die Beobachtungen der thermoelektrischen Spannung nach der Abkühlung, indem die einzelnen Krystalle meistens lange genug in dem von siedendem Wasser umgebenen Raume gestanden hatten, um in ihrer ganzen Masse die Temperatur von 100° C. anzunehmen. Nur durch die mehr oder minder lange Zeit, welche seit dem Herausnehmen aus dem Ofen bis zum Zeitpunkte der Messung verflossen, sind kleine Unterschiede entstanden, weil sowohl eine zu kurze als auch eine zu lange Zwischenzeit die elektrischen Spannungen zu klein erscheinen lässt; erstere wegen nicht hinreichender Erkaltung des Krystalles und letztere wegen der Zerstreuung und Ableitung eines Theiles der auf der Fläche frei gewordenen Elektricität.

A. Grüne Flussspäthe von Weardale und Alston Moor.

Krystall No. 1. Fig. 1 A und 1 B. Taf. I.

Der von Weardale stammende Krystall No. 1 gehört der Freiberger Sammlung. Ausser den Flächen des Würfels finden sich an ihm nur die Flächen eines sehr flachen Pyramidenwürfels und sehr kleine Flächen eines Achtundvierzigflächners. Die meisten Würfelflächen sind ziemlich gut ausgebildet; nur auf der Kante der Flächen 2 und 6, sowie auf den dieser Kante benachbarten Theilen ist ein anderer kleinerer Flussspathkrystall eingewachsen. Mit der Fläche 3 war der Krystall aufgewachsen gewesen; an ihrer Stelle befindet sich jetzt eine sehr unebene Bruchfläche, die mehr weisslich als grünlich aussieht, während sonst der ganze übrige Krystall eine dunkelgrüne Farbe besitzt.

Die Substanz des Krystalles ist nur an einzelnen Stellen klar und durchsichtig, und an diesen tritt das sapphirblaue Fluorescenzlicht sehr schön hervor. Die Krystallflächen sind nicht vollkommen eben; es erscheinen auf ihnen theils kleine hervortretende Würfelflächen, theils zeigen sich glatte Stellen, welche durch breitere entweder den Würfelkanten (wiederholte Ansätze zur Bildung eines Pyramidenwürfels) oder den Durchschnitten der Flächen eines Achtundvierzigflächners mit den Würfelflächen parallel gestreifte Bänder begrenzt werden.

a. Photoelektrisches Verhalten.

Betrachten wir zuerst die elektrische Vertheilung, wie sie nach kurzem Aussetzen an das Tageslicht eintritt, und wie sie (Fig. 1 A dargestellt ist, so ergibt sich im Allgemeinen, dass die ausgebildeten Krystallflächen in ihren mittleren Theilen negativ, dagegen an den Ecken und zum Theil auch selbst noch in der Mitte der Ränder positiv elektrisch sind. Jedoch wird diese positive Elektricität nicht an allen Ecken (und Kanten) sichtbar, weil sie in ihrer Intensität und in ihrer Ausdehnung geringer ist, als die in den mittleren Theilen auftretende negative; sie lässt sich aber an allen vier Ecken durch den Versuch nachweisen, wenn (vgl. S. 222) die mittleren negativen Theile der Fläche mit Kupferfeilicht bedeckt werden.

Wenn die ganze Fläche 1 des Krystalles No. 1 frei liegt, so

wird, wie dies Fig. 1 A zeigt, gewöhnlich nur in der linken oberen*) Ecke bei *a* (vergl. Zeichnung auf S. 223) die positive Spannung beobachtet; dass sie jedoch auch auf den übrigen drei Ecken vorhanden ist, zeigt eine specielle Untersuchung derselben (Fig. 1 A′), bei welcher, wie so eben angegeben, durch Bedeckung der mittleren negativen Theile mit Kupferfeilicht die Vertheilungswirkung dieser letzteren beseitigt ist, und die auf den Ecken vorhandene positive Spannung ungeschwächt hervortreten kann. In der Fig. 1 A′ stellt das weissgelassene Flächenstück den mit Kupferfeilicht bedeckten Theil der Fläche dar. Trotzdem die oben rechts (bei *c*) gelegene Ecke bei diesem Versuche die stärkste positive Spannung zeigt, erscheint dieselbe doch bei ganzer freier Fläche infolge der starken negativen Umgebung noch negativ. Die grössere Intensität dieser Ecke *c* wird auch durch die hohe positive Spannung (+ 11,5) auf dem ihr anliegenden Theile der Fläche 2 bestätigt.

Auf das mehr oder minder deutliche und ausgedehnte Hervortreten der positiven Spannung an den Ecken und Kanten ist aber auch die mehr oder weniger tiefe Einsetzung des Krystalles in das Kupferfeilicht, und die Art der Bestrahlung, namentlich ob bei derselben noch mehr oder weniger Theile der seitlichen Flächen aus den Feilspähnen herausragen und ebenfalls von den Lichtstrahlen getroffen werden, von Einfluss.

Als die Fläche 1 dem elektrischen Kohlenlichte in einem Abstande von 300^{mm} ausgesetzt wurde, genügte ein Bestrahlen von einer einzigen Minute, um schon starke elektrische Erregungen hervorzurufen. Fig. 1 A″ stellt die nach einer solchen Bestrahlung beobachteten elektrischen Spannungen dar. Infolge einer etwas anderen Bestrahlungsweise als bei dem Aussetzen ans Tageslicht trat an drei Ecken die positive Polarität auf.

Im Anschluss an diesen Versuch sei noch bemerkt, dass, als die in Fig. 1 A″ dargestellte elektrische Vertheilung unmittelbar nach ihrer Beobachtung durch die Alkoholflamme hinweggenommen wurde, beim Stehen des Krystalles im dunklen Raume innerhalb dreier Stunden keine elektrische Erregung wieder erschien, namentlich also keine Umkehrung in die entgegengesetzte Polarität eintrat.

*) Ich werde die Bezeichnungen rechts, links, oben, unten stets auf die Abbildungen der Flächen, wie solche auf dem Papier dargestellt sind, beziehen.

Ferner möge noch ein nach dem S. 213 beschriebenen Verfahren mit der Fläche 1 angestellter Versuch hier eine Stelle finden. Die Mitte der dem Tageslichte einige Zeit ausgesetzten Fläche 1 erzeugte, wenn die Platinspitze, wie gewöhnlich, genähert wurde, einen Ausschlag von —17 Skth. Als nun das den Krystall enthaltende kupferne Kästchen isolirt und mit dem Goldblättchen des Elektrometers in leitende Verbindung gebracht wurde, entstand bei Annäherung einer kleinen Metallscheibe an die mittleren Theile der Fläche 1 ein Ausschlag von + 50 Skth. Wurde eben diese Metallscheibe der bei *a* liegenden Ecke genähert, so entstand ein Ausschlag von — 3,5 Skth.

Auf der Fläche 4 erschien bei ganzer freier Fläche oben rechts bei *c* ein schwach negativer Ausschlag — 0,3 (in Fig. 1 A); wurde dagegen die ganze Fläche mit Ausnahme dieser Ecke mit Kupferfeilicht bedeckt, so beobachtete ich nach einem 13 Minuten langen Aussetzen ans Tageslicht bei Annäherung des Platindrahtes an dieser Stelle einen starken positiven Ausschlag (+ 7 Skth.).

Die an Stelle der Würfelfläche 3 getretene sehr unebene Bruchfläche erscheint in ihrer ganzen Ausdehnung positiv, jedoch im Allgemeinen schwach, jedenfalls weil, wie oben bemerkt, der grösste Theil derselben der dunkelgrünen Färbung entbehrt und eine mehr weissliche Masse bildet; nur auf dem (in der Zeichnung) rechten Rande (bei *i*), welcher tiefer und innerhalb der grün gefärbten Masse liegt, wird die Intensität der positiven Elektricität grösser.

Schliesslich mögen hier noch einige specielle Angaben über die Steigerung der elektrischen Spannungen mit der Dauer der Belichtung folgen.

Die Fläche 1 des vorliegenden Krystalles wurde in völlig unelektrischem Zustande bei trübem Tageslichte (bedecktem Himmel*) auf der Fensterbank in etwas geneigter Lage aufgestellt. Nachdem sie 7 Minuten daselbst gestanden hatte, ward sie auf ihr elektrisches Verhalten geprüft, und die in Fig. 1 A‴ eingetragene Vertheilung gefunden. In der Mitte der Fläche betrug hiernach die Spannung — 8,7 Skth.

Darauf wurde die Fläche von Neuem, so wie sie war, an den-

*) 25. August Morgens zwischen 9 bis 11 Uhr.

selben Ort ins Tageslicht gestellt, und nach 6 Minuten langer Belichtung abermals geprüft. Der Kürze wegen will ich nur die in der Mitte beobachteten Spannungen anführen. Die Mitte zeigte jetzt eine Spannung — 11 Skth.

Der Himmel war trüber geworden, und nach einer neuen Belichtung von 9 Minuten Dauer war die Spannung in der Mitte (und ebenso an den übrigen Theilen der Fläche) nur wenig gestiegen; in der Mitte nur bis — 11,4 Skth.

Nach einer neuen Belichtung von 20 Minuten Dauer bei etwas hellerem Himmel zeigte das Elektrometer in der Mitte — 15 Skth.; die jetzt auf der Krystallfläche vorhandene elektrische Spannung ist die in Fig. 1 A eingetragene.

In einer anderen Versuchsreihe besass der Krystall in der Mitte seiner Fläche infolge der Abkühlung nach einer vorhergegangenen Erwärmung bis 100° C. noch eine positive Spannung von + 5 Skth.*). In diesem Zustande, wie er von der Abkühlung herrührte, dem Tageslichte ausgesetzt, ergab sich bei einer etwas besseren Beleuchtung als bei der vorhergehenden Beobachtungsreihe nach 4 Minuten langer Belichtung in der Mitte — 3 Skth., noch abermals 5 Minuten — 8,2 Skth., nach weiteren 4 Minuten — 13, nach ferneren 6 Minuten — 15,2 und schliesslich nach abermals 6 Minuten — 19 Skth.

Mit dieser elektrischen Vertheilung wurde der Krystall ins Dunkle gestellt. Nach 13 Minuten zeigte die Mitte noch — 17,2 Skth., nach weiteren 73 Minuten noch — 13,5 Skth.

In diesem Zustande wurde der Krystall in einen bis 100° C. erhitzten Ofen (ins Dunkle) gebracht. Nachdem er 6 Minuten darin gestanden, gab die Mitte nur noch — 6 Skth., nach weiterem 13 Minuten langen Verweilen in dem heissen Ofen nur noch — 4,4 Skth. Ausschlag**). Es scheint also die durch die Belichtung entstandene elektrische Spannung durch die Erwärmung des Krystalles rascher zu verschwinden, als beim Stehen im Dunkeln bei niedriger Temperatur***).

---

*) Es ist die in Fig. 1 B dargestellte.

**) Wie wir später sehen werden, erzeugt die steigende Temperatur dieselbe Polarität wie die Belichtung. Die Schwächung der vorhandenen negativen Spannung kann also nicht einfach durch die infolge der Erwärmung entstehende Polarität vernichtet werden.

***) Eben dies gilt auch von der durch Reibung auf der Oberfläche der Fluss-

b. Thermoelektrisches Verhalten.

Die Bemühungen, auf den Flussspathkrystallen thermoelektrische Erregungen nachzuweisen, gaben wie bereits oben erwähnt, die Veranlassung zur Entdeckung der Photoelektricität dieses Minerales; sie wurden indess durch das augenblicklich grössere Interesse, welches die photoelektrischen Erregungen in Anspruch nahmen, zurückgedrängt. Nach Feststellung des photoelektrischen Verhaltens der Flussspäthe trat dann aber wieder die Frage heran, welche Bedeutung die bei jenen ersten Versuchen nach Temperaturänderungen beobachtete elektrische Spannung habe.

Die genauere Untersuchung zeigte nun, dass in der That eine wirkliche thermoelektrische Erregung auf den Flussspathkrystallen auftritt, die ganz den Gesetzen folgt, welche bei den übrigen thermoelektrischen Mineralien Geltung haben.

Die Art der Untersuchung sowohl während steigender als auch während sinkender Temperatur habe ich oben S. 211 erläutert. Die

---

spathkrystalle erzeugten positiven Elektricität. — Theodor v. Grotthuss spricht in seiner Abhandlung über einen neuen Lichtsauger (Schweigger's Journal für Chem. u. Phys. 1815. Bd. 14. S. 133 ff.) den allgemeinen Satz aus, dass bei den Phosphoren Kälte das Lichteinsaugen, dagegen Wärme das Lichtausstrahlen begünstige. Sollte dieser Ausspruch sich als in der Wirklichkeit begründet nachweisen lassen, so könnte man wohl die Frage stellen, ob sich nicht das zuvor erwähnte raschere Verschwinden der Elektricität in dem heissen Ofen mit ihm in Beziehung setzen lässt, und zwar für jede beliebige Art der elektrischen Ladung der Flächen.

Jener neue, von Grotthuss in der angeführten Abhandlung untersuchte Lichtsauger war ein röthlichvioletter Flussspath von Nertschinsk (Chlorophan). Grotthuss hielt es (S. 142 der oben citirten Abh.) für wahrscheinlich, dass das Sonnenlicht auf der Oberfläche »zwischen den Elementarpolen der ihm ausgesetzten Körper in seine elektrischen Grundprincipien, nämlich in $+E$ und $-E$ zerlegt werde«, und dass die darauffolgende Vereinigung dieser beiden getrennten Lichtelemente der wahre Grund ihrer Phosphorescenz sei. Er hat denn auch versucht, ob er nicht an den dem Sonnenlichte ausgesetzten Lichtsaugern Elektricität wahrnehmen könne; da er aber hierzu das für den vorliegenden Fall eines Nichtleiters denkbar ungeeignetste Mittel, den Volta'schen Condensator, verwandte, so darf es nicht Wunder nehmen, wenn er auch nicht die geringste Spur von Elektricität nachzuweisen vermochte.

Da ich mir bis jetzt keinen Chlorophan habe verschaffen können, so bleibt es zweifelhaft, ob derselbe bei seiner derben Beschaffenheit durch Belichtung überhaupt elektrisch wird. Auf dem Wölsendörfer Stinkfluss habe ich wenigstens bis jetzt noch keine elektrischen Spannungen wahrgenommen.

thermoelektrische Untersuchung ist fast durchgängig mit der Wiederholung der photoelektrischen Prüfungen ausgeführt, so dass gewöhnlich eine Fläche erst nach vorhergegangenem längern Erhitzen bis 100° und durch Verweilen in einem dunkeln Raume vollzogener Abkühlung auf ihr elektrisches Verhalten geprüft, sodann nach Entfernung der vorhandenen elektrischen Spannungen dem Lichte ausgesetzt und abermals auf ihr elektrisches Verhalten untersucht wurde. Unter Umständen war die Aufeinanderfolge der beiden Prüfungen auch die umgekehrte.

Gleich bei den ersten in der vorläufigen Mittheilung erwähnten Versuchen zeigte sich ein Gegensatz zwischen den durch Belichtung und den nach einer Erhitzung bis 100° und darauf folgender Abkühlung entstehenden elektrischen Polaritäten; dieser Gegensatz fand sich in den zahlreichen weitern Versuchen, wo beide Prüfungen meistens in kurzen Zeiträumen auf einander folgten, durchaus bestätigt.

Eben jene ersten Versuche ergaben geringere Spannungen für die durch Abkühlung (nach einer vorhergegangenen Erwärmung bis 100°) auftretende Elektricität, als für die durch Belichten erzeugte. In den meisten Fällen wird sich auch dieser Satz bestätigen, obwohl, wie wir später sehen werden, auch einzelne Krystalle vorkommen, bei denen das Verhältniss in der Stärke der elektrischen Spannungen umgekehrt ist; ja wir werden Flussspäthe finden, auf denen durch das zerstreute Tageslicht und selbst durch die directen Strahlen der Sonne elektrische Spannungen nicht erregt werden können (wohl aber noch durch das elektrische Kohlenlicht), während die bei der Abkühlung*) auftretende Elektricität nicht allzugering ist.

Schon oben S. 212 ist hervorgehoben, dass die Untersuchung der Krystalle bei steigender Temperatur mit Schwierigkeiten verbunden war. Ich habe daher nur einen Theil der Krystallflächen sowohl während der Erwärmung als auch bei der Abkühlung untersucht. In allen diesen Fällen bestätigte sich ausnahmelos das auch durch meine übrigen thermoelektrischen Untersuchungen bewährte

*) Um den Ausdruck abzukürzen, verstehe ich im Folgenden unter Abkühlung oder Erkaltung stets die nach einer zur vollständigen Durchwärmung des Krystalles genügend langen Erhitzung bis 100° C. eintretende. Ist der Krystall beim Erhitzen auf andere Temperaturen gebracht worden, so soll dies speciell angegeben werden.

Gesetz, dass die bei steigender Temperatur auf einer Krystallfläche auftretende Elektricität gerade die entgegengesetzte ist, als bei der Abkühlung. Es konnte daher für die übrigen Krystalle die Feststellung der thermoelektrischen Vertheilung bei der Abkühlung genügen.

Bei diesem vollständigen Gegensatze zwischen den bei steigender und den bei abnehmender Temperatur auftretenden elektrischen Spannungen habe ich, ebenso wie in meinen früheren Abhandlungen über die thermoelektrischen Eigenschaften der Krystalle, in die auf den Tafeln gegebenen Abbildungen nur die bei der Abkühlung beobachteten Polaritäten eingetragen.

Auch aus einem andern Grunde wären die Abbildungen der bei steigender Temperatur erregten Polaritäten überflüssig gewesen. Ich habe schon erwähnt, dass die nach der Belichtung und die bei der Abkühlung beobachteten elektrischen Polaritäten einander entgegengesetzt sind. Da nun aber die bei steigender Temperatur auftretenden elektrischen Spannungen den bei der Abkühlung auftretenden ebenfalls genau entgegengesetzt sind, so folgt, was auch die weiterhin anzuführenden Beobachtungen direct erweisen, dass der Eintritt einer höheren Temperatur gerade dieselbe Polarität an den einzelnen Stellen der Krystallflächen erzeugt, wie die Belichtung. Sonach würde also das Eintragen der bei der Erwärmung gemachten Beobachtungen in die Abbildungen (abgesehen natürlich von der Intensität) dasselbe Farbenbild (d. h. dieselbe Vertheilung der bräunlichen und grünlichen Farbe) gegeben haben, wie solches die photoelektrischen Messungen darbieten.

Die Flächen des Krystalles No. 1 sind, mit Ausnahme der Fläche 1, nicht während der Erwärmung, sondern nur während der Abkühlung untersucht, und die dabei beobachteten elektrischen Spannungen in die Abbildung der einzelnen Flächen Fig. 1 B eingetragen worden. Nach dem Herausnehmen aus dem heissen Ofen wurde der Krystall zur Abkühlung in ein vollkommen gegen das Licht abgeschlossenes metallisches Gefäss gestellt, und nach einem Verweilen von 20 bis 80 Minuten in diesem dunkeln Raume auf sein elektrisches Verhalten geprüft.

Eine Vergleichung der Fig. 1 A und Fig. 1 B zeigt nun in der That, dass die Polaritäten bei der Abkühlung die entgegengesetzten sind, als nach dem Belichten. Wenn in den Grenzen der positiven

und negativen Regionen kleine Abweichungen auftreten, so findet dies in dem Umstande seine Begründung, dass die Vorgänge der Ausstrahlung und Abkühlung nicht absolut genau in derselben Weise wie die Vorgänge bei der Belichtung verlaufen, wie ich ja auch schon solche Verschiebungen in den Grenzen der beiden Elektricitäten bei der Belichtung selbst hervorgehoben habe, welche durch das mehr oder weniger tiefe Einsetzen des Krystalles in das Kupferfeilicht und etwas andere Stellung gegen die Lichtstrahlen eintreten.

So erscheint bei der Abkühlung auf der Fläche 1 die negative Elektricität an zwei Ecken (*a* und *g*) in Fig. 1 B, während bei der in Fig. 1 A abgebildeten Beobachtungsreihe nach dem Aussetzen ans Tageslicht die jener negativen entsprechende positive Polarität nur an einer Ecke *a* sich zeigt, dagegen aber bei der Prüfung nach Bestrahlung mittelst des elektrischen Kohlenlichtes an drei Ecken (*a*, *g*, *i*) Fig. 1 A″ auftritt. In Wirklichkeit existirt aber die positive Polarität nach der Belichtung an allen vier Ecken (Fig. 1 A′).

Ebenso ist nun beim Abkühlen auf allen vier Ecken die entsprechende negative Elektricität vorhanden; sie wird jedoch bei ganzer freier Fläche durch die benachbarte stärkere positive Spannung verdeckt. Dass es sich in der That so verhält, zeigt der Fig. 1 B′ abgebildete Versuch, bei welchem der mittlere (in der Zeichnung weiss gelassene) Theil der Fläche mit Kupferfeilicht bedeckt war, so dass nur die Ecken frei lagen; sämmtliche vier Ecken erscheinen jetzt negativ.

Der nahe Zusammenhang zwischen der durch Belichtung und durch Temperaturänderung erregten Elektricität spricht sich auch in dem Umstande aus, dass in beiden Fällen (Fig. 1 A′ und Fig. 1 B′) die beiden oberen Ecken (*a*, *c*) eine grössere elektrische Intensität besitzen als die beiden unteren (*g*, *i*).

Ueber die Zunahme der elektrischen Spannungen mit der Dauer der Abkühlung mögen hier einige Beobachtungen und zwar der Kürze wegen nur auf der Mitte der Fläche 1 angeführt werden.

Als die Fläche 1 den in Fig. 1 A dargestellten elektrischen Zustand infolge der Belichtung angenommen hatte, wo also die Mitte die Spannung — 15 Skth. zeigte, wurde der Krystall in diesem Zustande in den bis 100° C. erhitzten Ofen gebracht. Nachdem er 11 Minuten darin gestanden, zeigte die Mitte der Fläche nur noch

— 8 Skth.*). Der Krystall wurde dann weitere 30 Minuten in dem Ofen erhitzt. Nach dem Heraustragen in das andere Zimmer und dem Aufstellen neben dem Elektrometer, wobei ein Zeitraum von fast 2 Minuten verflossen war, zeigte die Mitte des Krystalles + 3,2 Skth.; nach weiteren 21 Minuten Abkühlung betrug die elektrische Spannung in der Mitte + 4,7, und nach nochmaligen 5 Minuten + 5 Skth.

Schon oben wurde angedeutet, dass die Fläche 1 dieses Krystalles auch bei steigender Temperatur untersucht worden ist.

Der Krystall wurde zuerst in Kupferfeilicht, welches auf der schüsselförmigen Vertiefung des kleinen S. 211 erwähnten Ofens lag, so eingesetzt, dass nur die Fläche 1 frei blieb. Die Empfindlichkeit des Elektrometers musste hiebei (vgl. S. 212) so weit verringert werden, dass ein Element Zinn - Kupfer - Wasser einen Ausschlag von nur 30 Skth. gab, während derselbe sonst 40 bis 50 Skth. und selbst noch mehr betrug. Um die Lichteinwirkung auszuschliessen, wurde die Beleuchtung (S. 212) so weit geschwächt, dass die Beobachtungen überhaupt nur eben noch möglich waren.

Sehr bald nachdem die Lampe im Innern des Ofens angezündet worden, begann an den Ecken positive und in der Mitte der Fläche negative Elektricität aufzutreten. Als das neben dem Krystall in dem Kupferfeilicht stehende Thermometer 95° C. zeigte (ungefähr 10 Minuten nach dem Beginn des Erhitzens), wurde die Lampe ausgelöscht und unmittelbar darauf die Spannungen beobachtet, welche in Fig. 1 B'' eingetragen sind. Die Vertheilung ist also im Allgemeinen dieselbe wie beim Belichten; das Hervortreten der positiven Elektricität an drei Ecken wurde jedenfalls durch den Umstand begünstigt, dass die äusseren Schichten des Krystalles heisser waren als die inneren. Ebenso wie beim Belichten sind auch jetzt die Intensitäten der positiven Elektricität in den oberen Ecken *a* und *c* grösser als in den unteren (s. S. 232).

Durch diese nur kurze Zeit dauernde Erhitzung war die Temperatur des ganzen Krystalles nicht so hoch gestiegen, wie nach längerem Verweilen in dem bis 100° C. erhitzten Ofen. Beim Erkalten

*) Auch in diesem Versuche tritt also ein rascheres Verschwinden der Elektricität durch Verweilen in dem heissen Raume auf (s. S. 228).

kehrten sich die zuvor beobachteten Elektricitäten um, erreichten aber, eben wegen der geringeren Erhitzung, nicht den Werth, wie er nach voller Durchwärmung bis 100° erscheint. In der Mitte stieg die Spannung nur bis + 1,9, an den Ecken höchstens bis — 0,6 Skth. Auch wurde die Intensität der beim Erkalten auftretenden Elektricitäten noch dadurch geschwächt, dass die vom Erwärmen herrührende Elektricität nicht entfernt worden war. Es lag mir eben daran, den Krystall vom Anfang der Erhitzung bis zum Ende der Erkaltung völlig unberührt und unbeeinflusst zu lassen.

Sodann wurde auch noch ein Versuch mit dieser Fläche 1 nach dem oben S. 212 beschriebenen zweiten Verfahren angestellt. Der Krystall wurde wie gewöhnlich in ein mit Kupferfeilicht gefülltes Kästchen eingesetzt, so dass nur die Fläche 1 frei blieb. Nachdem er völlig unelektrisch geworden, wurde er in den bis 100° erhitzten Ofen gebracht, und nach 10 Minuten langem Verweilen darin sofort auf sein elektrisches Verhalten geprüft, wobei die Mitte die elektrische Spannung — 0,5 Skth. zeigte.

Die ausführliche Angabe der auf dem Krystall No. 1 unter den verschiedensten Umständen ausgeführten Beobachtungen wird eine klare Einsicht in das Beobachtungsverfahren gegeben haben, so dass es bei den folgenden Krystallen meistens genügen dürfte, die Resultate der Beobachtungen anzuführen. Nur wenn dieselben besonderen Bedingungen unterworfen wurden, sollen die beobachteten Vorgänge noch speciell hervorgehoben werden.

Krystall No. 2. Fig. 2 A und 2 B. Taf. I.

Der ebenfalls aus Weardale stammende Krystall No. 2 gehört der hiesigen Universitätssammlung; seine Farbe ist im Allgemeinen dunkelgrün; nur auf den Bruchflächen (namentlich in den mittleren und unteren Theilen der Fläche 2) erscheint die Masse weisslicher. Er stellt ein Bruchstück eines einzigen Individuums dar. Von seinen Flächen ist nur die Fläche 4 ziemlich vollständig, aber nicht vollkommen ausgebildet; von den Flächen 1 und 5 sind grössere, von den Flächen 3 und 6 kleinere Theile vorhanden, während an Stelle der Fläche 2 sich eine unregelmässig verlaufende Bruchfläche findet.

Der vorhandene Theil der Fläche 1 ist ziemlich gut ausgebildet,

während auf der Fläche 5, besonders aber auf der Fläche 4, zahlreiche kleine Würfelflächen hervortreten. Auf den glatten Stellen finden sich Streifungen, welche wie beim Krystall No. 1 theils den Würfelkanten, theils den Durchschnitten der Flächen eines Achtundvierzigflächners mit den Flächen des Würfels parallel laufen.

Fig. 2 A stellt die nach dem Aussetzen ans Tageslicht, Fig. 2 B die bei dem Erkalten auf den einzelnen Flächen beobachteten elektrischen Spannungen dar. Aus einem gleich anzuführenden Grunde bilde ich in Fig. 2 A′ auch noch die elektrische Vertheilung ab, wie sie auf der Fläche 1 gefunden wurde, nachdem die betreffende Fläche 1 Minute lang dem elektrischen Kohlenlichte in einem Abstande von 300^{mm} ausgesetzt gewesen war.

Schon bei dem Krystalle No. 1 habe ich darauf aufmerksam gemacht, dass je nach der mehr oder weniger tiefen Einsetzung des Krystalles in das Kupferfeilicht und der Art der Bestrahlung die Grenzen und die Verhältnisse der negativen Intensität in der Mitte und der positiven an den Ecken (und Rändern) sich änderen können. Eben solche Aenderungen habe ich nun auch bei dem vorliegenden Krystalle No. 2 beobachtet; die Fläche 1 desselben ist mehr als 30 Mal unter den verschiedensten Bedingungen nach Bestrahlung sowohl durch das Tageslicht als auch durch das Sonnen- und das elektrische Kohlenlicht untersucht worden.

Es schien anfangs, als ob die positive Elektricität an den Ecken beim Beginne der Belichtung rascher anwüchse, als die negative der Mitte; indess ergab eine genauere Untersuchung, dass die beobachteten Unterschiede nur durch Abweichungen im Einsetzen in die Feilspähne und in der Bestrahlungsweise hervorgerufen wurden.

Um zu zeigen, welche Unterschiede in den relativen Stärken der beiden Polaritäten auf dieser Fläche eintreten können, habe ich in Fig. 2 A′ eine nach der Bestrahlung mit elektrischem Kohlenlichte beobachtete elektrische Vertheilung abgebildet. Während in Fig. 2 A (Bestrahlung durch Tageslicht) die positive Elektricität in der Ecke *a* stärker ist als die negative in der Mitte, verhalten sich die Intensitäten an diesen Stellen in Fig. 2 A′ (Bestrahlung durch das elektrische Kohlenlicht) umgekehrt. Dies ist jedoch keineswegs durch die Verschiedenheit der Lichtquellen hervorgebracht; ich besitze auch für die Bestrahlung durch das Tageslicht Beobachtungsreihen, in welchen

ebenso wie bei Bestrahlung durch das Kohlenlicht die negative Elektricität in der Mitte stärker ist, als die positive in der Ecke *a*. Es möge hier genügen auf die Figur 4 derjenigen Tafel zu verweisen, welche ich meiner vorläufigen Mittheilung in den Berichten für 1877 beigefügt habe; der daselbst unter No. IV aufgeführte und in Fig. 4 jener Tafel abgebildete Krystall ist derselbe, welchen ich in der vorliegenden Abhandlung mit No. 2 bezeichnet habe. In der eben citirten Zeichnung findet sich in der Ecke *a* die Spannung + 8, in der Mitte der Fläche dagegen die Spannung — 12 Skth.

Nachdem die Fig. 2 A′ abgebildete, durch Bestrahlung mit dem elektrischen Kohlenlichte erzeugte elektrische Vertheilung beobachtet war, wurde die Fläche 1 mit einer Alkoholflamme überstrichen und der Krystall sodann ins Dunkle gestellt. Nach 3 bis 4 Stunden zeigte die Mitte — 2, die Ecke *a* + 2,5; es war also keine Umkehrung, wie solche nach dem Erwärmen bei der Abkühlung sich zeigt, eingetreten; die vorhandenen Spannungen bestanden nur in Resten der früher vorhanden gewesenen.

Als die Fläche 1 dieses Krystalles dem durch rothes (mit Kupferoxydul gefärbtes) Glas hindurchgegangenen Lichte des blauen Himmels 25 Minuten ausgesetzt worden, zeigte sie keine elektrischen Spannungen; dieselben traten aber ein, als das rothe Glas durch ein dunkelviolettes ersetzt wurde.

Auf der durch Bruch entstandenen Fläche 2 trat im Tageslichte eine starke positive Spannung auf; es schien mir nicht überflüssig, nachzuweisen, dass das Licht des elektrischen Funkens auf diese Bruchfläche eben so wirkt, wie das Tageslicht. Jeder der beiden Conductoren einer Holtz'schen Elektrisirmaschine wurde mit dem innern Belege einer mässig grossen Leydener Flasche, deren äusseres Beleg zur Erde abgeleitet war, verbunden, und die an den Enden der Conductoren befindlichen Kugeln einander im Abstande von 18^{mm} gegenüber gestellt. Der Krystall No. 2 wurde dann mit seiner Fläche 2 unterhalb dieser Kugeln aufgestellt, jedoch nicht frei, sondern (ebenso wie sonst in Kupferfeilicht eingesetzt) in einem metallischen zur Erde abgeleiteten Cylinder, dessen Deckel eine mit einer Bergkrystallplatte verschlossene Oeffnung besass, unterhalb deren die Fläche 2 lag. Der Abstand dieser Fläche von den Kugeln, zwischen welchen die Funken übersprangen, betrug 40 bis 50^{mm}. Nachdem die Holtz-

sche Maschine 5 Minuten lang gedreht worden, und eine Anzahl Funkenentladungen zwischen den Kugeln stattgefunden hatte, zeigte sich auf der Fläche 2 bereits eine positive Spannung von + 2 Skth.

Dagegen wollte es nicht gelingen, eben diese Fläche durch die Belichtung mit einer Geissler'schen Röhre elektrisch zu machen. Um die Bestrahlung mit diesem elektrischen Lichte möglichst stark herzustellen, hatte ich eine spiralförmig gewundene möglichst luftleere Röhre anfertigen lassen; die Windungen (acht an der Zahl) lagen dicht neben einander in einer Ebene, und unter der Mitte der Spirale wurde der Krystall ebenso wie bei dem vorhergehenden Versuche aufgestellt. Den elektrischen Strom lieferte ein grosser Ruhmkorff-scher Inductionsapparat. Stand die Fläche des Krystalles gar zu nahe unter der Spirale, so trat eine directe Elektrisirung ein; bei etwas grösseren Abständen blieb aber die Fläche unelektrisch, obwohl die durch die Bergkrystallplatte verschlossene Oeffnung im Deckel des Cylinders beträchtlich grösser war, als in dem vorhergehenden Versuche.

Krystall No. 3. Fig. 3 A und 3 B. Taf. I.

Der aus Weardale in Durham stammende Krystall No. 3 bestand wesentlich aus zwei verwachsenen Individuen von nahe gleicher Grösse, von denen eines in der Zeichnung als Hauptkrystall betrachtet werden musste. Die Flächen des letzteren oder die an ihre Stelle getretenen Bruchflächen sind mit den Zahlen 1 bis 6 bezeichnet worden. In die Zeichnung habe ich vorzugsweise die auf diesen Flächen gemachten Messungen eingetragen; die auf den anderen Krystall bezüglichen haben nur Aufnahme gefunden, wenn dessen Flächen sich in der Abbildung in hinreichender Grösse darstellten.

Der Krystall No. 3 ist derselbe, welcher in der vorläufigen Mittheilung unter No. II beschrieben, und von welchem auf der jener Anzeige beigefügten Tafel vier Flächen abgebildet worden sind. Seine Masse erscheint tief dunkelgrün gefärbt.

An dem als Hauptkrystall betrachteten Individuum sind die Flächen 1, 4 und 6 in grösseren, die Flächen 5 und 2 in kleineren Theilen ausgebildet, während an die Stelle der Fläche 3 Bruchflächen, welche in der Masse des zweiten Individuums liegen, getreten sind.

Auf den Würfelflächen finden sich die Flächen eines flachen Pyramidenwürfels, oder es sind vielmehr die zuvor als in einiger Grösse ausgebildet bezeichneten Flächen keine Würfelflächen, sondern die sehr ungleich ausgebildeten Flächen eines sehr flachen Pyramidenwürfels. Manche dieser Flächen sind so an eine Ecke gedrängt, dass man sie bei flüchtigem Ansehen für eine auf die Ecke aufgesetzte flache Abstumpfungsfläche halten könnte. An manchen Würfelkanten tritt infolge der Flächen des Pyramidenwürfels die Abweichung vom rechten Winkel sehr auffällig hervor.

Fig. 3 A stellt die nach der Belichtung, Fig. 3 B die beim Erkalten beobachteten elektrischen Spannungen dar.

Wenn die ganze Fläche 1 frei liegt, so lässt sich nach der Belichtung in der linken oberen Ecke *a*, welche vollkommen scharf ausgebildet ist, die positive Spannung nicht wahrnehmen; dieselbe tritt aber, wie Fig. 3 A′ zeigt, daselbst auf, wenn alle übrigen Theile der Fläche mit Ausnahme der in Rede stehenden Ecke mit Kupferfeilicht überdeckt werden.

In der Mitte der Fläche 6 wird beim Erkalten (Fig. 3 B) die positive Elektricität infolge der Wirkung der umliegenden negativen Regionen nicht sichtbar; sie ist aber durch die Abnahme der negativen vom Rande (— 4) nach der Mitte hin (— 1,5) deutlich angezeigt. Die Gestaltung der Fläche macht es jedoch unmöglich, diese Stelle allein frei zu lassen und alle übrigen Theile mit Kupferfeilicht zu bedecken.

Schliesslich mögen hier noch einige bereits in der vorläufigen Mittheilung angeführte Beobachtungen eine Stelle finden.

Als das Licht des Himmels nach dem Durchgange durch eine Lösung von schwefelsaurem Chinin in Wasser die Fläche 1 traf, zeigte sich nach 10 Minuten langer Belichtung in der Mitte dieser Fläche nur eine Spannung von — 0,9 Skth., nach weiteren 15 Minuten stieg dieselbe auf — 1,5 und nach abermals 10 Minuten auf — 2,3 Skth.

Nachdem die Chininlösung durch eine Alaunlösung ersetzt worden, erlangte in 10 Minuten die Mitte der Fläche die Spannung — 7 Skth.; nach Ersetzung dieser letzteren Lösung durch ein tief dunkelblaues Kobaltglas stieg dieselbe in 18 Minuten bis — 11 Skth.

Krystall No. 4. Fig. 4 A und 4 B. Taf. I.

Der Krystall No. 4 besteht, wie der vorhergehende, aus zwei fast gleichgrossen Individuen, und gleicht demselben auch in der Beschaffenheit seiner Flächen und seiner Masse. Der Krystall ist bereits in der vorläufigen Mittheilung unter No. III aufgeführt worden.

An dem in der Zeichnung als Hauptkrystall behandelten Individuum sind grössere Theile der Flächen 1, 4 und 6 vorhanden; von der Fläche 5 ist dagegen nur ein kleiner Theil sichtbar. Die Fläche 2 ist mangelhaft ausgebildet und zum Theil durch Bruch ersetzt; an Stelle der Fläche 3 finden sich nur Bruchflächen.

Die neben den Flächen 3 und 4 des Hauptkrystalles gezeichnete Fläche β ist eine und dieselbe Fläche des zweiten Individuums, welche in beiden Lagen sichtbar ist. In die neben 3 abgebildete Fläche β sind die Beobachtungen eingetragen worden, welche in der als 3 gezeichneten Lage gemacht wurden. Dagegen habe ich die neben 4 gesetzte Abbildung eben dieser Fläche β benutzt, um diejenigen Beobachtungen einzuschreiben, welche in einem speciellen Versuche, bei welchem die Fläche β horizontal lag und alle übrigen Theile des Krystalles mit Kupferfeilicht bedeckt waren, gemacht wurden. Bei der Belichtung war an dem rechten Rande der neben 4 gezeichneten Fläche β infolge der stark negativen Mitte die positive Elektricität nicht wahrzunehmen, wenn, wie bei dem zuletzt erwähnten Versuche, die ganze Fläche β frei lag. Diese positive Spannung trat dagegen in einem zweiten Versuche, bei welchem nur der rechte Rand der Fläche β frei, alle übrigen Theile aber bedeckt waren, sofort hervor. Bei der Abkühlung (Fig. 4 B) erschien die entsprechende negative Polarität an dem rechten Rande auch schon bei ganzer freier Fläche β.

Krystall No. 5. Fig. 5 A und 5 B. Taf. I.

Der Krystall No. 5 bildete ursprünglich mit dem Krystalle No. 3 eine grössere Druse, und war von mir durch Abbrechen getrennt worden*); er gleicht also demselben völlig in Bezug auf die Farbe seiner Masse und die Beschaffenheit seiner Flächen und Kanten.

---

*) Auffallend ist die Leichtigkeit, mit welcher sich meistens die aneinandergewachsenen Flussspathkrystalle von einander trennen lassen.

Fig. 5 A stellt die nach dem Belichten, und Fig. 5 B die beim Erkalten beobachteten elektrischen Spannungen dar.

Die elektrischen Spannungen nach dem Belichten zeigen im Allgemeinen gerade das entgegengesetzte Vorzeichen, als beim Erkalten; nur auf dem mittleren und unteren Theile des linken Randes der Fläche 2 vermochte nach dem Belichten die negative Elektricität nicht hervorzutreten, während die ihr entsprechende positive beim Erkalten erschien.

Bei Annäherung der Spitze des Platindrahtes an die rechte obere Ecke der Fläche 4 (an *c*) zeigte sich nach dem Belichten bei ganzer freier Fläche infolge der stark negativen Umgebung noch ein schwacher negativer Ausschlag; als dagegen die ganze Fläche mit Ausnahme dieser Ecke bedeckt war, trat auf dieser Ecke nach einem 16 Minuten langen Aussetzen ans Tageslicht bereits eine positive Spannung von + 4 Skth. auf.

Die Fläche 1 dieses Krystalles wurde noch zu einer Reihe specieller Versuche benutzt.

Als in einem Versuche die Mitte derselben durch Belichtung die elektrische Spannung — 11 Skth. zeigte, wurde die Fläche mehrere Male angehaucht, um durch den Beschlag die Elektricität zu beseitigen, und dann ins Dunkle gestellt. Aber auch nach längerer Zeit zeigte sich kein Uebergang ins Positive.

Sodann wurde dieselbe Fläche benutzt, um die bei steigender Erwärmung auftretenden Elektricitäten direct zu beobachten. Der Krystall wurde in Kupferfeilicht, welches auf dem kleinen neben dem Elektrometer befindlichen Ofen lag, so eingesetzt, dass nur die Fläche 1 frei blieb. Beim Erhitzen erschien in der Mitte dieser Fläche negative Elektricität, welche nach 15 Minuten dauernder Erhitzung, wobei aber wohl in keinem Theile des Krystalles die Temperatur über 100° gestiegen war, die Intensität — 2,7 Skth. erreichte. Nachdem diese Elektricität durch eine Alkoholflamme beseitigt, wurde der Krystall im Dunkeln der Abkühlung überlassen; nach einer Stunde zeigte die Mitte der Fläche + 5 Skth.

Bei einer (nach Entfernung der eben bezeichneten Elektricität) neuen, etwas stärkeren Erhitzung stieg in der Mitte der Fläche die Spannung auf — 4 Skth.

Analoge Resultate wurden am folgenden Tage bei Wiederholung der vorstehend beschriebenen Versuche erhalten.

Die Fläche 1 wurde ferner dem Lichte der zwischen den beiden mit Leydener Flasche verbundenen Conductoren der Holtz'schen Maschine (s. S. 236) überschlagenden Funken ausgesetzt; nach einer 7 Minuten langen Drehung der Maschine zeigte die Mitte der Fläche — 1,9 Skth.

Schliesslich mögen hier noch einige Mittheilungen über das Anhaften und Eindringen der Elektricität an den Flussspathkrystallen folgen.

Die Fläche 1 des in Kupferfeilicht eingesetzten Krystalles wurde mit einem feinen Haarpinsel überstrichen, wodurch sie positive Elektricität annahm, sodann in diesem Zustande ins Dunkle gestellt und bis zum anderen Tage darin gelassen. Es fand sich nun an diesem Tage auf der Fläche 1 noch eine elektrische Ladung, welche das Goldblättchen des Elektrometers ganz aus dem Gesichtsfelde trieb. Nach dem Bestreichen und Abblasen mit einer Alkoholflamme entwickelte sich wieder eine positive Spannung, die sehr bald auf + 9 und nach 20 Minuten bis + 36 Skth. stieg.

Eine 20 Minuten dauernde Einsetzung in den 100° heissen Ofen verringerte, weil sich stets noch neue Reste der früheren positiven Elektricität frei machten, die Spannung in der Mitte der Fläche nur auf + 28 Skth., die dann wieder auf + 34 Skth. stieg. Nach 12 Minuten langem Aussetzen an trübes Tageslicht, wodurch also negative Elektricität entwickelt wurde, sank jener positive Ausschlag auf + 11,5 Skth., und stieg nach 12 Minuten langem Stehen im Dunkeln wieder bis + 12,5 Skth. Eine neue, 10 Minuten dauernde Belichtung erzeugte jetzt in der Mitte der Fläche die Spannung von — 6 Skth., die nach dem Verweilen von 1 Stunde 20 Minuten im Dunkeln, infolge des immer noch hervortretenden Restes der ursprünglichen starken positiven Elektrisirung, bis — 0,9 abnahm und beim Stehen im Dunkeln bis zum folgenden Tage wieder auf + 3 Skth. gestiegen war.

Krystall No. 6. Fig. 6 A und 6 B. Taf. I.

Den aus Weardale stammenden Krystall habe ich von einer schönen Druse, die ich von meinem Collegen Herrn Professor A. Mayer er-

halten, abgelöst. Er besteht fast aus einem einzigen Individuum. Die Flächen 1 und 5 sind vollständig, die Flächen 2, 4 und 6 fast vollständig vorhanden, während von der Fläche 3 nur der obere Theil gut ausgebildet ist.

Die Masse des Krystalles ist weniger dunkel gefärbt als bei den vorhergehenden Krystallen; sie sieht durch die Beimengung des blauen Fluorescenzlichtes etwas schmutzig grünblau.

Fig. 6 A gibt die Beobachtungen nach dem Belichten, Fig. 6 B die Beobachtungen bei dem nach einer vorhergegangenen Erhitzung bis 100° eingetretenen Erkalten.

Krystall No. 7. Fig. 7 A und 7 B. Tafel II.

Die Masse des Krystalles No. 7 ist dunkler grün gefärbt als die des vorhergehenden, aber nicht klar, sondern etwas trübe. Der Gesammtkrystall besteht aus mehreren in paralleler Stellung verwachsenen Individuen; auf den Flächen 3, 4 und 6 finden sich ausserdem andere kleinere Krystalle in verschiedenen Stellungen aufgewachsen.

Fig. 7 A enthält die nach dem Belichten, Fig. 7 B die nach dem Erkalten gemachten Beobachtungen.

Die Fläche 1 dieses Krystalles wurde zu Versuchen mit der Bestrahlung durch das elektrische Kohlenlicht benutzt. Der Kürze wegen führe ich im Folgenden nur die in der Mitte derselben beobachteten Ausschläge an.

Nachdem die Krystallfläche 1 eine Minute lang in einem Abstande von ungefähr 300^{mm} von den Kohlenspitzen der Strahlung des elektrischen Lichtes ausgesetzt worden, zeigte die Mitte derselben die Spannung — 7; nach nochmaligem gleich langem Bestrahlen stieg dieselbe auf — 11,5 Skth. Ich bemerke, dass die in Fig. 7 A etwas oberhalb der Mitte eingetragene Spannung — 4 Skth. durch ein 13 Minuten langes Aussetzen an das Himmelslicht bei bedeckter Sonne (25. August Morgens zwischen 8—9 Uhr) erhalten wurde.

Als die Krystallfläche bei Wiederholung des Versuchs mit dem elektrischen Kohlenlichte in gleichem Abstande von den Kohlenspitzen an eine etwas stärker beleuchtete Stelle*) gebracht wurde, erzeugte die Bestrahlung von 1 Minute schon die Spannung — 11 Skth.

*) Durch die Aushöhlung der oberen positiven Kohle geht die stärkste Strahlung etwas abwärts.

Die unelektrisch gemachte Fläche 1 wurde wieder an dieselbe Stelle gebracht wie zuvor, aber zwischen sie und die Kohlenspitzen eine parallelepipedische mit einer Lösung von schwefelsaurem Chinin in Wasser gefüllte Glasflasche gestellt, so dass das Licht, ehe es den Krystall traf, eine Schicht dieser Lösung von 40^{mm} Dicke zu durchdringen hatte. Nach einer Bestrahlung von 2 Minuten Dauer zeigte die Mitte nur die Spannung — 1,3 Skth. Dagegen stieg dieselbe, als die Lösung des schwefelsauren Chinins durch destillirtes Wasser ersetzt wurde, nach einer Bestrahlung von $2\frac{1}{4}$ Minuten Dauer auf — 10 Skth.

Bei diesem letzten Versuche hatte der Krystall eine etwas andere Lage als bei den früheren; das Kästchen, in welchem er eingesetzt ruhte, war um 90^0 gedreht worden. Infolge dieser Aenderung in der Bestrahlungsweise trat in der rechten oberen Ecke der Fläche 1 (bei *c*) eine positive Spannung von + 1 Skth. auf.

Die Fläche 4 zeigte im oberen gut ausgebildeten Theile des rechten Randes positive Spannung. Links neben der in Fig. 7 A mit $\alpha\ \beta$ bezeichneten Linie lag eine ziemlich grosse, sehr ebene Durchgangsfläche. Bei specieller Prüfung fand sich auf derselben, nachdem sie 1 Minute dem elektrischen Kohlenlichte ausgesetzt war, überall negative Polarität, deren Spannung von der Linie $\alpha\ \beta$ nach links hin zunahm.

Nachdem ich die Prüfung der Flussspathkrystalle auf ihr thermoelektrisches Verhalten fast beendet, und dabei jede Steigerung der Temperatur über 100^0 C. sorgfältig vermieden hatte, um nicht durch eine zu starke Erhitzung die photoelektrische Erregung derselben zu schädigen, beschloss ich, doch wenigstens einen der Krystalle, auch auf die Gefahr hin, ihn für fernere Untersuchungen unbrauchbar zu machen, höheren Wärmegraden auszusetzen, um den Einfluss derselben auf die thermo- und photoelektrischen Vorgänge zu erforschen, und ich wählte dazu den Krystall No. 7, dessen Verlust um so leichter zu ertragen gewesen wäre, weil er bei den vorhergehenden Beobachtungen nur eine mässige photoelektrische Erregung gezeigt hatte.

Der Krystall No. 7 wurde in Kupferfeilicht eingesetzt, so dass die Fläche 1 frei blieb, darauf so lange bis 170^0 C. erhitzt, dass man die Temperatur in allen seinen Theilen als nahe gleich betrachten konnte, und dann im Dunkeln der Abkühlung überlassen. Die

thermoelektrische Spannung zeigte sich etwas grösser als früher, wo er nur bis 100° C. erhitzt worden war. Etwas unterhalb der Mitte der Fläche 1, wo in Fig. 7 B die Spannung + 1,4 Skth. steht, wurde jetzt ein Ausschlag von + 2,0 Skth. beobachtet.

Bei dem Belichten stellte sich aber ein ganz unerwartetes Resultat heraus. Ich hatte den Krystall, nachdem er von der zuvor erwähnten Erhitzung bis 170° abgekühlt war, durch Abblasen mit einer Alkoholflamme unelektrisch gemacht, sodann mit der freien Fläche 1 dem trüben Tageslichte ausgesetzt, und 1 Stunde 20 Minuten darin stehen lassen. Zu meinem Erstaunen fand ich eine ganz ausserordentlich starke photoelektrische Erregung; ich habe dieselbe in Fig. 7 A′ eingetragen.

Die in Fläche 1 der Fig. 7 A eingezeichneten elektrischen Spannungen waren durch ein Aussetzen von 13 Minuten an trübes Tageslicht erzeugt worden. Als ich jetzt, also nach der Erhitzung bis 170° und der vorhin beschriebenen starken photoelektrischen Erregung, den völlig unelektrisch gemachten Krystall ebenfalls 13 Minuten ins Tageslicht*) stellte, erhielt ich die in Fig. 7 A″ eingetragene elektrische Erregung. Ein ähnliches Resultat ergab nach einigen Tagen ein neues 14 Minuten dauerndes Aussetzen ans Tageslicht; anstatt — 15 Skth. (Fig. 7 A″) erhielt ich in der Mitte der Fläche die Spannung — 18 Skth., und ebenso waren auf den übrigen Theilen der Fläche 1 die Spannungen entsprechend gestiegen.

Die Eigenschaft der Fläche 1, durch den Einfluss des Lichtes elektrisch zu werden, war also durch die vorhergegangene Erhitzung bis 170° wesentlich erhöht worden.

Bei der eben erwähnten Erhitzung hatte die Fläche 1 frei an der Luft gelegen; dagegen waren die übrigen Flächen des Krystalles mit Kupferfeilicht bedeckt gewesen. Eine Untersuchung dieser letzteren Flächen auf ihr photoelektrisches Verhalten zeigte keine so beträchtliche Zunahme der Erregbarkeit durch das Licht, wie sie auf der Fläche 1 beobachtet worden; hat überhaupt eine Zunahme derselben stattgefunden, so ist dieselbe nicht bedeutend gewesen.

Ich wage für jetzt nicht zu entscheiden, durch welchen Umstand

*) Der Himmel war während dieser Zeit ziemlich wolkig; doch brach auch wohl auf einige Augenblicke die Sonne durch; der Krystall stand aber gegen die Sonnenstrahlen im Schatten.

dieser Unterschied in den Aenderungen der Erregbarkeit auf der Fläche 1 und den übrigen Flächen hervorgerufen worden. Er könnte erzeugt sein dadurch, dass die Fläche 1 beim Erhitzen oben gelegen, oder dadurch, dass sie von der Luft berührt wurde, während die übrigen mit Kupferfeilicht bedeckt waren; es könnte aber auch auf der Fläche 1 infolge von früherer Lichteinwirkung die photoelektrische Erregbarkeit in stärkerem Grade als auf den benachbarten Flächen geschwächt gewesen und durch die Erhitzung nur eine Annäherung an den früheren Zustand wieder hergestellt worden sein.

Krystall No. 8. Fig. 8 A und 8 B. Taf. II.

Der dem Freiberger Museum gehörige Krystall No. 8 ist in seiner Masse nicht ganz so dunkelgrün wie die Krystalle No. 1 bis 5. Von allen sechs Würfelflächen sind mehr oder weniger grosse Theile vorhanden; jedoch sind die in Fig. 8 A und B gezeichneten Flächen keine Würfelflächen, sondern diese letzteren werden vielmehr durch die Flächen eines sehr stumpfen Pyramidenwürfels vertreten. Auf den Kanten liegen ausserdem noch sehr schmale Flächen eines weniger stumpfen Pyramidenwürfels. Die Streifungen der Würfelflächen (Flächen des stumpfen Pyramidenwürfels) gehen (oft etwas gebogen) den Würfelkanten parallel. Der Krystall war mit dem Theile der Fläche 3 aufgewachsen gewesen, wo in Fig. 8 A + 16,5, + 21 und + 13 steht.

Fig. 8 A stellt die nach dem Belichten, Fig. 8 B die nach dem Erkalten gemachten Beobachtungen dar. Die Fläche 1 hatte 30 Minuten*), die Fläche 2 20 Min., die Fläche 3 15 Min., die Fläche 4 30 Min., die Fläche 5 17 Min. und die Fläche 6 22 Min. im Tageslichte gestanden; an den verschiedenen Tagen, an welchen die Versuche ausgeführt wurden, war aber die Intensität des Tageslichtes nicht gleich; bei Prüfung der Fläche 5 war der Himmel zum Theil trübe, und das Licht musste erst das Glas einer Fensterscheibe durchdringen.

Auffällig ist der grosse Unterschied in der Stärke der negativen Polarität auf der Fläche 4 und auf der Fläche 1; indess lässt sich

*) Bei diesem Versuche war der Himmel trübe; doch waren aber auch zeitweilig die Sonnenstrahlen durch die Wolkenlücken gedrungen und hatten die Fläche 1 getroffen.

gegenwärtig der Grund davon nicht mit Bestimmtheit angeben, da der Krystall nicht frisch aus der Grube genommen untersucht worden ist. Bereits in der vorläufigen Mittheilung habe ich nämlich hervorgehoben, dass durch starke Bestrahlung die Eigenschaft, durch das Licht elektrisch zu werden, geschwächt wird. Es wäre daher wohl möglich, dass die Fläche 1 des Krystalls No. 8 vielleicht während seiner Aufstellung in einem Glaskasten dem Lichte mehr ausgesetzt gewesen als die Fläche 4; denn jedenfalls wird der Krystall in das Pappkästchen so gelegt worden sein, dass seine vollkommenste Fläche 1 sichtbar geworden. Durch solchen Umstand würde die Schwäche der negativen Elektricität auf dieser Fläche 1 erklärlich sein. Die Schwächung könnte jedoch auch von der Einwachsung des zweiten kleineren Krystalles herrühren.

Die an dem unteren Rande verbrochene Fläche 6 erscheint, wenn der ganze noch vorhandene Theil frei liegt, beim Belichten überall positiv, und beim Erkalten negativ. Eine genaue Durchsicht der Zahlenwerthe lässt aber schon erkennen, dass beide Polaritäten am oberen Rande stärker sind als am unteren. Dieser untere Theil stösst an die Anwachsungsstelle auf der Fläche 3, und es stellt der vorhandene Theil der Fläche 6 gewissermassen nur den Rand derselben dar. Es ist daher nicht unwahrscheinlich, dass die am unteren Rande der Fläche 6 zu erwartende Polarität (negativ nach dem Belichten, und positiv nach dem Erkalten) nur durch die sehr starke entgegengesetzte des oberen Randes verdeckt worden ist. Und in der That, als in einem speciellen Versuche die Fläche 6 mit Ausnahme eines schmalen Streifen an dem unteren verbrochenen Rande mit Kupferfeilicht bedeckt wurde, zeigte dieser allein frei liegende Streifen, nachdem er eine Minute lang dem elektrischen Kohlenlichte ausgesetzt gewesen, eine negative Spannung bis zu — 2 Skth.

Ich habe oben auf den beträchtlichen Unterschied in der Intensität der auf den Flächen 1 und 4 durch das Licht hervorgerufenen Elektricitäten aufmerksam gemacht und dabei angedeutet, dass möglicherweise die schwache Erregung der Fläche 1 die Folge eines längeren Aussetzens an das Licht sein könne. Es stand daher zu hoffen, dass, da eine Erhitzung bis über 150° C. bei dem früher untersuchten Krystalle No. 7 sich für die Verstärkung der photoelektrischen Eigenschaft vortheilhaft erwiesen hatte, auch auf der Fläche 1

des vorliegenden Krystalles eine ähnliche Erhöhung ihrer Erregbarkeit durch das Licht sich werde gewinnen lassen.

Der Krystall No. 8 wurde bis auf die Fläche 1 in der gewöhnlichen Weise in Kupferfeilicht eingehüllt, und ungefähr 1 Stunde bis 157° erhitzt. Nach dem Erkalten und dem Entfernen der dabei hervorgetretenen Elektricität wurde er 32 Minuten hindurch dem Tageslichte ausgesetzt; der Himmel erschien dabei grauweiss, bisweilen brachen die Sonnenstrahlen durch die Lücken zwischen den Wolken, trafen jedoch die Fläche 1 nicht, die vielmehr gegen sie im Schatten stand. Bei der Prüfung beobachtete ich dann die in Fig. 8 A′ eingetragenen Spannungen, die sehr beträchtlich grösser sind als die früher beobachteten und in Fig. 8 A verzeichneten.

Krystall No. 9. Fig. 9 A und 9 B. Taf. II.

Der Krystall No. 9 gleicht in der Beschaffenheit seiner Masse dem Krystalle No. 7, neben welchem er auch ursprünglich angewachsen war. Von Krystallflächen ist nur die Fläche 1 ziemlich vollständig, wenn auch mangelhaft ausgebildet, vorhanden; von den Flächen 5 und 4 finden sich etwas grössere, von den Flächen 6 und 2 etwas kleinere Theile. Von der Krystallfläche 3 ist nur ein sehr geringer Rest sichtbar; die übrige Begrenzung auf dieser Seite wird durch eine Bruchfläche gebildet, in deren Mitte die grüne Farbe der Substanz ins Weissliche übergeht.

Da es mir von grossem Interesse erschien, die thermoelektrischen Eigenschaften der Flussspathkrystalle mit den photoelektrischen unmittelbar zu vergleichen, so hatte ich sämmtliche möglichst vollkommen ausgebildete Krystalle, um ihr thermoelektrisches Verhalten kennen zu lernen, bis 100° C. erhitzt; und zwar war dies geschehen, bevor ich auf den merkwürdigen Einfluss aufmerksam geworden war, welchen eine Erhitzung bis 150 und 180° C. auf die photoelektrische Erregbarkeit der Flussspathkrystalle ausübt.

Es lag nun aber die Frage nahe, ob nicht auch bereits eine geringere Erhitzung als die eben angegebene einen begünstigenden Einfluss ausüben könne. Für die Beantwortung dieser Frage besass ich infolge der zuvor erwähnten thermoelektrischen Prüfungen der besseren Krystalle nur noch geringes Material, welches wenigstens durch mich, und wahrscheinlich auch früher, keiner höheren Tempe-

ratur ausgesetzt worden war. Zu den wenigen, wegen der mangelhaften Ausbildung ihrer Flächen zurückgestellten, und also nicht erhitzten Krystallen gehörte der vorliegende Krystall No. 9.

Die Fläche 1 dieses Krystalles wurde 10 Minuten lang dem Tageslichte ausgesetzt (um 3 Uhr 30 Min. Nachmittags); am Himmel standen sehr zahlreiche grauweisse Wolken, durch deren Lücken bisweilen die Sonne hindurchschien; der Krystall befand sich jedoch im Schatten gegen die Sonnenstrahlen. Durch die 10 Minuten dauernde Belichtung wurden diejenigen elektrischen Spannungen erzeugt, welche ich in Fig. 9 A′ in die Abbildung der Fläche 1 eingetragen habe.

Darauf wurde der Krystall in Kupferfeilicht so eingesetzt, dass die Fläche 1 frei blieb, und nur bis 80° C. erwärmt. Nach 15 Minuten Abkühlung untersucht, gab er die in Fig. 9 B eingeschriebenen thermoelektrischen Spannungen.

Unmittelbar darauf (4 Uhr 40 Min.) wurde der Krystall, nachdem die durch die Erkaltung erzeugte Elektricität mittelst der Alkoholflammme entfernt war, wieder 10 Minuten an demselben Orte, wie zuvor, dem Tageslichte ausgesetzt. Der Himmel war etwas grauer geworden und die Sonne brach nicht durch die Wolken; auch war ihre Wirkung überhaupt durch ihre geringere Höhe über dem Horizonte etwas vermindert worden. Trotzdem zeigte die Fläche 1 eine wesentlich erhöhte Erregbarkeit; ich fand die in Fig. 9 A (Fläche 1) eingetragenen elektrischen Spannungen. In der Mitte der Fläche 1 war also die Intensität von —7 auf —13 Skth. gestiegen.

Es wäre nicht unmöglich gewesen, dass diese Verstärkung der elektrischen Spannungen dadurch hervorgerufen worden, dass der Krystall bei dem zweiten Aussetzen ans Tageslicht 10 bis 15° C. wärmer war als bei dem ersten. Um zu entscheiden, ob dieser Umstand (eine 10 bis 15° höhere Temperatur) für sich im Stande sei, einen Einfluss auf die Stärke der durch Belichtung erzeugten elektrischen Spannungen auszuüben, wurde der Krystall am andern Morgen (8 Uhr 40 Min.) wieder 10 Minuten dem Tageslichte ausgesetzt, und in der Mitte der Fläche 1 die Spannung — 10,7 Skth. beobachtet. Darauf wurde der Krystall eine Stunde lang in das bis 39° C. erwärmte kupferne Gefäss gestellt, und sodann (10 Uhr) von Neuem ins Tageslicht gebracht; es wurde jetzt in der Mitte die Span-

nung — 11,5 Skth. gefunden. Der Himmel war seit dem ersten Versuche ziemlich unverändert geblieben; der höhere Stand der Sonne erklärt jedoch hinreichend die geringe Zunahme um 1,5 Skth.

Die nach dem Erhitzen bis 80° C. beobachtete nicht unbeträchtliche Zunahme der photoelektrischen Spannungen ist also offenbar eine Folge dieser Erhitzung gewesen.

Bei dem Zustande des Krystalles, wie er nach der eben erwähnten Erhitzung bis 80° C. bestand, sind die in Fig. 9 A eingetragenen Beobachtungen ausgeführt worden. Die Flächen 1, 4 und 5 sind 10 Minuten, die Flächen 3 und 6 11 Minuten und die Fläche 2 12 Minuten dem Tageslichte ausgesetzt gewesen. Ich erinnere daran, dass bei der obigen Erhitzung nur die obere Fläche 1 frei die Luft berührte, während die übrigen Flächen von Kupferfeilicht bedeckt waren.

In Bezug auf die thermoelektrischen Vorgänge ist nur die Fläche 1 nach der Erhitzung bis 80° C. untersucht worden; die bei der Abkühlung nach dieser Erhitzung beobachteten Spannungen sind, wie bereits erwähnt, in Fig. 9 B eingetragen worden.

Krystall No. 10. Fig. 10 A und 10 B. Taf. II.

Der Fig. 10 abgebildete Krystall besteht hauptsächlich aus drei verwachsenen Individuen; die Masse derselben ist hellgrün gefärbt, ziemlich klar und durchsichtig. An dem in der Fig. 10 als Hauptkrystall behandelten Individuum sind etwas grössere Theile der Würfelflächen 1, 4 und 5 sichtbar, während von der Fläche 6 nur ein äusserst geringer Rest vorhanden ist. Alle übrigen Begrenzungen, soweit sie nicht Flächen der anderen beiden Individuen sind, werden von Bruchflächen gebildet.

Da der Krystall zum grössten Theile von Bruchflächen begrenzt wird, und auch von den Flächen 4 und 5 blos die Ränder erscheinen, so waltet auf seiner Oberfläche nach dem Belichten (Fig. 10 A) die positive, und nach dem Erkalten (Fig. 10 B) die negative Polarität vor. Nur auf der Würfelfläche 1 erscheint nach dem Belichten die negative und nach dem Erkalten die positive Spannung; dagegen tritt auf dem rechts von dieser Fläche liegenden angeschlagenen Durchgange des zweiten Individuums nach der Belichtung die positive Elektricität auf. Auf der an die Stelle der Würfelfläche 3 ge-

tretenen Bruchfläche ist die Substanz nur weisslichgrün und ausserdem liegt in der Mitte der Bruchfläche noch eine kleine Bleiglanzmasse; dies erklärt die daselbst beobachtete geringe Stärke der Elektricität.

Die früher an den Krystallen No. 1 und 5 über die elektrischen Vorgänge bei steigender Temperatur angestellten Versuche bezogen sich nur auf Krystallflächen; es schien mir nöthig, durch die Beobachtung den Beweis zu liefern, dass die Bruchflächen ebenfalls das entsprechende Verhalten zeigen. Ich wählte zu einer solchen die Fläche 2 des vorliegenden Krystalles, die sich durch ihre nicht zu geringe elektrische Erregung empfahl.

Der Krystall wurde auf dem kleinen neben dem Elektrometer befindlichen Ofen (S. 211) so in Kupferfeilicht eingesetzt, dass nur die Bruchfläche 2 frei lag: beim Erhitzen zeigte die Mitte dieser Fläche positive Elektricität, die bis + 1,5 Skth. stieg und beim Erkalten in die negative überging.

Darauf wurde der Krystall in eine kupferne Schale in Kupferfeilicht eingesetzt, so dass ebenfalls die Fläche 2 frei blieb. Als nun diese Schale mit dem Krystall 3 Minuten in einem bis 170° C. erhitzten Ofen gestanden hatte, zeigte die Mitte der Fläche sogleich nach dem Herausnehmen die positive Spannung von + 1 Skth.

B. Im reflectirten Lichte violblau erscheinende Flussspäthe von Weardale und Alston Moor.

Die im reflectirten Lichte violblauen Flussspathkrystalle von Weardale und Alston Moor erscheinen im durchgehenden Lichte grünlich gefärbt. Diese grünliche Färbung ist meistens nur schwach und geht öfter ins Grauliche über. Bisweilen wechseln auch grüne Schichten mit rothen ab.

Krystall No. 11. Fig. 11 A und 11 B. Taf. II.

Der Krystall No. 11 stammt von Alston Moor. Die im reflectirten Lichte violblaue Färbung seiner Masse ist nicht sehr tief; an den verletzten Stellen auf der Fläche 4 erscheint die Farbe sogar fast weisslich; Flecken von weisslichem Aussehen umgeben auch den kleinen auf den Flächen 1 und 4 eingewachsenen Krystall. Im durch-

gehenden Lichte erscheint der Krystall grünlich. Die Fläche 1 ist fast ganz vollständig vorhanden; von den Flächen 2, 5 und 6 finden sich grössere gut ausgebildete Stücke; dagegen ist von der Krystallfläche 4 nur ein sehr schmaler Rest zu sehen, und der übrige Theil der Fläche 4, ebenso wie die Fläche 3, wird von Bruchflächen gebildet.

Die nach dem Belichten beobachteten Spannungen sind in die Zeichnung 11 A und die nach dem Erkalten gemessenen in die Zeichnung 11 B eingetragen. Bei der Belichtung hatte die Fläche 1 46 Minuten und die Fläche 3 47 Minuten in trübem Tageslichte gestanden; die Fläche 2 hatte sich 22 Minuten lang der durch Wolken bedeckten Sonne gegenüber befunden; die Fläche 5 war 20 Minuten und die Fläche 6 29 Minuten dem hellen Tageslichte ausgesetzt gewesen.

Die Krystallflächen erscheinen nach dem Belichten negativ, nach dem Erkalten positiv; die Bruchflächen zeigen ein entgegengesetztes Verhalten.

Wir haben schon früher gesehen, dass auf manchen Bruchflächen nach dem Belichten eine starke positive Spannung auftritt, z. B. auf Fläche 2 des Kryst. No. 2, auf den Flächen 2 und 3 des Kryst. No. 5, auf Fläche 3 des Kryst. No. 8. Auf der Fläche 3 des vorliegenden Krystalles No. 11 ist die positive Elektricität sogar beträchtlich grösser als die negative auf den ausgebildeten Krystallflächen, und doch hatten die Flächen 1 und 3 fast gleich lange im trüben Tageslichte gestanden.

Der Krystall sass ursprünglich mit anderen kleineren Krystallen auf einer grösseren Gesteinsmasse, und wurde von mir losgebrochen, um ihn bequemer auf sein photo- und thermoelektrisches Verhalten prüfen zu können. Die als Projection der Fläche 3 gezeichnete Bruchfläche ist also eine frische Fläche, welche zuvor noch nicht dem Lichte ausgesetzt gewesen war; dagegen könnten die eigentlichen Krystallflächen allerdings mehr oder weniger Lichteinwirkungen empfangen haben, bevor das betreffende Handstück von mir erworben wurde, und dadurch ihre Empfindlichkeit gegen die Belichtung verringert worden sein. Nach vielen Beziehungen hin würde es überhaupt grosses Interesse haben, ganz frisch aus der Grube entnom-

mene und vor dem Einflusse jedes Lichtes sorgfältig geschützte Flussspathkrystalle zu untersuchen.

Krystall No. 12. Fig. 12 A und 12 B. Taf. II.

Der von Weardale stammende Krystall No. 12 ist derselbe, welchen ich in meiner vorläufigen Mittheilung unter No. I aufgeführt habe. Er besteht wesentlich aus zwei durchwachsenen Individuen, von denen in der Zeichnung das eine als Hauptkrystall behandelt ist. Die Farbe ist im reflectirten Lichte ziemlich tief violblau, nur an den verbrochenen Stellen wird sie fast weiss. Im durchgehenden Lichte erscheint der mittlere Theil grünlich; ihn umgiebt eine röthliche Schicht.

Die Würfelflächen sind, wie bei mehreren der früheren Krystalle, durch sehr ungleich grosse Flächen eines sehr stumpfen Pyramidenwürfels ersetzt; auf den Kanten liegen sehr schmale Flächen eines weniger stumpfen Pyramidenwürfels.

Die Fläche 1 ist fast ganz vorhanden; mässig grosse Theile erscheinen von den Flächen 4 und 5; von der Fläche 2 ist nur ein kleiner Theil übrig; an die Stelle des grössten Theiles dieser Fläche, sowie an die Stelle der Flächen 3 und 6 sind Bruchflächen getreten.

Auf der Fläche 1 dieses Krystalles wurde zuerst von mir, nachdem der Krystall bis 100° erhitzt und dann erkaltet war, eine positive Spannung von + 2 Skth. wahrgenommen. Gestützt auf diese Beobachtung und auf die im Eingange dieser Abhandlung dargelegten Betrachtungen versuchte ich dann die Wirkung des Sonnenlichtes und erhielt in der That sehr beträchtliche elektrische Spannungen. In der Mitte der Fläche 1 stieg die negative Spannung, nachdem der Krystall einige Zeit dem Sonnenlichte ausgesetzt gewesen, bis — 23 Skth. Am folgenden Tage wurde der zuvor unelektrisch gemachte Krystall von Neuem dem Lichte der etwas verschleierten Sonne ausgesetzt, und von Zeit zu Zeit die elektrische Spannung auf den verschiedenen Punkten der Fläche 1 gemessen. Diese Spannungen wuchsen mit der Dauer der Bestrahlung, und das Verhältniss der auf den verschiedenen Punkten gemessenen Spannungen blieb nahe dasselbe. Nach $1\frac{1}{4}$ Stunde hatte sich die Fig. 12 A′ dargestellte elektrische Vertheilung auf der Fläche ausgebildet. Als unmittelbar darauf die in diesem Zustande befindliche Fläche noch einer kurzen Bestrahlung durch das mittelst einer kleineren Linse concentrirte Sonnenlicht aus-

gesetzt wurde, zeigten die elektrischen Spannungen die in Fig. 12 A'' eingetragenen Grössen.

Nachdem bisher ausschliesslich das Sonnenlicht zur Erregung der elektrischen Spannungen verwandt worden, versuchte ich am dritten Tage die Wirkung des zerstreuten Tageslichtes; ich liess den Krystall 2 Stunden in demselben (geschützt gegen die Strahlen der Sonne) stehen und fand dann die in Fig. 12 A''' eingetragenen Werthe.

Am vierten Tage wünschte ich die starke elektrische Spannung, wie ich sie an den vorhergehenden Tagen bereits durch das Sonnenlicht erhalten hatte, noch weiter zu erhöhen, und setzte die Fläche 1 30 Minuten lang den Strahlen des durch eine ziemlich grosse Linse concentrirten Sonnenlichtes aus. Die kleine kupferne Schale, in welcher der Krystall in Kupferfeilicht eingebettet lag, war dabei so heiss geworden, dass ich sie kaum mit der Hand halten konnte. Bei der Prüfung nach dieser Bestrahlung zeigte der Krystall fast gar keine elektrische Spannung mehr; die durch die Belichtung noch erzeugte schwache negative Spannung wurde durch die infolge der Abkühlung des Krystalles entstehende positive neutralisirt.

Der Krystall war an den vorhergehenden Tagen gewöhnlich nach dem Belichten bis 100° erhitzt und längere Zeit auf dieser Temperatur erhalten worden, ohne dass eine merklich schwächende Wirkung auf die Entstehung der Elektricität durch Belichtung wahrgenommen wurde. Die in dem vorhergehenden Versuche mit concentrirtem Sonnenlichte erfolgte ungemein grosse Schwächung der photoelektrischen Eigenschaft konnte also nicht durch die infolge der starken Bestrahlung entstandene Erhöhung der Temperatur hervorgerufen worden sein, sie musste eine Folge der Einwirkung der leuchtenden und der chemisch wirkenden Strahlen sein. Auch die oben S. 244 und 247 mitgetheilten Versuche mit den Krystallen No. 7 und No. 8 beweisen, dass selbst eine Temperatur von 170° die photoelektrische Erregung nicht schwächt, sondern sie vielmehr erhöht.

Seit jener Zeit habe ich die Fläche 1 des vorliegenden Krystalles wiederholt geprüft und dieselbe mannichfachen Behandlungen ausgesetzt; es ist mir aber bis jetzt durch kein Mittel gelungen, die frühere, für einen violblauen Krystall ausserordentlich hohe photoelektrische Erregbarkeit wieder herzustellen.

In Fig. 12 A sind in die Zeichnung der Fläche 1 diejenigen

Werthe eingetragen, wie sie bei dem infolge der vorher erwähnten Behandlung eingetretenen Zustande der Krystallfläche nach 48 Minuten langem Aussetzen an das Tageslicht gefunden wurden*). Als unmittelbar darauf die Fläche 1 in diesem Zustande noch 10 Minuten lang den directen Strahlen der Sonne ausgesetzt wurde, stiegen die negativen Spannungen noch etwas; die nach dieser Bestrahlung gemessenen Werthe sind in Fig. A^{IV} eingezeichnet worden. Man sieht, dass trotz der gegenwärtig viel grösseren Empfindlichkeit des Elektrometers keine elektrischen Spannungen von dem Betrage der früher (Fig. 12 A′ und A″) beobachteten erhalten werden konnten.

Ja selbst durch eine Bestrahlung mittelst des elektrischen Lichtes liess sich die frühere Intensität der elektrischen Spannungen nicht wieder hervorrufen. Als die Fläche 1 den Strahlen dieses Lichtes 4 Minuten lang ausgesetzt wurde, fanden sich bei hoher Empfindlichkeit des Elektrometers nur die in Fig. 12 A^{V} verzeichneten Werthe.

Die in Fig. 12 A eingetragenen photoelektrischen Beobachtungen sind nach dem Aussetzen des Krystalles an das Tageslicht leider bei sehr verschiedenen Zuständen desselben und nach verschiedener Dauer gemacht worden. Die Fläche 1 hatte 48 Minuten, die Fläche 5 33 Minuten, die Fläche 2 25 Minuten, die Fläche 3 33 Minuten, die Fläche 4 38 Minuten und die Fläche 6 36 Minuten lang im Tageslicht gestanden, das aber bei Fläche 4 und 6 sehr trübe war.

Die positive Spannung, welche bei anderen Krystallen meist durch die Belichtung gerade auf den Bruchflächen in ziemlicher Stärke auftritt, erscheint auf den Bruchflächen 3 und 6 dieses Krystalles nur schwach; es hat dies seinen Grund in dem Umstande, dass, wie schon oben hervorgehoben, diese Bruchflächen fast weisslich erscheinen, also des Farbstoffes entbehren.

Da bei der Entstehung der Elektricität auf der Oberfläche der Flussspathkrystalle der Farbstoff eine wichtige Rolle spielt, so versuchte ich schliesslich, ob sich die auf der Fläche 1 des vorliegenden Krystalles früher beobachtete hohe Erregbarkeit durch Einlegen in eine fluorescirende Flüssigkeit wiederherstellen würde. Nun zeigen aber die Flächen der Flussspäthe ein eigenthümliches Verhalten gegen

*) Die in Fig. 12 A (Fläche 1) eingetragenen Werthe sind bei einer viel höheren Empfindlichkeit des Elektrometers erhalten worden, als die in Fig. 12 A‴ eingeschriebenen.

Wasser; sie werden von demselben nicht benetzt*). Selbst wenn man die Fläche mit einer concentrirten Lösung von kohlensaurem Natron, welche dieselbe benetzt, behandelt hat, so hört nach dem Abspülen dieser Lösung mit Wasser sofort die Benetzbarkeit durch letzteres auf. Alkohol und käufliches Benzol benetzen jedoch die Flächen.

Von Herrn Dr. Sachsse hatte ich eine Lösung von Chlorophyll in käuflichem Benzol erhalten; in dieser liess ich 14 Tage den Krystall No. 12 liegen. Bei der Unsicherheit der Abschätzung der Lichtwirkung vermag ich aber nur zu constatiren, dass nach dieser Behandlung wesentliche Aenderungen in dem Grade der Erregbarkeit durch das Licht auf der Fläche 1 nicht beobachtet werden konnten.

Die Versuche an dem Krystall No. 7 und No. 9 haben darauf hingewiesen, dass bei einer Erhitzung bis 170° C. nur die frei an der Luft liegende Fläche eine wesentliche Erhöhung ihrer Erregbarkeit durch das Licht gewann, dagegen die bedeckten Flächen eine gleich starke Erhöhung derselben nicht erfahren hatten. Um nun die Verhältnisse noch weiter zu ändern, hüllte ich den Krystall No. 12 vollständig (also ringsum) in Kupferfeilicht ein und erhitzte ihn so bis 180°. Nach dem Erkalten fand sich die Erregbarkeit noch weiter geschwächt.

Der Krystall ward jetzt wieder 9 Tage in die obenerwähnte Chlorophylllösung gelegt; die Fläche 1 erschien aber selbst nach einer 40 Minuten langen Bestrahlung durch die Sonne unelektrisch.

Der Krystall wurde dann, wie gewöhnlich, in Kupferfeilicht eingesetzt, so dass die Fläche 1 frei blieb, und bis 195° C. erhitzt. Nach dem Erkalten zeigte die Mitte der Fläche die Spannung + 1,2. Darauf stellte ich den Krystall 18 Minuten der Sonne, die aber von Wolken bedeckt war, gegenüber und fand dann die in Fig. 12 A^{VI} eingetragenen Spannungen. Die Erhitzung der freiliegenden Fläche 1 hatte also wieder eine mässige Erregbarkeit auf derselben hervorgerufen.

Die in Fig. 12 B eingetragenen Beobachtungen sind nach einem Erkalten ausgeführt worden, welchem eine zur vollständigen Durch-

*) Mit diesem Umstande hängt wohl auch die ganz ausgezeichnete Isolation des Flussspathes zusammen.

dringung des Krystalles ausreichend lange Erhitzung bis 100° vorhergegangen war.

Krystall No. 13. Fig. 13 A und 13 B. Taf. II.

Der aus zwei durchwachsenen Individuen bestehende Krystall No. 13 gleicht in der Beschaffenheit seiner Krystallflächen dem Krystall No. 11 und stammt ebenso wie dieser von Alston Moor. Während er im reflectirten Lichte eine ziemlich dunkelblauviolette Farbe zeigt, erscheint er im durchgehenden Lichte im Allgemeinen graugrünlich; jedoch liegt ungefähr 3mm unterhalb der Fläche 1 und zwar mit ihr parallel eine schön grüngefärbte Schicht, durch deren Mitte sich, ebenfalls parallel zur Fläche 1, ein dunklerer Streifen hindurchzieht. Oberhalb dieser grünen Schicht, nach der Fläche 1 hin, sieht die Substanz des Krystalles röthlich aus.

Die Fläche 1 des als Hauptkrystall betrachteten Individuums ist ziemlich vollständig vorhanden; von den Flächen 2, 4 und 5 finden sich grössere Theile, von der Fläche 6 nur ein geringer Rest; die an Stelle der Fläche 3 gezeichnete Projection stellt eine Bruchfläche dar, welche von der Substanz des zweiten Individuums gebildet wird. Von diesem zweiten Individuum sind drei Krystallflächen zum Theil vorhanden; die grösste derselben ist die mit α bezeichnete Fläche, welche infolge ihrer Lage gleichzeitig in den Projectionen der Flächen 4 und 5 sichtbar wird.

Fig. 13 A stellt die elektrischen Spannungen nach der Belichtung und Fig. 13 B bei der Erkaltung dar.

Die nach der Belichtung auftretenden Spannungen erreichen auf den Flächen 1, 2 und 3 eine ziemliche Stärke. Die in die Zeichnung der Fläche 1 aufgenommenen Spannungen wurden beobachtet, nachdem die Fläche 1 20 Minuten lang im Tageslichte gestanden hatte. Die Fläche 2 war 25 Minuten und vielleicht eben so lange auch die Fläche 3 dem trüben Lichte eines mit grauen Schneewolken bedeckten Himmels, das aber zeitweise durch etwas schwachen Sonnenschein unterbrochen wurde, ausgesetzt gewesen.

Die beim Erkalten beobachteten elektrischen Spannungen zeigen nur eine geringe Stärke.

Krystall No. 14. Fig. 14 A und 14 B. Taf. II.

Der Krystall No. 14 stimmt in den an ihm auftretenden Krystallformen mit den vorhergehenden überein; er besteht hauptsächlich aus zwei grösseren durchwachsenen Individuen, an welche sich auf den unteren Theilen zahlreiche kleine Flussspathwürfel angesetzt haben.

Von dem in den Zeichnungen Fig. 14 A und B vorzugsweise abgebildeten Hauptkrystalle sind grössere Theile der Krystallflächen 4 und 5, und kleinere Theile der Flächen 1, 2 und 3 vorhanden. An Stelle der Fläche 6 finden sich kleine aufgewachsene Krystalle und Bruchflächen derselben, weshalb dieselbe in die Zeichnungen gar nicht aufgenommen worden ist.

Auf den Flächen 3, 4 und 5 tritt die Photoelektricität in ziemlicher Stärke auf. Auf der Fläche 1 erscheint beim Erkalten (Fig. 14 B) nur negative Elektricität; nach dem Belichten wurde dem entsprechend entweder auch blos positive Spannung, oder unter etwas abgeänderten Verhältnissen die in Fig. 14 A eingetragene Vertheilung, bei welcher nur der Rand positiv erscheint, beobachtet. Aus diesen Beobachtungen ergiebt sich, dass die beim Erkalten auf Fläche 1 auftretende negative Spannung nur die dem Rande angehörige ist; dies wird auch durch den Umstand bekräftigt, dass diese negative Spannung nach unten hin nicht so stark zunimmt, wie dieses statthaben würde, wenn die negative Elektricität der Mitte der Fläche 1 und nicht blos ihrem Rande entspräche.

Krystall No. 15. Fig. 15 A und 15 B. Taf. III.

Der aus Weardale stammende Krystall gehört der Freiberger Sammlung und besteht vorzugsweise aus zwei durchwachsenen Individuen, von denen das grössere, in seinen Flächen am meisten ausgebildete, in Fig. 15 A und B dargestellt ist.

Im reflectirten Lichte zeigt der Krystall keine sehr tief violblaue Färbung; im durchgehenden Lichte, das jedoch nur an einigen kleinen Stellen beobachtet werden kann, erscheint die Substanz im Allgemeinen schwach graulich, nach aussen hin umgeben von einer röthlichen Schicht.

Die Fläche 1 ist vollständig vorhanden; von den Flächen 4, 5

und 6 finden sich grössere Stücke. Von der Fläche 2 ist allerdings ein grosser Theil vorhanden, jedoch mit kleinen Krystallen von Bleiglanz belegt. Die Stelle der Fläche 3 wird von Durchgangs- und Bruchflächen eingenommen; nur unten rechts erscheint der Rest einer Würfelfläche, welche einer Fortsetzung des grösseren Hauptkrystalles oder einem kleineren mit ihm in paralleler Stellung befindlichen angehört.

Fig. 15 A stellt die nach der Belichtung, Fig. 15 B die bei Erkaltung beobachteten elektrischen Spannungen dar.

Auf der sehr vollkommen ausgebildeten und auch vollständig vorhandenen Fläche 1 konnte auffälliger Weise weder durch das Tageslicht noch durch das directe Sonnenlicht, selbst als diese Fläche 12 Minuten lang in schwachem Sonnenschein gestanden hatte, eine wahrnehmbare Spur von Elektricität erzeugt werden; erst durch die starke Strahlung des elektrischen Kohlenlichtes, das durch eine 40mm dicke Schicht einer Alaunlösung gegangen war, entstand eine schwache negative Spannung; nach 1 Minute langer Bestrahlung durch dieses Licht zeigte die Mitte der Fläche — 1,3; nach einer 7 Minuten langen gleichen Bestrahlung war die Spannung daselbst nur bis — 2 Skth. gestiegen. Die nach dieser letzten Bestrahlung auf verschiedenen Punkten der Fläche 1 beobachteten Ausschläge des Elektrometers habe ich in Fig. 15 A′ eingetragen.

Während nun diese Fläche 1 in dem vorliegenden Zustande gegen das Sonnen- und Tageslicht gar nicht empfindlich war, zeigte sie, wie die in Fig. 15 B eingetragenen Zahlenwerthe darthun, bei dem Erkalten, welches einer bis 100° gesteigerten Erhitzung folgte, elektrische Spannungen in einer Grösse, welche den auf den übrigen violblauen Krystallen beobachteten Spannungen gleichkommen.

Da der Krystall überhaupt nur schwach durch das Licht elektrisch erregt wurde, habe ich seine Flächen dem directen Sonnenlichte aussetzen müssen. Auf den Flächen 3, 5 und 6 wurde infolge dieser Bestrahlung eine elektrische Vertheilung beobachtet, wie solche Fig. 15 A nachweist. Auf der Fläche 4 konnten elektrische Spannungen mit Sicherheit nicht ermittelt werden; dagegen traten auf dieser Fläche 4, ebenso wie auf der Fläche 1, nach dem Erkalten die thermoelektrischen Spannungen in der gewöhnlichen Grösse auf. Meistentheils übertreffen die thermoelektrischen Spannungen

(Fig. 15 B) die durch das Sonnenlicht erzeugten photoelektrischen (Fig. 15 A).

Auffällig ist das thermoelektrische Verhalten der Fläche 4; nicht nur die der Fläche 1 anliegenden Theile dieser Fläche 4, sondern auch die weiter links liegende Fläche einer heraustretenden Verlängerung des Hauptkrystalles (oder eines andern mit ihm parallel liegenden Individuums), sowie die dazwischen liegende Fläche eines zweiten Flussspathkrystalles zeigen beim Erkalten negative Spannung von einer ziemlichen Stärke; und es trat diese Vertheilung bei oft wiederholten Versuchen hervor.

Auf der Fläche 2 konnten wegen ihrer Bedeckung mit kleinen Bleiglanzkrystallen photoelektrische und thermoelektrische Beobachtungen nicht ausgeführt werden.

Die Nichterregbarkeit der so vollkommen ausgebildeten Fläche 1 durch das Sonnenlicht rief die Frage hervor, ob diese schöne Fläche des immerhin ziemlich violblauen gefärbten Krystalles überhaupt von Ursprung an keine photoelektrische Eigenschaft besessen, oder ob sie dieselbe erst durch längeres Aussetzen an das Licht, oder durch andere Umstände verloren habe. Allerdings zeigen die übrigen Krystallflächen auch nur eine sehr mässige elektrische Spannung, welcher Umstand wohl zu der Ansicht führen könnte, dass der Krystall trotz seiner violblauen Färbung jene Eigenschaft auf der Fläche 1 nur in sehr geringem Grade besessen habe. Der Umstand jedoch, dass die stärkste photoelektrische Spannung (+ 3) auf der Fläche 6 gerade auf einer Stelle beobachtet wird, wo ein Durchgang hervortritt, der möglicher Weise erst später angeschlagen worden sein kann und seine Erregbarkeit also noch länger behalten hat, dürfte wohl auf eine früher vorhanden gewesene stärkere photoelektrische Erregbarkeit der Krystallfläche 1 hinweisen. Dabei bleibt aber freilich unerklärt, durch welche Einflüsse die Fläche 1 die Eigenschaft, durch die Bestrahlung mittelst des Sonnenlichtes elektrisch zu werden, so vollständig eingebüsst hat; denn das wiederholte Bestrahlen der Fläche 1 des Krystalls No. 12, sowie eine noch viel stärkere und länger dauernde Belichtung des nächstfolgenden Bruchstückes eines violblauen Flussspathkrystalles No. 16 hat jene Eigenschaft zwar sehr zu verringern, jedoch nicht völlig zu vernichten vermocht.

Nachdem ich dann aber gefunden, dass durch eine Erhöhung

der Temperatur bis 170° C. die photoelektrische Eigenschaft der Flussspathkrystalle erhöht werden konnte, setzte ich auch den vorliegenden Krystall No. 15 drei Viertelstunden lang einer Temperatur von 180° C. aus. Der Krystall war dabei so in das Kupferfeilicht eingehüllt, dass nur die Fläche 1 frei blieb.

Als der Krystall 1 Stunde lang im Dunkeln erkaltet, beobachtete ich auf der Fläche 1 die Fig. 15·B′ dargestellte thermoelektrische Vertheilung. Die bei dem Erkalten jetzt hervortretende Spannung war grösser, als die früher nach dem Erhitzen bis 100° beobachtete und in Fig. 15 B eingetragene.

Darauf wurde die völlig unelektrische Krystallfläche 1 17 Minuten lang dem Sonnenlichte ausgesetzt, und entsprechend meiner Erwartung zeigte jetzt die Fläche 1, welche früher selbst nach einer 42 Minuten dauernden Bestrahlung durch schwaches Sonnenlicht nicht die geringsten Anzeichen von Elektricität gegeben hatte, nicht unbeträchtliche elektrische Spannungen. Dieselben sind in Fig. 15 A″ eingetragen worden. Ja selbst das blosse Tageslicht rief jetzt, wenn auch nur schwache Photoelektricität hervor. Als die unelektrisch gemachte Fläche 1 dem zerstreuten Tageslichte 1 Stunde 50 Minuten lang ausgesetzt worden, erhielt ich auf derselben die in Fig. 15 A‴ eingeschriebenen Spannungen.

Darauf wurde der Krystall von Neuem während des Zeitraumes von einer Stunde einer Temperatur von 180° ausgesetzt. Als dann der abgekühlte und unelektrisch gemachte Krystall abermals 17 Minuten ins Sonnenlicht gestellt wurde, zeigte die Fläche 1 wieder nahe dieselben elektrischen Spannungen, die ich nach dem ersten starken Erhitzen beobachtet hatte; die Mitte derselben besass ebenso wie in Fig. 15 A″ die Spannung von — 3 Skth.

Durch diese Versuche dürfte die Ansicht, dass die Fläche 1 des Krystalles No. 15 ursprünglich eine, wenn auch vielleicht nicht grosse, photoelektrische Erregbarkeit besessen habe, eine weitere Stütze erhalten.

Krystall No. 16. Fig. 16 A und 16 B. Taf. II.

Das kleine, ziemlich stark sapphirblau fluorescirende Bruchstück No. 16 stammt von Alston Moor; es ist mit Ausnahme zweier Seiten,

welche Reste von Krystallflächen zeigen, von sehr unebenen Bruchflächen begrenzt; in Fig. 16 A und B bilde ich nur den grösseren Rest der einen Krystallfläche ab.

Das vorliegende Krystallbruchstück ist zahlreichen Prüfungen unterworfen worden; namentlich ist es dem einfachen und den durch Linsen concentrirten Sonnenlichte ausgesetzt worden, um nachzuweisen, dass auch bei ihm, ebenso wie bei dem Krystall No. 12 durch starke Belichtung die photoelektrische Erregbarkeit geschwächt wird.

Die Fläche 1 hatte 9 Minuten in dem Sonnenlichte gestanden und zeigte die in Fig. 16 A eingetragene elektrische Vertheilung. In diesem Zustande noch fernere 13 Minuten ins Sonnenlicht gestellt gab sie die Fig. 16 A′ eingetragenen Spannungen.

Am anderen Tage wurde die Fläche 1 im Ganzen 40 Minuten dem Sonnenlichte ausgesetzt und dabei anfangs von 2 zu 2, später von 4 zu 4 Minuten die elektrischen Spannungen gemessen. Dieselben stiegen allmählich, und nach 40 Minuten wurde in der Mitte ein Ausschlag von — 12 Skth. beobachtet.

Nachdem die Fläche 1 dann noch mehrere Stunden von den Strahlen der Sonne beschienen worden, gab sie nicht mehr so grosse Ausschläge wie früher; noch mehr geschwächt wurde aber ihre Erregbarkeit, als sie dem durch eine grosse Linse concentrirten Sonnenlichte längere Zeit ausgesetzt gewesen war. Jetzt erzeugte ein mehr als anderthalb Stunden langes Bestrahlen durch die Sonne, die jedoch etwas verschleiert war, in der Mitte der Fläche nur die Spannung — 2,6, und selbst ein 1 Minute dauerndes Bestrahlen durch das elektrische Licht brachte nur einen Ausschlag — 0,6 hervor.

Eine Erhitzung bis 180° erhöhte auch auf der in dem eben beschriebenen Zustande befindlichen Krystallfläche die Erregbarkeit wieder. Nach dieser Erhitzung erzeugte ein Aussetzen von 12 Minuten an das Tageslicht in der Mitte derselben die Spannung von — 1,6; nachdem der mit dieser Vertheilung versehene Krystall noch weitere 7 Minuten im schwachen Sonnenlichte gestanden hatte, fand sich in der Mitte die Spannung — 3 Skth.

Die beim Erkalten nach jener Erhitzung bis 180° beobachtete Spannung stellt Fig. 16 B dar.

C. Blauer Flussspath von Freiberg.

Krystall No. 17. Fig. 17 A und 17 B. Taf. III.

Der Güte des Herrn Bergrath Weisbach verdanke ich die schöne, der Freiberger Sammlung gehörige, aus drei würfelförmigen Krystallen bestehende Druse No. 17 vom Churprinz bei Freiberg. Der grösste der drei Krystalle ist in der Abbildung als Hauptkrystall behandelt. Einzelne Flächen der anderen Krystalle, welche in zwei Projectionen erscheinen, sind mit denselben Buchstaben (*a*, *b*, *c*, *d*) bezeichnet worden.

Die Krystallflächen, soweit sie frei liegen, sind ausgebildet vorhanden bis auf geringe Theile, an welchen eine Anwachsung stattgefunden hatte. Die Stellen, welche angewachsen gewesen, liegen 1) auf der von den Flächen 3, 4 und 6 des Hauptkrystalles gebildeten Ecke, 2) an der mit α bezeichnete Ecke, und 3) auf der mit β, γ, δ, ε umschriebenen Hälfte der Fläche *b*.

Die Farbe aller drei Krystallindividuen ist eine ziemlich tiefblaue (entenblaue), trägt aber einen anderen Charakter als bei den Krystallen von Alston Moor und Weardale. Die Substanz der Krystalle ist nicht durchsichtig, vielmehr meistens so trübe, dass sie fast undurchsichtig wird und nur an reineren Stellen sich durchscheinend zeigt. Das durchgehende Licht erscheint hellblau, während das reflectirte eine viel dunklerblaue Nüance darbietet. Als Krystallform tritt nur der Würfel ohne irgend eine Spur von Pyramidenwürfeln auf.

Die nach dem Belichten erhaltenen elektrischen Vertheilungen sind in Fig. 17 A, die bei dem nach einer Erhitzung bis 100° C. folgenden Erkalten beobachteten in Fig. 17 B eingetragen worden. Die photoelektrische Erregung zeigt auf den Flächen 1 und 2, namentlich aber auf der letzteren eine ziemliche Stärke; ebendies gilt auch von der thermoelektrischen Spannung auf der Fläche 2. Die so beträchtliche Grösse der auf dieser Fläche 2 beobachteten Ausschläge des Goldblättchens im Elektrometer hat übrigens zum Theil ihren Grund in dem Umstande, dass bei der Annäherung der Spitze des Platindrahtes an die Mitte der Fläche 2 die Vertheilungswirkung der auf dieser Fläche vorhandenen Elektricität auf jenen Draht durch die Einwirkung der gleichnamigen Elektricität der zwei sich von der

Fläche 2 erhebenden Flächen der beiden anderen Krystallindividuen unterstützt wird.

Die ausgebildeten Krystallflächen erscheinen im Allgemeinen negativ nach dem Belichten, positiv nach dem Erkalten. Positive Spannung nach dem Belichten und negative nach dem Erkalten wurde an dem grösseren Hauptkrystalle nur an dem freiliegenden Theile der Fläche 3, welcher an die Anwachsungsstelle (an der Ecke 3, 4, 6) grenzt, beobachtet. Ebenso zeigte die verbrochene Hälfte $\beta\gamma\delta\varepsilon$ der Fläche *b* des Krystalles von mittlerer Grösse nach dem Belichten positive und nach dem Erkalten negative Spannungen, während die andere als Krystallfläche ausgebildete Hälfte dieser Fläche *b* die den übrigen Krystallflächen eigenthümliche Polarität besitzt, die jedoch nach α hin, wo ein dritter Ansatzpunkt gelegen hat, auf Null herabsinkt.

D. Im reflectirten Lichte schwach bräunlichviolette Flussspathkrystalle.

Krystall No. 18. Fig. 18 A und 18 B. Taf. III.

Der grosse schöne Krystall stammt von Weardale und gehört der Freiberger Sammlung. Im durchgehenden Lichte erscheint er im Allgemeinen graulich gefärbt mit einem schwachen bräunlichen Anfluge; bei genauerer Betrachtung erkennt man zahlreiche sehr dünne, einander einhüllende, theils graulich, theils grünlich und röthlich gefärbte Lagen. Die Oberfläche, welche vollkommen durchsichtig ist, macht bei schief einfallendem Lichte den Eindruck, als wäre sie mit einem undurchsichtigen Häutchen belegt. Die im reflectirten Tageslichte erscheinende Fluorescenzfarbe ist ein Violett, das aber hie und da je nach der Stellung des Krystalles und der Spiegelung der in ihm auftretenden Durchgangsflächen ins Weissliche oder Schmutzigbräunliche übergeht. Im elektrischen Lichte dagegen fluorescirt der Krystall prächtig sapphirblau.

Die ausgebildeten Krystallflächen werden nur von reinen Würfelflächen gebildet; sie sind nicht sehr glänzend, erscheinen vielmehr etwas matt. Mit der Loupe erkennt man theils kleine rundliche Vertiefungen, theils Streifungen, welche auf Durchschnitte der Würfelflächen mit einem Pyramidenwürfel und einem Achtundvierzigflächner hinweisen.

Auf den Flächen 5 und 3 findet sich, wie die Abbildung zeigt, ein anderer grösserer Krystall eingewachsen. Von der Krystallfläche 6 ist keine Spur vorhanden; an ihre Stelle ist theils ein unregelmässiger Bruch getreten, theils liegt daselbst ein Aggregat kleinerer Flussspathkrystalle. In die Abbildung ist deshalb die Fläche 6 nicht aufgenommen worden.

Als der Krystall ins Tageslicht und selbst in die directen Strahlen der Sonne gestellt wurde, zeigte er auch nach längerer Bestrahlung keine photoelektrische Spannung. Dagegen konnte eine solche noch mittelst einer 10 bis 15 Minuten dauernden Bestrahlung durch das elektrische Kohlenlicht erhalten werden. Um bei dieser letzteren Belichtung die von der glühenden Kohle ausgesandten Wärmestrahlen möglichst zu vernichten, war ein mit einer Alaunlösung gefülltes parallelepipedisches Gefäss zwischen den Krystall und die Kohlenspitzen eingeschaltet worden.

Während nun der Krystall für die Einwirkung des Tages- und des directen Sonnenlichtes nicht empfänglich war, vermochte die Erwärmung bis 100° C. nicht unbeträchtliche elektrische Spannungen hervorzurufen.

Fig. 18 A stellt die nach der Bestrahlung durch das elektrische Kohlenlicht, und Fig. 18 B die durch das einer Erwärmung bis 100° folgende Erkalten erzeugten elektrischen Spannungen dar.

Dass die nach der Bestrahlung durch das elektrische Licht beobachteten elektrischen Spannungen in der That durch die leuchtenden und übervioletten Strahlen hervorgerufen waren, und nicht etwa einer durch jenes Licht bewirkten Temperaturerhöhung ihre Entstehung verdanken, liess sich leicht nachweisen. Wäre nämlich die negative Elektricität nach dem Belichten durch die Erwärmung hervorgerufen worden, so hätte nach der Hinwegnahme derselben mittelst einer Alkoholflamme durch Stehen und Abkühlen in einem dunkeln Raume die der Erkaltung entsprechende positive Spannung auftreten müssen. Dies geschah aber nicht.

Uebrigens wird, wie nicht anders zu erwarten, in der That durch die Erwärmung ebenso wie durch die Bestrahlung mit dem elektrischen Lichte negative Elektricität erzeugt. Der Krystall wurde, während die Fläche 5 frei lag, 25 Minuten in den bis 100° erhitzten Ofen gestellt, und dann sofort nach dem Herausnehmen untersucht.

Da die Temperatur des sehr grossen Krystalles während der angegebenen Zeit noch fortwährend im Steigen begriffen war, so zeigte die Mitte der Fläche 5 die Spannung — 1,4 Skth. Bei dem Erkalten kehrte sich diese negative Spannung in die entgegengesetzte positive um.

Einer Temperatur von 180° wagte ich den Krystall nicht auszusetzen, da bei seiner beträchtlichen Grösse durch die ein- und angewachsenen Krystalle ein Zersprengen zu befürchten war. Es bleibt also unentschieden, ob bei ihm durch eine solche Erhitzung eine Erregbarkeit durch Sonnen- und Tageslicht hervorgerufen werden kann.

Der Krystall No. 18 isolirte sehr gut und hielt daher eine auf seinen Flächen durch Reibung erzeugte Elektricität so hartnäckig fest, dass es z. B. erst nach wochenlangem Bemühen möglich wurde, die Fläche 5 völlig unelektrisch zu machen. Gewöhnlich zeigte die Mitte dieser Fläche eine Spannung von + 0,2 bis + 0,5 Skth.

E. Braunweisser Flussspath aus England.

Krystall No. 19. Fig. 19 A und 19 B. Taf. III.

Die dem hiesigen mineralogischen Museum gehörige prächtige Krystalldruse, von welcher der Krystall No. 19 einen Theil bildet, besteht aus drei grossen und mehreren etwas kleineren verwachsenen Individuen. Die Gestalt der einzelnen Krystalle ist der Würfel. Sämmtliche Würfelflächen zeigen ein breites, durch zahlreiche Sprünge in der Masse etwa halbdurchsichtiges weisses Kreuz, wie es auf der Fläche 1 der Fig. 19 A und B durch die punktirten Linien angedeutet ist. An den Ecken erscheint die Masse braun und durchsichtig, mit einer ins Braunviolette spielenden Fluorescenz. Jedoch liegt auf der Fig. 19 A und B gezeichneten Fläche 1 der braune Farbstoff unmittelbar nur an zwei Ecken (*a* und *c*); an den Ecken *g* und *i* findet sich derselbe tiefer gelegen, da wo der Krystall, dessen obere Fläche in Fig. 19 abgebildet ist, sich auf zwei andere aufsetzt. Die Farbe des durchgegangenen Lichtes lässt sich wegen der weisslichen undurchsichtigen inneren Partien nirgends erkennen.

Bei der Grösse dieser Krystalldruse und bei der Art der Verwachsung der einzelnen Individuen derselben eignete sich nur die

Fig. 19 A und B, ebenso wie bei den übrigen Krystallen, in halber linearer Dimension abgebildete Fläche 1 des grössten Krystalles zu einer Prüfung mittelst der vorhandenen Vorrichtungen.

Im Tageslichte und selbst im schwachen Sonnenlichte wurde anfänglich die Fig. 19 A gezeichnete Würfelfläche 1 nicht elektrisch; durch 1 Minute langes Bestrahlen mittelst des elektrischen Kohlenlichtes entstand aber in der Mitte die Spannung von — 1 Skth.

Nachdem jedoch der Krystall bis 150° C. erhitzt worden war, zeigte sich die Fläche 1 auch gegen das Tageslicht empfindlich. Fig. 19 A stellt die elektrischen Spannungen dar, wie sie nach einem 2 Stunden langen Aussetzen ans Tageslicht beobachtet wurden.

Durch die steigende Temperatur wird die Fläche 1, ebenso wie durch die Belichtung negativ elektrisch; und zwar zeigte die Fläche diese Erregbarkeit bereits, bevor der Krystall bis 150° erhitzt worden. Bei diesem Versuche wurde die grosse Druse, soweit es möglich war, in Kupferfeilicht eingesetzt, und dann 25 Minuten in einen bis 100° erhitzten Ofen gestellt. Unmittelbar nach dem Herausnehmen zeigte die Fläche 1 überall negative Polarität; in der Mitte der Fläche betrug dieselbe — 1,7 Skth.

Nach dem Abkühlen besitzt die Fläche 1 nicht unerhebliche positiv elektrische Spannungen und es steigen dieselben mit der Höhe des Temperaturgrades, bis zu welchem der Krystall erhitzt worden ist. Fig. 19 B stellt die nach einem Erhitzen bis 150° bei der Abkühlung beobachteten Spannungen dar. Als unmittelbar nach der eben genannten Erhitzung der Krystall nur bis 100° erhitzt wurde, zeigte die Mitte der Fläche 1 nur die Spannung + 5, und nach einer neuen Erhitzung blos bis 60° eine Spannung + 2,6 Skth.

F. Grünlichweisser Flussspath aus Cornwall.

Krystall No. 20. Fig. 20 A und 20 B. Taf. III.

An einer grossen, schönen, aus ungefähr neun Krystallen bestehenden, dem hiesigen mineralogischen Museum gehörigen, aus Cornwall stammenden Druse trugen sämmtliche Individuen ausser den Flächen des Würfels auch die Flächen des Octaëders. Die Würfelflächen sind aber nicht eben; aus ihnen erheben sich zahlreiche kleine

Würfelflächen, sämmtlich mit abgestumpften Ecken; an einigen wenigen zeigen sich auch kleine Rhombendodekaëderflächen.

Die Masse des Krystalles ist weiss mit grünlichem Schein. An den Anwachsungsstellen kaum durchscheinend, geht sie in den Krystallen selbst ins Durchsichtige über. Indess wird die Durchsichtigkeit gar sehr durch die zahlreichen, den Octaëderflächen parallel laufenden Sprünge beeinträchtigt.

Ebenso wie bei der vorhergehenden Druse liess sich auch bei der vorliegenden nur die in Fig. 20 A und B abgebildete und mit 1 bezeichnete Fläche auf ihr elektrisches Verhalten prüfen. An dem linken Rande dieser Fläche sass eine aus Spatheisenstein und Kupferkies bestehende Masse.

Das Tageslicht und selbst das directe Sonnenlicht erregten keine Elektricität; dies erfolgte aber nach dem Bestrahlen mit dem elektrischen Lichte. Nachdem die Krystallfläche 1 17 Minuten lang dem elektrischen Lichte ausgesetzt worden, zeigte sie die in Fig. 20 A eingetragene elektrische Vertheilung. Die Wärmestrahlung war während dieser Belichtung durch eine zwischen das Kohlenlicht und die Krystallfläche gestellte Alaunlösung möglichst abgehalten.

Die nach einer Erhitzung bis 100° und dem darauf folgenden Erkalten beobachteten elektrischen Spannungen erreichten nur eine geringe Grösse; Fig. 20 B giebt dieselben wieder.

G. Fast farblose Krystalle von Stolberg am Harz.

Krystall No. 21. Fig. 21 A und 21 B. Taf. III.

An dem schönen grossen Krystall No. 21 ist nur die Fig. 21 A und B mit 1 bezeichnete Fläche fast vollständig ausgebildet; ziemlich grosse Theile sind von den Flächen 4 und 5 vorhanden, dagegen nur sehr kleine Reste von den Flächen 2 und 6; an die Stelle der Fläche 3 ist ein sehr unebener Bruch getreten. Auf den Kanten des Würfels erscheinen keine Zuschärfungen; dagegen sind die Ecken durch kleine matte Octaëderflächen abgestumpft.

Die Masse des Krystalles ist fast ganz farblos; sie zeigt höchstens einen sehr schwachen Stich ins Graugrünliche. Nach der Ecke (1, 4, 5) hin erscheint sie durchsichtig und hier erkennt man im

Innern 3—5^{mm} dicke, durch etwas dunklere Streifen getrennte Schichten. Die übrigen Theile, namentlich nach der (auf der Fläche 3 gelegenen) Anwachsungsstelle hin, sind trübe und kaum durchscheinend. Auf der Fläche 5 liegen einige Rhomboëder von Spatheisenstein, sowie kleinere Massen von Kupferkies.

Die Masse des Krystalles isolirt sehr gut; es ist mir nicht gelungen z. B. die Fläche 1 desselben in völlig unelektrischen Zustand zu versetzen; stets bleibt auf ihr ein, wenn auch nur sehr geringer Rest von positiver Elektricität, der jedoch höchstens bis + 0,5 Skth. steigt.

In Fig. 21 A und 21 B sind nur die am meisten ausgebildeten Flächen 1, 4 und 5 abgebildet worden.

In photoelektrischer Hinsicht zeigte der Krystall ein eigenthümliches Verhalten, und zwar trat dasselbe bei allen zu sehr verschiedenen Zeiten vorgenommenen Prüfungen stets in derselben Weise auf.

Da der Krystall gegen die Einwirkung des Lichtes nur wenig empfindlich ist, habe ich ihn dem directen Sonnenlichte aussetzen müssen.

Nach einer Erhitzung bis 100° hatte der Krystall 24 Stunden im Dunkeln gestanden und zeigte dann in der Mitte der Fläche 1 die Spannung + 0,6 und in der linken oberen Ecke (bei *a*) die Spannung + 0,4 Skth. In diesem Zustande wurde die Fläche 1 1 Stunde 15 Minuten*) den directen Sonnenstrahlen ausgesetzt. Die Beobachtung ergab nun die in die Fläche 1 Fig. 21 A eingetragenen Ausschläge. Die elektrischen Spannungen hatten sich sonach vornehmlich an der linken oberen Ecke (bei *a*) bis + 3,6 Skth. gesteigert, und ebenso hatten sie an dem oberen Rande (bei *b*) und an dem linken Rande (bei *d*) deutlich zugenommen, während die Spannung in der Mitte der Fläche sich nur sehr wenig und weiterhin nach rechts und unten gar nicht geändert hatte.

Nachdem der Krystall neun Tage im Dunkeln gestanden, zeigte die Mitte der Fläche 1 noch die Spannung + 0,7; an der linken oberen Ecke (bei *a*) und am linken Rande (bei *d* und *g*) betrug sie noch 0,4 Skth. Nachdem der Krystall dann bis 100° erhitzt worden,

*) Die kupferne Schale, in welcher der Krystall in Kupferfeilicht der Sonne ausgesetzt worden, war durch diese Bestrahlung kaum lauwarm geworden.

zeigten sich nach dem Erkalten die in Fig. 21 B eingetragenen Werthe. Die zuvor durch das Belichten in *a* erzeugte Spannung von + 3,6 Skth. konnte also nicht die Folge einer Erwärmung durch die Sonnenstrahlen sein. Als unmittelbar nach jener Erhitzung und Erkaltung die Fläche 1 abermals 40 Minuten den directen Strahlen der Sonne ausgesetzt wurde, traten nahe die in Fig. 21 A eingetragenen Spannungen wieder ein.

Es ist auffällig, dass an der linken obern Ecke (bei *a*), wo nach dem Belichten die positive Spannung (+ 3,6 Skth.) am stärksten erscheint, bei dem einer Erhitzung von 100° folgenden Erkalten die negative Polarität nicht hervorzutreten vermag, während doch auf dem anliegenden Theile der Fläche 4 in der That die negative Polarität beim Erkalten wahrgenommen wurde; der an dieser Ecke anliegende Theil der Fläche 5 zeigte keine elektrische Spannung.

Als die Fläche 1 10 Minuten mittelst des durch eine Schicht Alaunlösung hindurchgegangenen elektrischen Kohlenlichtes bestrahlt worden, zeigten sich die in Fig. 21 A′ eingetragenen Spannungen. Sie gleichen den durch das Sonnenlicht erzeugten; negative Polarität tritt auch jetzt nirgends auf.

Eine nur oberflächliche Vergleichung der in Fig. 21 A und 21 B eingetragenen Beobachtungen könnte wohl zu der Annahme verleiten, dass dieser Krystall in seinem Verhalten von den früher geprüften Flussspäthen vollständig abweiche, indem seine Flächen sowohl nach der Belichtung, als auch beim Erkalten positiv erscheinen. Eine genauere Betrachtung der an den verschiedenen Punkten der Oberfläche gemessenen Intensitäten zeigt jedoch, dass die ganze Abweichung dieses Krystalles von den früheren nur darin besteht, dass bei ihm nach dem Belichten die der Mitte der Fläche angehörige negative Polarität *) nicht hervorzutreten vermag, während die den Ecken und Rändern entsprechende positiv elektrische Spannung rings um die von den Flächen 1, 4 und 5 gebildete Ecke in deutlicher Weise erscheint. Von dieser Ecke (1, 4, 5) aus nimmt die positive Spannung dann nach allen Seiten hin, auf der Fläche 1 besonders nach rechts und

*) Dass sich jedoch diese negative Polarität auf den Stolberger Flussspäthen ebenso, wie auf den von Weardale und Alston Moor stammenden, wenn auch in geringerer Stärke findet, werden die beiden folgenden Krystalle nachweisen.

unten hin, also nach dem wenig durchscheinenden Theile hin ab, um in der Mitte und am rechten und unteren Rande dieser Fläche 1 zu verschwinden.

Denn die an den eben genannten Stellen beobachteten und in die Zeichnung eingetragenen schwachen positiven Spannungen verdanken nicht dem Einflusse des Lichtes ihre Entstehung, sondern sind hervorgerufen durch die auf dieser Fläche stets vorhandene sehr schwache positive Spannung (s. oben), die noch durch die Einwirkung der seitlich auf der Ecke (1, 4, 5) liegenden stärkeren positiven Elektricität auf den der Fläche genäherten Platindraht und zwar namentlich in der Mitte etwas erhöht wird. Auf der Fläche 5 wirken die aufgewachsenen Krystalle störend ein.

Bei dem einer Erhitzung bis 100° folgenden Erkalten zeigt sich dagegen die normale positive Polarität in der Mitte und nimmt nach den Ecken hin an Stärke ab. Auf der Fläche 4 erscheint neben der Ecke (1, 4, 5) sogar die dieser Ecke entsprechende negative Spannung.

Krystall No. 22. Fig. 22 A und 22 B. Taf. III.

Die fast farblose, nur einen Stich ins Graugrünliche besitzende Masse des Krystalles No. 22 ist kaum mehr als durchscheinend. Im reflectirten Lichte lässt sich eine sehr schwache bläuliche Fluorescenzfarbe wahrnehmen. Die an ihm vorhandenen Reste der Würfelflächen zeigen einen nur matten Glanz.

In Fig. 22 A und 22 B habe ich nur eine Fläche dieses Krystalles in halben linearen Dimensionen abgebildet und in Fig. 22 A die nach dem Belichten beobachteten Spannungen eingetragen. Wie man sieht, tritt auf dieser Fläche beim Belichten die negative Elektricität auf. Die in Fig. 22 A eingeschriebenen elektrischen Spannungen waren durch ein drei Stunden langes Aussetzen an das Tageslicht und in kurzen Zeiträumen auch an das directe Sonnenlicht erzeugt. Die in Fig. 22 B eingetragenen Spannungen wurden bei dem auf eine Erhitzung bis 100° folgenden Erkalten gemessen; sie übertreffen an Stärke die durch das Licht hervorgerufenen.

Krystall No. 23. Fig. 23 A und 23 B. Taf. III.

Der Krystall No. 23 gleicht hinsichtlich der Beschaffenheit seiner Masse dem vorhergehenden, mit welchem er auch ursprünglich zu derselben Druse gehörte. Ich bilde ebenfalls nur eine Fläche ab. Fig. 23 A enthält die durch eine gleiche Belichtung wie bei No. 22 erzeugten, und Fig. 23 B die beim Erkalten aufgetretenen elektrischen Spannungen.

H. Ringsum von Durchgangs- und Bruchflächen begrenzte Flussspathstücke unbekannten Ursprungs.

Ich habe auch eine Anzahl grün und gelblichgrün gefärbte Bruchstücke von Flussspathkrystallen, die seit langen Jahren in diesem Zustande gelegen hatten, auf ihr elektrisches Verhalten geprüft. Dieselben zeigten öfter nach der Belichtung nicht unbeträchtliche Spannungen. Da jedoch ihre Lage in dem ursprünglichen Krystalle nicht ermittelt werden kann, so mag es genügen, die auf einem derselben beobachteten photoelektrischen Spannungen näher anzugeben.

Krystall No. 24. Fig. 24. Taf. III.

Das Bruchstück No. 24 bildet im Allgemeinen eine vierseitige Pyramide, deren Seitenflächen von den mit den Octaëderflächen parallel gehenden, oft in Absätzen auftretenden Durchgängen gebildet werden. Diese vier Flächen sind in Fig. 24 mit den Zahlen 1, 2, 3 und 4 bezeichnet worden. Die unterhalb 1 dargestellte Grundfläche wird durch sehr unebene Bruchflächen gebildet, mit Ausnahme des unterhalb der Fläche 1 liegenden und mit α bezeichneten Theiles, welcher dem mit der Fläche 3 parallel gehenden Durchgange angehört.

Die grüne und theilweise auch gelblichgrüne, an sich durchsichtige Substanz ist durch Beimengung undurchsichtiger Massen unklar und stellenweise nur durchscheinend.

Die durch die Belichtung erzeugten elektrischen Spannungen habe ich in die Abbildung Fig. 24 eingetragen, und zwar hatte die Fläche 1 30 Minuten in schwacher Sonne, die Fläche 2 73 Minu-

ten, die Fläche 3 26 Minuten, die Fläche 4 56 Minuten und die Grundfläche 120 Minuten in den Strahlen der öfter durch Wolken bedeckten Sonne gestanden.

III. Allgemeine Resultate aus den vorstehenden Beobachtungen.

Auf der Oberfläche der Flussspathkrystalle entstehen bei sonst geeigneter Beschaffenheit sowohl durch die Einwirkung des Lichtes, als auch durch Temperaturänderungen elektrische Spannungen.

Photoelektricität.

Die Mitten der Würfelflächen der Flussspathkrystalle werden durch die Belichtung negativ; die Intensität dieser negativen Spannung nimmt nach den Rändern und besonders nach den Ecken hin ab; auf manchen Krystallen erstreckt sich dieselbe bis zu den Rändern und Ecken.

Bei den meisten, namentlich grösseren Krystallen zeigen jedoch die Ecken und zum Theil auch die seitlichen Ränder der Flächen die entgegengesetzte, also positive Polarität. Gewöhnlich ist dieselbe aber auf einen kleineren Flächenraum beschränkt, als die in dem mittleren Theile herrschende negative. Liegt daher die ganze Würfelfläche (oder die an ihrer Stelle befindlichen Flächen des sehr stumpfen Pyramidenwürfels) frei, so wird die positive Elektricität der Ecken und Ränder in ihrer Vertheilungswirkung auf den zur Prüfung angenäherten Platindraht leicht durch die stärkere negative Elektricität der mittleren Theile unterdrückt und kommt nicht zur Erscheinung; sie lässt sich aber durch Bedeckung der mittleren Theile mit zur Erde abgeleitetem Kupferfeilicht in ihrer Wirkung sichtbar machen.

Die Grenzen zwischen dem positiven und negativen Bereiche einer Krystallfläche, und ebenso die Verhältnisse der Intensitäten, welche die beiden Elektricitäten zeigen, lassen sich durch die Art der Bestrahlung, namentlich wenn auch noch mehr oder weniger grosse Stücke der seitlich anliegenden Würfelflächen dem Lichte gleichzeitig mit ausgesetzt werden, etwas verschieben und ändern.

Auf das Hervortreten der positiven Polarität an den Ecken und besonders auch an den Rändern ist ferner die Art, wie die Kry-

stalle gewachsen sind, von Einfluss. Reicht der vorhandene ausgebildete Theil einer Krystallfläche bis zur Anwachsungsstelle und ist daselbst abgebrochen, so stellt dieser vorhandene Theil gewissermassen nur den Rand einer solchen Fläche dar, und zeigt dann stärkere und ausgedehntere positive Spannungen, deren Intensität jedoch von dem Rande nach den mittleren Theilen hin abnimmt. Dagegen erscheint auf der der Anwachsungsstelle gerade gegenüberliegenden Würfelfläche vorzugsweise die negative Elektricität.

Die Bruchflächen, welche durch das Abbrechen des Krystalles von anderen Krystallen oder von fremdem Gesteine entstanden sind, und also an und in der Umgebung der ehemaligen Anwachsungsstelle liegen, werden durch Belichten positiv.

Diese positive Polarität der Bruchflächen besitzt meistens eine nicht unbeträchtliche Stärke; bei vielen Krystallen übertrifft sie, namentlich wenn den Bruchflächen der Farbstoff nicht fehlt, in ihrer Intensität die auf der Mitte der vorhandenen Krystallflächen erregte negative Spannung.

Eben dies gilt auch von den Stücken der ebenen Durchgangsflächen, welche zwischen und neben den Bruchflächen an dem verbrochenen Ende auftreten.

Das Verhalten von Durchgangsflächen, welche an dem frei ausgebildeten Ende der Würfel durch Anschlagen entstehen, habe ich wegen Mangels an geeignetem Material noch nicht ermitteln können.

Die im Vorstehenden charakterisirte Wirkung des Lichtes auf die Flussspathkrystalle geht hauptsächlich von den chemisch wirkenden Strahlen aus; sowohl hinter einem mit Kupferoxydul roth gefärbten Glase, als auch hinter einer Schicht einer klaren Lösung von schwefelsaurem Chinin ist die Erregung der Elektricität nur äusserst gering, während sie durch Einschaltung einer Schicht Wasser oder Alaunlösung in den Weg der Strahlen nicht wesentlich vermindert wird.

Bei sehr empfindlichen Krystallen genügt schon ein kurzes Aussetzen an das Tageslicht, um merkliche elektrische Spannungen zu erhalten; durch längeres Belichten steigt die Intensität derselben.

Die directen Strahlen der Sonne wirken viel kräftiger als das zerstreute Tageslicht.

Noch stärker erregend als das Sonnenlicht zeigt sich das elek-

trische Kohlenlicht, so dass durch letzteres selbst auf Krystallen, welche durch längeres Aussetzen an das zerstreute oder directe Sonnenlicht keine merklichen elektrischen Spannungen annehmen, solche, bisweilen sogar in ziemlicher Stärke, hervorgerufen werden können.

Auch durch das Licht der Entladungsfunken zwischen zwei Leydener Flaschen lassen sich photoelektrische Spannungen auf den Flussspathkrystallen erzeugen, während das Licht einer Geisler'schen Röhre ungenügend erscheint.

Am stärksten photoelektrisch erregbar sind die grünen Krystalle von Weardale, und es nimmt die Intensität der durch eine gleiche Bestrahlung erregten elektrischen Spannungen im Allgemeinen mit der Tiefe der Färbung zu. Weniger erregbar sind die in ihrer Masse schwachgrünlich oder graugrünlich gefärbten, aber durch Fluorescenz prächtig sapphirblau erscheinenden Flussspäthe von Weardale und Alston Moor, sowie die entenblauen vom Churprinz bei Freiberg. Die durchsichtigen braunroth fluorescirenden Flussspathkrystalle von Weardale werden meistens durch das Tageslicht, und zum Theil selbst durch das Sonnenlicht nicht elektrisch, wohl aber durch das elektrische Kohlenlicht. Die weisslichgrünen Flussspäthe von Cornwall zeigen sich nur schwach elektrisch; eben dies gilt auch von den fast farblosen Krystallen von Stolberg am Harz, bei denen der eigenthümliche Fall vorkam, dass auf einem sehr schönen grossen Krystalle beim Belichten blos die der am reinsten ausgebildeten Ecke entsprechende positive Polarität auftrat, während die negative auf den Mitten der Flächen sich nicht hervorrufen liess, selbst nicht durch das elektrische Kohlenlicht. Auf den gelben Annaberger Krystallen konnte weder durch Tages- und Sonnenlicht, noch auch durch das elektrische Licht eine elektrische Spannung erzeugt werden.

Die auf den Flussspathkrystallen durch Belichtung hervorgerufenen Spannungen haben das Eigenthümliche, dass sie beim Stehen im Dunkeln nicht in die ihnen polar entgegengesetzten übergehen. Wird die Fläche eines durch Belichtung stark elektrisirten Flussspathes mittelst Ueberstreichens mit einer Alkoholflamme von der auf ihr vorhandenen Elektricität befreit, so bleibt sie, ins Dunkle gestellt, unelektrisch, oder es erscheint noch ein kleiner Rest der vorherigen Ladung, die also nicht vollständig hinweggenommen war.

Die Erregung der Elektricität durch das Licht erfolgt durch einen Vorgang, bei welchem der Farbstoff der Krystalle betheiligt ist. Durch sehr langes und starkes Belichten lässt sich die Erregbarkeit der Flächen beträchtlich schwächen, und die geringen Spannungen, welche öfter gerade auf den am vollkommensten ausgebildeten Flächen mancher Krystalle auftreten, während die umliegenden Flächen stärkere Spannungen zeigen, ist wohl meist eine Folge davon, dass diese Krystalle im Schaukasten so gelegen haben, dass eben jene vollkommenen Flächen dem Beschauer und somit dem Lichte zugekehrt gewesen und in ihrer Erregbarkeit geschwächt worden sind. Auf einer absichtlich durch zu langes und starkes Licht geschwächten Fläche stellt sich selbst durch jahrelanges Aufbewahren im Dunkeln die frühere Empfindlichkeit nicht wieder her.

Mit der Betheiligung des Farbstoffes bei der Erregung der Elektricität steht auch der vorhin angeführte Umstand, dass nach dem Entfernen der durch Belichtung erzeugten Elektricität beim Stehen im Dunkeln keine Umkehrung in die entgegensetzte Polarität eintritt, in Verbindung.

Durch eine mässige Erhitzung der Flussspathkrystalle wird die photoelektrische Erregbarkeit derselben erhöht. Bereits eine Erhitzung bis 80° C. wirkt in dieser Beziehung günstig, noch mehr eine Erhitzung bis 130 oder 150° C. Eine sehr viel höhere Temperatur muss selbstverständlich die photoelektrische Eigenschaft zerstören; es wäre selbst möglich, dass schon bei der öfter angewandten Temperatur von 180° C. die Grenze, bei welcher die Erregbarkeit am meisten erhöht wird, bereits etwas überschritten ist.

Dabei bleibt es fraglich, ob auch bei frisch aus der Grube genommenen, dem Lichte noch nicht preisgegebenen und dadurch in ihrer photoelektrischen Eigenschaft noch nicht geschwächten Flussspathkrystallen eine Erhitzung bis 150° ebenfalls die Erregbarkeit durch das Licht zu erhöhen vermag, oder ob nur auf bereits geschwächten Krystallflächen der Zustand mehr oder weniger angenähert wiederhergestellt wird, wie er ursprünglich auf dieser Fläche bestand. Es hat mir wenigstens den Eindruck gemacht, als ob auf frischen Bruchflächen durch eine Erhitzung die photoelektrische Erregbarkeit nicht wesentlich erhöht werde.

Die Masse der Flussspathkrystalle und ebenso ihre Oberfläche

isolirt vortrefflich und hält die elektrische Ladung ungemein lange. Dieses Verhalten der Oberfläche hängt wohl mit dem Umstande zusammen, dass dieselbe vom Wasser nicht benetzt wird.

Thermoelektricität.

Durch die Verschiedenheit zwischen den Ecken- und Flächenaxen der Flussspathkrystalle ist die Möglichkeit gegeben, dass auf ihrer Oberfläche durch Temperaturänderungen elektrische Spannungen auftreten, und zwar folgen diese elektrischen Vorgänge dem bei allen thermoelektrischen Krystallen ausnahmelos bewahrheiteten Gesetze, dass die Polaritäten bei sinkender Temperatur gerade die entgegengesetzten sind als bei steigender.

Beim Steigen der Temperatur stimmen nun die auf der Oberfläche der Flussspathkrystalle entstehenden elektrischen Spannungen in ihrem Vorzeichen mit den durch die Belichtung hervorgerufenen überein.

Beim Sinken der Temperatur verwandeln sich diese von der Erhitzung erzeugten Elektricitäten in die entgegengesetzten; die beim Erkalten auftretenden Spannungen sind also sowohl den durch die Steigerung der Temperatur als auch den durch die Belichtung entstehenden entgegengesetzt.

Obwohl nun die durch die Belichtung und die durch Erhöhung der Temperatur hervorgerufenen elektrischen Spannungen in ihrem Vorzeichen übereinstimmen, so muss ihre Entstehung doch auf verschiedenen Vorgängen beruhen, oder wenn sie durch denselben Vorgang erzeugt werden, so muss solcher durch die Belichtung einen vollständigen Abschluss finden, während derselbe, wenn er durch die Steigerung der Temperatur entstanden ist, nicht abschliesst, sondern bei dem Sinken derselben wieder zurückgeht; denn die bei steigender Temperatur auftretenden Polaritäten kehren sich bei dem Erkalten um, während nach der Belichtung die entgegengesetzten Elektricitäten im Dunkeln nicht erscheinen.

Bei den durch das Licht stark erregbaren Flussspäthen ruft auch die Temperaturänderung eine ziemlich starke elektrische Polarität hervor; sie ist bei diesen Krystallen jedoch stets schwächer als die durch das Licht erzeugbare.

Bei manchen durch das Licht weniger erregbaren Krystallen sind dagegen die thermoelektrischen Spannungen grösser als die photoelektrischen; dies tritt ein bei manchen Flächen der grünen und sapphirblauen Krystalle, bei denen jedoch wahrscheinlich die Empfindlichkeit gegen das Licht durch vorhergegangene schädigende Einwirkungen geschwächt worden ist. Durchweg die photoelektrischen an Stärke übertreffend zeigen sich aber die thermoelektrischen Spannungen auf den braunröthlichen oder braunvioletten Krystallen, welche im Sonnenlichte gar nicht und nur durch das elektrische Kohlenlicht einigermassen elektrisch werden. Auch bei den fast farblosen Krystallen von Stolberg am Harz sind öfter die thermoelektrischen Spannungen stärker als die photoelektrischen.

Aus dem Vorstehenden ergibt sich nun sofort die Vertheilung der thermoelektrischen Polaritäten auf der Oberfläche der Flussspathkrystalle.

Bei steigender Temperatur sind ebenso wie beim Belichten die Mitten der Würfelflächen negativ; diese negative Spannung nimmt von hier aus nach den Rändern und namentlich nach den Ecken hin ab. Sehr oft zeigt die ganze Fläche negative Polarität.

Auf anderen, namentlich grösseren Krystallen treten, entsprechend den Vorgängen beim Belichten, an den Ecken, und wohl auch noch an den Rändern positive Spannungen hervor.

Beim Erkalten sind die Polaritäten die gerade entgegengesetzten; die Mitten der Flächen zeigen positive Elektricität, abnehmend nach den Rändern und den Ecken. Letztere zeigen entweder noch schwache positive Elektricität oder tragen negative Spannungen. Diese negativen Spannungen sind oft zu schwach, um bei ganzer freier Fläche wahrgenommen zu werden; durch Bedecken der mittleren positiven Theile können sie sichtbar gemacht werden.

Wenn die Grenzen zwischen den positiven und negativen Bereichen auf den Flächen bei der Belichtung öfter etwas anders verlaufen als bei der Abkühlung, oder die Verhältnisse zwischen den Intensitäten in beiden Fällen nicht genau dieselben sind, so wird diese Abweichung dadurch bedingt, dass die Belichtung den Krystall in anderer Weise trifft als die Abkühlung, wie ja solche Schwankungen selbst bei verschiedenen Bestrahlungen bereits erwähnt wurden.

Auf den Flächen, welche durch Abbrechen der Krystalle von ihrer Unterlage entstanden sind, mögen sie unregelmässig verlaufende Bruchflächen oder Stücke von ebenen Durchgängen sein, erscheint bei steigender Temperatur positive, bei sinkender negative Polarität.

Die beim Erkalten hervortretenden elektrischen Spannungen werden stärker, wenn die vorhergehende Temperatursteigerung eine höhere war, wenigstens innerhalb der Grenze bis 150° C.

Inhalt.

SECHSTER BAND. (IX. Bd.) Mit 10 Tafeln. hoch 4. 1864. brosch. Preis 19 *M* 20 *Pf*.

W. G. HANKEL, Elektrische Untersuchungen. Fünfte Abhandlung: Maassbestimmungen der elektromotorischen Kräfte. Erster Theil. 1861. 1 *M* 60 *Pf*.

—— Messungen über die Absorption der chemischen Strahlen des Sonnenlichtes. 1862. 1 *M* 20 *Pf*.

P. A. HANSEN, Darlegung der theoretischen Berechnung der in den Mondtafeln angewandten Störungen. Erste Abhandlung. 1862. 9 *M*.

G. METTENIUS, Ueber den Bau von Angiopteris. Mit 10 Tafeln. 1863. 4 *M* 40 *Pf*.

W. WEBER, Elektrodynamische Maassbestimmungen, insbesondere über elektrische Schwingungen. 1864. 3 *M*.

SIEBENTER BAND. (XI. Bd.) Mit 5 Tafeln. hoch 4. 1865. brosch. 17 *M*.

P. A. HANSEN, Darlegung der theoretischen Berechnung der in den Mondtafeln angewandten Störungen. Zweite Abhandlung. 1864. 9 *M*.

G. METTENIUS, Ueber die Hymenophyllaceae. Mit 5 Tafeln. 1864. 3 *M* 60 *Pf*.

P. A. HANSEN, Relationen einestheils zwischen Summen und Differenzen und anderntheils zwischen Integralen und Differentialen. 1865. 2 *M*.

W. G. HANKEL, Elektrische Untersuchungen. Sechste Abhandlung: Maassbestimmungen der elektromotorischen Kräfte. Zweiter Theil. 1865. 2 *M* 80 *Pf*.

ACHTER BAND. (XIII. Bd.) Mit 3 Tafeln. hoch 4. 1868. brosch. Preis 24 *M*.

P. A. HANSEN, Geodätische Untersuchungen. 1865. 5 *M* 60 *Pf*.

—— Bestimmung des Längenunterschiedes zwischen den Sternwarten zu Gotha und Leipzig, unter seiner Mitwirkung ausgeführt von Dr. Auwers und Prof. Bruhns im April des Jahres 1865. Mit 1 Figurentafel. 1866. 2 *M* 80 *Pf*.

W. G. HANKEL, Elektrische Untersuchungen. Siebente Abhandlung: Ueber die thermoelektrischen Eigenschaften des Bergkrystalles. Mit 2 Tafeln. 1866. 2 *M* 40 *Pf*.

P. A. HANSEN, Tafeln der Egeria mit Zugrundelegung der in den Abhandlungen der Königl. Sächs. Gesellschaft der Wissenschaften in Leipzig veröffentlichten Störungen dieses Planeten berechnet und mit einleitenden Aufsätzen versehen. 1867. 6 *M* 80 *Pf*.

—— Von der Methode der kleinsten Quadrate im Allgemeinen und in ihrer Anwendung auf die Geodäsie. 1867. 6 *M*.

NEUNTER BAND. (XIV. Bd.) Mit 6 Tafeln. hoch 4. 1871. brosch. Preis 18 *M*.

P. A. HANSEN, Fortgesetzte geodätische Untersuchungen, bestehend in zehn Supplementen zur Abhandlung von der Methode der kleinsten Quadrate im Allgemeinen und in ihrer Anwendung auf die Geodäsie. 1868. 5 *M* 40 *Pf*.

—— Entwickelung eines neuen veränderten Verfahrens zur Ausgleichung eines Dreiecksnetzes mit besonderer Betrachtung des Falles, in welchem gewisse Winkel vorausbestimmte Werthe bekommen sollen. 1869. 3 *M*.

—— Supplement zu der geodätische Untersuchungen benannten Abhandlung, die Reduction der Winkel eines sphäroidischen Dreiecks betr. 1869. 2 *M*.

W. G. HANKEL, Elektrische Untersuchungen. Achte Abhandlung: Ueber die thermoelektrischen Eigenschaften des Topases. Mit 4 Tafeln. 1870. 2 *M* 40 *Pf*.

P. A. HANSEN, Bestimmung der Sonnenparallaxe durch Venusvorübergänge vor der Sonnenscheibe mit besonderer Berücksichtigung des im Jahre 1874 eintreffenden Vorüberganges. Mit zwei Planigloben. 1870. 3 *M*.

G. T. FECHNER, Zur experimentalen Aesthetik. Erster Theil. 1871. 3 *M*.

ZEHNTER BAND. (XV. Bd.) Mit 7 Tafeln. hoch 4. 1874. brosch. Preis 21 *M*.

W. WEBER, Elektrodynamische Maassbestimmungen, insbesondere über das Princip der Erhaltung der Energie. 1871. 1 *M* 60 *Pf*.

P. A. HANSEN, Untersuchung des Weges eines Lichtstrahls durch eine beliebige Anzahl von brechenden sphärischen Oberflächen. 1871. 3 *M* 60 *Pf*.

C. BRUHNS, Bestimmung der Längendifferenz zwischen Leipzig und Wien. 1872. 2 *M*.

W. G. HANKEL, Elektrische Untersuchungen. Neunte Abhandlung: Ueber die thermoelektrischen Eigenschaften des Schwerspathes. Mit 4 Tafeln. 1872. 2 *M*.

—— Elektrische Untersuchungen. Zehnte Abhandlung: Ueber die thermoelektrischen Eigenschaften des Aragonites. Mit 3 Tafeln. 1872. 2 *M*.

C. NEUMANN, Ueber die den Kräften elektrodynamischen Ursprungs zuzuschreibenden Elementargesetze. 1873. 3 *M* 80 *Pf*.

P. A. HANSEN, Von der Bestimmung der Theilungsfehler eines gradlinigen Maassstabes. 1874. 4 *M*.

—— Ueber die Darstellung der graden Aufsteigung und Abweichung des Mondes in Function der Länge in der Bahn und der Knotenlänge. 1874. 1 *M*.

—— Dioptrische Untersuchungen mit Berücksichtigung der Farbenzerstreuung und der Abweichung wegen Kugelgestalt. Zweite Abhandlung. 1874. 2 *M*.

ELFTER BAND. (XVIII. Bd.) Mit 8 Tafeln. hoch 4. 1878. brosch. Preis 21 *M*.

G. T. FECHNER, Ueber den Ausgangswerth der kleinsten Abweichungssumme, dessen Bestimmung, Verwendung und Verallgemeinerung. 1874. 2 *M*.

C. NEUMANN, Ueber das von Weber für die elektrischen Kräfte aufgestellte Gesetz. 1874. 3 *M*.

W. G. HANKEL, Elektrische Untersuchungen. Elfte Abhandlung: Ueber die thermoelektrischen Eigenschaften des Kalkspathes, des Berylles, des Idocrases und des Apophyllites. Mit 3 Tafeln. 1875. 2 *M*.

P. A. HANSEN, Ueber die Störungen der grossen Planeten, insbesondere des Jupiter. 1875. 6 *M*.

W. G. HANKEL, Elektrische Untersuchungen. Zwölfte Abhandlung: Ueber die thermoelektrischen Eigenschaften des Gypses, des Diopsids, des Orthoklases, des Albits und des Periklins. Mit 4 Tafeln. 1875. 2 *M*.

W. SCHEIBNER, Dioptrische Untersuchungen, insbesondere über das Hansen'sche Objectiv. 1876. 3 *M*.

C. NEUMANN, Das Webersche Gesetz bei Zugrundelegung der unitarischen Anschauungsweise. 1876. 1 *M*.

W. WEBER, Elektrodynamische Maassbestimmungen, insbesondere über die Energie der Wechselwirkung. Mit 1 Tafel. 1878. 2 *M*.

ZWÖLFTER BAND. (XIX. Bd.) hoch 4.

W. G. HANKEL, Elektrische Untersuchungen. Dreizehnte Abhandlung: Ueber die thermoelektrischen Eigenschaften des Apatits, Brucits, Coelestins, Prehnits, Natroliths, Skolezits, Datoliths und Axinits. Mit 3 Tafeln. 1878. 2 *M*.

W. SCHEIBNER, Zur Reduction elliptischer Integrale in reeller Form. 1879. 5 *M*.

W. G. HANKEL, Elektrische Untersuchungen. Vierzehnte Abhandlung: Ueber die photo- und thermoelektrischen Eigenschaften des Flussspathes. Mit 3 Tafeln. 1879. 2 *M*.

Leipzig, August 1879. S. Hirzel.

SITZUNGSBERICHTE
DER
KÖNIGL. SÄCHSISCHEN GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN.

KLEINERE ABHANDLUNGEN.

BERICHTE über die Verhandlungen der Königlich Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig. Erster Band. Aus den Jahren 1846 und 1847. Mit Kupfern. gr. 8. 12 Hefte.

—— Zweiter Band. Aus dem Jahre 1848. Mit Kupfern. gr. 8. 6 Hefte.

Vom Jahre 1849 an sind die Berichte der beiden Classen getrennt erschienen.

—— Mathematisch-physische Classe. 1849 (3) 1850 (3) 1851 (2) 1852 (2) 1853 (3) 1854 (3) 1855 (2) 1856 (2) 1857 (3) 1858 (3) 1859 (4) 1860 (3) 1861 (2) 1862 (1) 1863 (2) 1864 (1) 1865 (1) 1866 (5) 1867 (4) 1868 (3) 1869 (4) 1870 (5) 1871 (7) 1872 (4 mit Beiheft) 1873 (7) 1874 (5) 1875 (4) 1876 (2) 1877 (2) 1878 (1).

—— Philologisch-historische Classe. 1849 (5) 1850 (4) 1851 (5) 1852 (4) 1853 (5) 1854 (6) 1855 (4) 1856 (4) 1857 (2) 1858 (2) 1859 (4) 1860 (4) 1861 (4) 1862 (1) 1863 (3) 1864 (3) 1865 (1) 1866 (4) 1867 (2) 1868 (3) 1869 (3) 1870 (3) 1871 (1) 1872 (1) 1873 (1) 1874 (2) 1875 (2) 1876 (1) 1877 (2) 1878 (3).

Jedes Heft der Berichte ist einzeln zu dem Preise von 1 Mark zu haben.

SCHRIFTEN
DER FÜRSTLICH-JABLONOWSKI'SCHEN GESELLSCHAFT ZU LEIPZIG.

ABHANDLUNGEN bei Begründung der Königl. Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften am Tage der zweihundertjährigen Geburtsfeier Leibnizens herausgegeben von der Fürstl. Jablonowski'schen Gesellschaft. Mit dem Bildnisse von Leibniz in Medaillon und zahlreichen Holzschnitten und Kupfertafeln. 61 Bogen in hoch 4°. 1846. broch. Preis 15 ℳ.

PREISSCHRIFTEN gekrönt und herausgegeben von der Fürstlich Jablonowski'schen Gesellschaft.

1. H. GRASSMANN, Geometrische Analyse geknüpft an die von Leibniz erfundene geometrische Charakteristik. Mit einer erläuternden Abhandlung von *A. F. Möbius*. (Nr. I der mathematisch-physischen Section.) hoch 4°. 1847. 2 ℳ.
2. H. B. GEINITZ, Das Quadergebirge oder d. Kreideformation in Sachsen, mit Berücks. der glaukonitreichen Schichten. Mit 1 color. Tafel. (Nr. II d. math.-phys. Sect.) hoch 4°. 1850. 1 ℳ 60 ₰.
3. J. ZECH, Astronomische Untersuchungen über die Mondfinsternisse des Almagest. (Nr. III d. math.-phys. Sect.) hoch 4°. 1851. 1 ℳ.
4. J. ZECH, Astron. Untersuchungen üb. die wichtigeren Finsternisse, welche v. d. Schriftstellern des class. Alterthums erwähnt werden. (No. IV d. math.-phys. Sect.) hoch 4°. 1853. 2 ℳ.
5. H. B. GEINITZ, Darstellung der Flora des Hainichen-Ebersdorfer und des Flöhaer Kohlenbassins. (Nr. V d. math.-phys. Sect.) hoch 4°. Mit 14 Kupfertafeln in gr. Folio. 1854. 24 ℳ.
6. TH. HIRSCH, Danzigs Handels- und Gewerbsgeschichte unter der Herrschaft des deutschen Ordens. (Nr. I der historisch-nationalökonomischen Section.) hoch 4°. 1858. 8 ℳ.
7. H. WISKEMANN, Die antike Landwirthschaft und das von Thünensche Gesetz, aus den alten Schriftstellern dargelegt. (Nr. II d. hist.-nat. ök. Sect.) 1859. 2 ℳ 40 ₰.
8. K. WERNER, Urkundliche Geschichte der Iglauer Tuchmacher-Zunft. (Nr. III d. hist.-nat. ök. Sect.) 1861. 3 ℳ.
9. V. BÖHMERT, Beiträge zur Gesch. d Zunftwesens. (Nr. IV d. hist.-nat. ök. Sect.) 1862. 4 ℳ.
10. H. WISKEMANN, Darstellung der in Deutschland zur Zeit der Reformation herrschenden nationalökonomischen Ansichten. (Nr. V d. hist.-nat. ök. Sect.) 1862. 4 ℳ.
11. E. L. ETIENNE LASPEYRES, Geschichte der volkswirthschaftl. Anschauungen der Niederländer und ihrer Litteratur zur Zeit der Republik. (Nr. VI d. hist.-nat. ök. Sect.) 1863. 8 ℳ.
12. J. FIKENSCHER, Untersuchung der metamorphischen Gesteine der Lunzenauer Schieferhalbinsel. (Nr. VI d. math.-phys. Sect.) 1867. 2 ℳ.
13. JOH. FALKE, Die Geschichte des Kurfürsten August von Sachsen in volkswirthschaftlicher Beziehung. (Nr. VII d. hist.-nat. ök. Sect.) 1868. 8 ℳ.
14. B. BÜCHSENSCHÜTZ, Die Hauptstätten des Gewerbfleisses im classischen Alterthume. (Nr. VIII d. hist.-nat. ök. Sect.) 1869. 2 ℳ 80 ₰.
15. Dr. HUGO BLÜMNER, Die gewerbliche Thätigkeit der Völker des classischen Alterthums. (Nr. IX d. hist.-nat. ök. Sect.) 1869. 4 ℳ.
16. HERMANN ENGELHARDT, Flora der Braunkohlenformation im Königreich Sachsen. (Nr. VII d. math.-phys. Sect.) Mit 15 Tafeln. 1870. 12 ℳ.
17. H. ZEISSBERG, Die polnische Geschichtschreibung des Mittelalters. (Nr. X d. hist.-nat. ök. Sect.) 1873. 12 ℳ.
18. ALBERT WANGERIN, Reduction der Potentialgleichung für gewisse Rotationskörper auf eine gewöhnliche Differentialgleichung. (Nr. VIII d. math.-phys. Sect.) 1875. 1 ℳ 20 ₰.
19. A. LESKIEN, Die Declination im Slavisch-Litauischen und Germanischen. (Nr. XI d. hist.-nat. ök. Sect.) 1876. 5 ℳ.
20. Dr. R. HASSENCAMP, Ueber den Zusammenhang des lettoslavischen und germanischen Sprachstammes. (Nr. XII d. hist.-nat. ök. Sect.) 1876. 3 ℳ.
21. Dr. PÖHLMANN, Die Wirthschaftspolitik der Florentiner Renaissance und das Princip der Verkehrsfreiheit. (Nr. XIII d. hist.-nat. ök. Sect.) 1878. 4 ℳ 20 ₰.
22. Dr. ALEXANDER BRÜCKNER, Die slavischen Ansiedelungen in der Altmark und im Magdeburgischen. (Nr. XIV d. hist.-nat. ök. Sect.) 1879. 4 ℳ 20 ₰.

Leipzig. S. Hirzel.

Druck von Breitkopf und Härtel in Leipzig.

C. BRUHNS,
MITGLIED DER KÖNIGL. SÄCHS. GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN IN LEIPZIG.

NEUE BESTIMMUNG DER LÄNGENDIFFERENZ ZWISCHEN DER STERNWARTE IN LEIPZIG UND DER NEUEN STERNWARTE AUF DER TÜRKENSCHANZE IN WIEN.

AUF TELEGRAPHISCHEM WEGE AUSGEFÜHRT

UNTER LEITUNG DER

PROFESSOREN C. BRUHNS UND TH. VON OPPOLZER

VON

DR. WEINEK UND OBERLIEUTENANT RITTER VON STEEB.

Des XII. Bandes der Abhandlungen der mathematisch-physischen Classe der Königl. Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften

Nº IV.

LEIPZIG

BEI S. HIRZEL.

1880.

ABHANDLUNGEN

DER

KÖNIGL. SÄCHS. GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN

ZU LEIPZIG.

MATHEMATISCH-PHYSISCHE CLASSE.

ERSTER BAND. (I. Bd.)*) Mit 3 Tafeln. hoch 4. 1852. brosch. Preis 13 ℳ 60 ₰.

A. F. MÖBIUS, Ueber die Grundformen der Linien der dritten Ordnung. Mit 1 Tafel. 1849. 2 ℳ 40 ₰.

P. A. HANSEN, Auflösung eines beliebigen Systems von linearischen Gleichungen. — Ueber die Entwickelung der Grösse $(1-2\alpha H+\alpha\alpha)^{-\frac{1}{2}}$ nach den Potenzen von α. 1849. 1 ℳ 20 ₰.

A. SEEBECK, Ueber die Querschwingungen elastischer Stäbe. 1849. 1 ℳ.

C. F. NAUMANN, Ueber die cyclocentrische Conchospirale und über das Windungsgesetz von Planorbis Corneus. 1849. 1 ℳ.

W. WEBER, Elektrodynamische Maassbestimmungen (Widerstandsmessungen). 1851. 3 ℳ.

F. REICH, Neue Versuche mit der Drehwaage. 1852. 2 ℳ.

M. W. DROBISCH, Zusätze zum Florentiner Problem. Mit 1 Tafel. 1852. 1 ℳ 60 ₰.

W. WEBER, Elektrodynamische Maassbestimmungen (Diamagnetismus). Mit 1 Tafel. 1852. 2 ℳ.

ZWEITER BAND. (IV. Bd.) Mit 19 Tafeln. hoch 4. 1855. brosch. Preis 20 ℳ.

M. W. DROBISCH, Ueber musikalische Tonbestimmung und Temperatur. 1852. 3 ℳ.

W. HOFMEISTER, Beiträge zur Kenntniss der Gefässkryptogamen. Mit 18 Tafeln. 1852. 4 ℳ.

P. A. HANSEN, Entwickelung des Products einer Potenz des Radius Vectors mit dem Sinus oder Cosinus eines Vielfachen der wahren Anomalie in Reihen, die nach den Sinussen oder Cosinussen der Vielfachen der wahren, excentrischen oder mittleren Anomalie fortschreiten. 1853. 3 ℳ.

—— Entwickelung der negativen und ungraden Potenzen der Quadratwurzel der Function $r^2 + r'^2 - 2rr'(\cos U \cos U' + \sin U \sin U' \cos J)$. 1854. 3 ℳ.

O. SCHLÖMILCH, Ueber die Bestimmung der Massen und der Trägheitsmomente symmetrischer Rotationskörper von ungleichförmiger Dichtigkeit. 1854. 80 ₰.

—— Ueber einige allgemeine Reihenentwickelungen und deren Anwendung auf die elliptischen Functionen. 1854. 1 ℳ 60 ₰.

P. A. HANSEN, Die Theorie des Aequatoreals. 1855. 2 ℳ 40 ₰.

C. F. NAUMANN, Ueber die Rationalität der Tangenten-Verhältnisse tautozonaler Krystallflächen. 1855. 1 ℳ.

A. F. MÖBIUS, Die Theorie der Kreisverwandtschaft. 1855. 2 ℳ.

DRITTER BAND. (V. Bd.) Mit 15 Tafeln. hoch 4. 1857. brosch. Preis 19 ℳ 20 ₰.

M. W. DROBISCH, Nachträge zur Theorie der musik. Tonverhältnisse. 1855. 1 ℳ 20 ₰.

P. A. HANSEN, Auseinandersetzung einer zweckmässigen Methode zur Berechnung der absoluten Störungen der kleinen Planeten. 1856. 5 ℳ.

R. KOHLRAUSCH und W. WEBER, Elektrodynamische Maassbestimmungen, insbesondere Zurückführung der Stromintensitäts-Messungen auf mechanisches Maass. 1856. 1 ℳ 60 ₰.

H. D'ARREST, Resultate aus Beobachtungen der Nebelflecken und Sternhaufen. Erste Reihe. 1856. 2 ℳ 40 ₰.

W. G. HANKEL, Elektrische Untersuchungen. Erste Abhandlung: Ueber der Messung der atmosphärischen Elektricität nach absolutem Maasse. Mit 2 Tafeln. 1856. 6 ℳ.

W. HOFMEISTER, Beiträge zur Kenntniss der Gefässkryptogamen. No. II. Mit 13 Tafeln. 1857. 4 ℳ.

VIERTER BAND. (VI. Bd.) Mit 29 Tafeln. hoch 4. 1859. brosch. Preis 22 ℳ 50 ₰.

P. A. HANSEN, Auseinandersetzung einer zweckmässigen Methode zur Berechnung der absoluten Störungen der kleinen Planeten. Zweite Abhandlung. 1857. 4 ℳ.

W. G. HANKEL, Elektrische Untersuchungen. Zweite Abhandlung: Ueber die thermo-elektrischen Eigenschaften des Boracites. 1857. 2 ℳ 40 ₰.

—— Elektrische Untersuchungen. Dritte Abhandlung: Ueber Elektricitätserregung zwischen Metallen und erhitzten Salzen. 1858. 1 ℳ 60 ₰.

P. A. HANSEN, Theorie der Sonnenfinsternisse und verwandten Erscheinungen. Mit 2 Tafeln. 1858. 6 ℳ.

G. T. FECHNER, Ueber ein wichtiges psychophysisches Grundgesetz und dessen Beziehung zur Schätzung der Sterngrössen. 1858. 2 ℳ.

W. HOFMEISTER, Neue Beiträge zur Kenntniss der Embryobildung der Phanerogamen. I. Dikotyledonen mit ursprünglich einzelligem, nur durch Zellentheilung wachsendem Endosperm. Mit 27 Tafeln. 1859. 8 ℳ.

FÜNFTER BAND. (VII. Bd.) Mit 30 Tafeln. hoch 4. 1861. brosch. Preis 24 ℳ.

W. G. HANKEL, Elektrische Untersuchungen. Vierte Abhandlung: Ueber das Verhalten der Weingeistflamme in elektrischer Beziehung. 1859. 2 ℳ.

P. A. HANSEN, Auseinandersetzung einer zweckmässigen Methode zur Berechnung der absoluten Störungen der kleinen Planeten. Dritte Abhandlung. 1859. 7 ℳ 20 ₰.

G. T. FECHNER, Ueber einige Verhältnisse des binocularen Sehens. 1860. 5 ℳ 60 ₰.

G. METTENIUS, Zwei Abhandlungen: I. Beiträge zur Anatomie der Cycadeen. Mit 5 Tafeln. II. Ueber Seitenknospen bei Farnen. 1860. 3 ℳ.

W. HOFMEISTER, Neue Beiträge zur Kenntniss der Embryobildung der Phanerogamen. II. Monokotyledonen. Mit 25 Tafeln. 1861. 8 ℳ.

---

*) Die eingeklammerten römischen Ziffern geben die Zahl des Bandes in der Reihenfolge der Abhandlungen beider Classen an.

NEUE BESTIMMUNG
DER
LÄNGENDIFFERENZ
ZWISCHEN DER
STERNWARTE IN LEIPZIG
UND DER
NEUEN STERNWARTE AUF DER TÜRKENSCHANZE IN WIEN.

AUF TELEGRAPHISCHEM WEGE AUSGEFÜHRT

UNTER LEITUNG DER

PROFESSOREN C. BRUHNS UND TH. VON OPPOLZER

VON

DR. WEINEK UND OBERLIEUTENANT RITTER VON STEEB.

HERAUSGEGEBEN

VON

DR. C. BRUHNS,

MITGLIED DER KÖNIGL. SÄCHS. GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN IN LEIPZIG.

Des XII. Bandes der Abhandlungen der mathematisch-physischen Classe der Königl. Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften

Nº IV.

LEIPZIG

BEI S. HIRZEL.

1880.

Vom Verfasser übergeben den 25. October 1879.
Der Abdruck vollendet den 10. Januar 1880.

NEUE BESTIMMUNG

DER

LÄNGENDIFFERENZ

ZWISCHEN DER

STERNWARTE IN LEIPZIG

UND DER

NEUEN STERNWARTE AUF DER TÜRKENSCHANZE IN WIEN.

AUF TELEGRAPHISCHEM WEGE AUSGEFÜHRT

UNTER LEITUNG DER

PROFESSOREN C. BRUHNS UND TH. VON OPPOLZER

VON

DR. WEINEK UND OBERLIEUTENANT RITTER VON STEEB.

HERAUSGEGEBEN

VON

DR. C. BRUHNS
DIRECTOR DER STERNWARTE UND MITGLIED DER K. SÄCHS. GESELLSCHAFT
DER WISSENSCHAFTEN IN LEIPZIG.

I. Einleitung.

Im Jahre 1865 wurde die Längendifferenz zwischen der Sternwarte in Leipzig und der geodätischen Station Laaer Berg bei Wien von Herrn Professor E. Weiss und mir durch Zeitübertragung auf telegraphischem Wege ermittelt und die Differenz zwischen dem Laaer Berg und der alten Sternwarte in Wien auf dem Akademiegebäude am Universitätsplatze auf geodätischem Wege bestimmt, und konnte ich im Jahre 1866 in Bd. XV dieser »Abhandlungen« das Resultat der Bestimmung der Längendifferenz vorlegen.

Als Herr Th. von Oppolzer die Leitung der astronomischen Arbeiten der k. k. österreichischen Gradmessung übernommen hatte, und die neue Sternwarte in Wien ausserhalb der Stadt auf der alten Türkenschanze erbaut wurde, schien es ihm, obwohl er die Längendifferenz zwischen dem Laaer Berge und der Türkenschanze auch auf astronomischem Wege ermittelte, doch von grosser Wichtigkeit, von Neuem die neue Sterwarte direct mit den Sternwarten in Berlin und Leipzig zu verbinden. Ich konnte mich dieser Ansicht nur anschliessen, denn bei der Bestimmung zwischen mir und Professor Weiss waren die Beobachtungen mit Auge und Ohr ausgeführt und die Uhren unter einander durch Coincidenzen mit telegraphisch gegebenen Signalen verglichen. Auch die persönliche Gleichung zeigte sich ziemlich schwankend; sie war, da ein Wechsel der Beobachter nicht stattgefunden hatte, vor der eigentlichen Längenbestimmung an dem Leipziger und nach derselben an dem Wiener Instrument ermittelt und für Sterne von verschiedener Declination verschieden gefunden.

Die Wiederholung nach der Methode des Registrirens, sowohl

der Zeitbestimmungen als auch der Signale, und zu einer andern Jahreszeit und von andern Beobachtern, welche die Stationen wechselten, war daher zugleich eine Controlle für die Sicherheit der früher angewandten Methode. Das neu erhaltene Resultat stimmt mit dem früheren bis auf 0ˢ03, also innerhalb der wahrscheinlichen Fehler, überein, und ist dadurch wiederum nicht nur ein Beweis für die Genauigkeit der Bestimmung der Längendifferenz auf telegraphischem Wege überhaupt als auch dafür geliefert, dass die verschiedenen Methoden zu denselben Werthen führen, wenn nur die nöthigen Vorsichtsmassregeln und die erforderliche Sorgfalt angewandt wird.

Die Beobachtungen wurden im Jahre 1875 ausgeführt in der Zeit vom 7. October bis zum 23. November, und zwar war es, da das Wetter ziemlich unbeständig, nur October 8, 9 und 19, November 2, 3, 4, 14 und 16 an beiden Stationen gleichzeitig klar, während October 7 und November 23 nur in Wien Beobachtungen gelangen, die aber als einseitig nicht benutzt wurden. Die Beobachter waren der erste Observator der Leipziger Sternwarte Herr Dr. Weinek und der Observator der k. k. österreichischen Gradmessung Herr Oberlieutenant Ritter von Steeb. October 8, 9, November 14 und 16 beobachtete Ersterer in Leipzig, Letzterer in Wien; October 19, November 2, 3, 4 Weinek in Wien, von Steeb in Leipzig.

Die Instrumente waren beide vollständig gleich und zwar Passageninstrumente mit gebrochenem Fernrohr von 68 mm Oeffnung und 87 cm Brennweite aus der Werkstatt von Pistor & Martins in Berlin, ganz dieselben Instrumente, welche im Jahre 1865 zur Verwendung kamen. Beobachtet wurde immer mit der stärksten, der 90fachen Vergrösserung.

Die Registrirapparate waren nach dem 9. October ganz gleiche von Mayer & Wolf in Wien und gehören beide, sowie die Schaltbretter mit den Relais, Boussolen und Widerständen, der k. k. österreichischen Gradmessung. Die Signalstifte der Registrirapparate sind federnde und in feine Spitzen auslaufende Glasröhrchen, welche zum Markiren der Signale mit einem Anilinfarbstoff gefüllt werden. Zwischen den Signalen von den Localuhren und den Localtastern, mit welchen die Durchgänge der Sterne und auch die Signale registrirt wurden, ist die sogenannte Parallaxe, d. i. die Differenz zwischen den

Markirungen der beiden Glasröhrchen, wenn beide gleichzeitig in Bewegung gesetzt werden, ermittelt worden.

Die Parallaxe anzubringen wäre unnöthig, wenn sie immer dieselbe für alle Signale bliebe. Die Glasröhrchen müssen jedoch öfter herausgenommen und gereinigt werden, und da bei dem Einsetzen nicht immer dieselbe Stellung wieder zu erhalten, ist die Parallaxe etwas veränderlich und muss daher berücksichtigt werden.

An den ersten beiden Abenden wurde in Leipzig der Registrirapparat von Ausfeld nach Hansen'scher Construction — siehe die Längenbestimmung zwischen Leipzig und Gotha, Leipzig 1865 — gebraucht, bei welchem die Signale durch Metall-Stifte in den Papierstreifen hineingeschlagen werden. Da die Stifte fest an Hebeln angebracht sind und nie herausgenommen werden, ist die Differenz zwischen den Signalen der beiden Stifte, wenn dieselben gleichzeitig gegeben werden, immer dieselbe, und daher war die Anbringung einer Parallaxe für die ersten Abende in Leipzig unnöthig.

Die Instrumente sind schon anderweitig beschrieben; so die Passageninstrumente in der Längenbestimmung Berlin-Lund, die Registrirapparate von C. von Littrow, das Schaltbrett von Herrn von Oppolzer in den Sitzungsberichten der Wiener Akademie Band LII und LXIX.

Die kaiserlich deutsche und auch die k. k. österreichische Generaldirection der Telegraphen gestatteten mit der grössten Liberalität die unentgeltliche Benutzung directer Telegraphenleitungen in den Nachtstunden und gewährten jede erforderliche Hilfe, wofür den schuldigen Dank hier auszusprechen mir zu besonderer Freude gereicht.

II. Das Beobachtungsprogramm.

Herr von Oppolzer hat für seine Längenbestimmungen eine Anzahl von zu beobachtenden Sternen zusammengestellt und nennt einen Satz von 7—10 aufeinander folgenden Sternen eine Zeitbestimmung.

Es folgen zuerst 3—4 Sterne nicht schwächer als 6. Grösse und nicht zu weit vom Aequator entfernt, die in Intervallen von

3—5 Zeitminuten nach einander culminiren, dann ein Polstern, bei dessen Culmination umgelegt wird, und alsdann wieder 3—5 Sterne wie vorhin. Vor Anfang der Beobachtung und besonders vor der Umlegung wurde nivellirt und nach der Umlegung ebenfalls, und kommen sowohl in Leipzig als in Wien auf jede Zeitbestimmung im Durchschnitt zwischen 3 und 4 Nivellirungen.

Die dem Aequator nahen Sterne, die sogenannten Zeitsterne, sind ferner so gewählt, dass ihre mittlere Zenithdistanz nach Süden nahe eben so gross ist, als die Zenithdistanz der Polsterne nach Norden. Es betrug z. B. die mittlere Zenithdistanz der Polsterne für Leipzig 38°, für Wien 41°, die der Zeitsterne für Leipzig 47°, für Wien 44°. Durch gleiche Zenithdistanzen wird ein Theil der noch etwa vorhandenen Instrumentalfehler eliminirt.

An jedem Abend wurden zweimal Zeitsignale von Leipzig nach Wien und umgekehrt registrirt und zwar vor den Sternbeobachtungen und nach denselben, so dass das Mittel aus den Zeitsignalen jedesmal nahe zusammenfällt mit dem Mittel aus den Sternbeobachtungen. Es war vorher ausgemacht, dass nach vorherigem Anrufen und Probiren von jeder Station viermal je 16 Signale in Intervallen von circa 1½ Secunde gegeben werden sollten. Es wurden ferner bei dem Geben dieser Signale Widerstände benutzt, so dass der abgehende und ankommende Strom nahe gleich stark war und konnten mit dem von Herrn von Oppolzer beschriebenen Schaltbrett die erforderlichen Stromstärken sehr schnell und bequem eingestellt werden. Die Stromstärken selbst wurden an Bussolen gemessen und möglichst jede Aenderung in der Empfindlichkeit der Relais vermieden. Die Registrirapparate standen mit den empfindlichen Relais in unmittelbarer Verbindung.

Wegen des unbeständigen Wetters in der schon vorgeschrittenen Jahreszeit wurde zur Regel gemacht, von den in der folgenden Tabelle I enthaltenen in sechs Gruppen getheilten Sternen womöglich drei Gruppen gleichzeitig zu beobachten und musste sich die Reihenfolge der Gruppen nach dem Wetter richten. Aus der Tabelle ersieht man, welche Sterne an beiden Orten gleichzeitig beobachtet werden konnten. Das Zeichen » bedeutet: beobachtet, das Fehlen jedes Zeichens bedeutet: nicht beobachtet. Man sieht, dass im Durchschnitt auf beiden Stationen gleichzeitig an jedem der acht

Abende nahe drei Zeitbestimmungen mit etwa zwanzig gemeinsamen Sternen und drei Polsternen enthalten sind. Das Beobachtungsschema lässt sich daher dahin zusammenfassen:

Beobachtungsschema.

Signalwechsel (von jeder Station viermal 16 Signale).

Erste Zeitbestimmung mit Umlegung.	Zweimal nivellirt vor, zweimal nivellirt nach der Umlegung.
Zweite Zeitbestimmung mit Umlegung.	Zweimal nivellirt vor, zweimal nivellirt nach der Umlegung.
Dritte Zeitbestimmung mit Umlegung.	Zweimal nivellirt vor, zweimal nivellirt nach der Umlegung.

Signalwechsel (von jeder Station viermal 16 Signale).

In der Uebersicht der Beobachtungen in Tabelle I enthält die erste Columne die angenommenen mittleren Oerter der beobachteten Sterne für 1875,0. Dieselben wurden dem provisorischen Kataloge des Herrn von Oppolzer entnommen, denn die Positionen haben auf die Endresultate, da auf beiden Stationen dieselben Sterne zur Ableitung der Längendifferenz benutzt sind, keinen Einfluss. Der provisorische Katalog bezieht sich, was die Zeitsterne anbetrifft, auf das Newcomb'sche Verzeichniss der Maskelyne'schen Sterne. Die in demselben nicht enthaltenen Sterne sind dem Pulkowaer Katalog, dem Nautical Almanac (1875) und der Connaissance des Temps (1875) entnommen und als Reduction auf das gewählte System angenommen:

für den Pulkowaer Katalog: $+0^s.019$,

» » Nautical Almanac:

$$+0^s.029 + 0^s.015\cos\alpha - 0^s.009\sin\alpha - 0^s.009\,\frac{\text{Decl.} - 10^\circ}{10^\circ},$$

» die Connaissance des Temps:

$$+0^s.044 + 0^s.020\cos\alpha - 0^s.021\sin\alpha + 0^s.0045\,\frac{\text{Decl.} - 10^\circ}{10^\circ}.$$

Tabelle I. Uebersicht der erhaltenen

Sterne	Grösse	AR 1875,0.	Decl. 1875,0	October 8 Wien Steeb	October 8 Leipzig Weinek	October 9 Wien Steeb	October 9 Leipzig Weinek
[23 Hevelii]	6	20h 16m 59s.10	+ 4° 56'.7	»	»		
[π Capricorni]	5	20 20 9.88	−18 37.2	»	»		
[69 Aquilae]	5	20 23 7.05	− 3 18.0	»	»		
Polstern K (O. C.)	6.8	20 34 38.17	+81 0.5	»	»		
[15 Delphini]	6	20 43 40.40	+12 4.8	»	»		
μ Aquarii	5	20 45 54.66	− 9 27.1	»	»		
[16 Delphini]	6	20 49 40.75	+12 5.5	»	»		
θ Capricorni	4	20 58 55.40	−17 43.7		»	»	»
61¹ Cygni	6	21 1 17.62	+38 8.1	»		»	
61² Cygni	6	21 1 19.12	+38 8.1	»		»	
[γ Equulei]	5	21 4 15.83	+ 9 37.7	»	»	»	»
α Equulei	4	21 9 34.49	+ 4 43.9	»	»	»	»
Polstern F (U. C.)	4.4	9 19 5.66	+81 52.5	»	»	»	»
[ε Capricorni]	5	21 30 4.72	−20 1.5	»	»	»	»
[d Aquarii]	6	21 33 12.71	+ 1 41.0	»	»	»	»
ε Pegasi	2	21 38 2.83	+ 9 18.2	»	»	»	»
16 Pegasi	5	21 47 22.54	+25 20.3	»		»	
α Aquarii	3	21 59 21.80	− 0 55.6	»		»	
θ Pegasi	3	22 3 53.67	+ 5 35.0	»	»	»	»
[41 Aquarii]	6	22 7 23.63	−21 41.7	»	»	»	»
θ Aquarii	4	22 10 14.21	− 8 24.3	»	»	»	»
Polstern L (O. C.)	5.3	22 22 57.22	+85 28.7	»	»	»	»
ζ Pegasi	3	22 35 13.66	+10 10.8	»	»	»	»
[68 Aquarii]	6	22 40 50.14	−20 15.9	»	»	»	»
λ Aquarii	4	22 46 5.52	− 8 14.7	»	»	»	»
α Piscis austrini	1	22 50 14.39	−30 17.1			»	
α Pegasi	2	22 58 32.13	+14 32.0			»	
[58 Pegasi]	5	23 3 43.86	+ 9 8.7			»	»
[φ Aquarii]	4	23 7 50.88	− 6 43.4			»	»
γ Piscium	4	23 10 41.12	+ 2 36.0			»	»
Polstern M (O. C.)	5.8	23 27 50.31	+86 37.1			»	»
[21 Piscium]	6	23 43 3.44	+ 0 23.0			»	»
[φ Pegasi]	6	23 46 7.84	+18 25.6			»	»
ω Piscium	4	23 52 53.57	+ 6 10.3			»	»
α Andromedae	2	0 1 55.76	+28 24.0			»	
γ Pegasi	3	0 6 48.04	+14 29.3				
12 Ceti	6	0 23 39.58	− 4 38.9				
[55 Piscium]	6	0 33 20.92	+20 45.1				
β Ceti	2	0 37 18.84	−18 40.4				
[58 Piscium]	5	0 40 30.31	+11 17.5				
Polstern A (O. C.)	4.8	0 52 1.07	+85 35.1				
[η Ceti]	3	1 2 17.98	−10 50.7				
[φ Piscium]	5	1 6 57.87	+23 55.3				
[f Piscium]	5	1 11 21.08	+ 2 57.3				
η Piscium	4	1 24 47.78	+14 42.0				
[π Piscium]	6	1 30 28.42	+11 30.1				
ν Piscium	5	1 34 55.62	+ 4 51.3				
Polstern G (U. C.)	6.3	13 46 0.31	+83 22.8				
[60 Ceti]	6	1 56 47.06	− 0 28.5				
α Arietis	2	2 0 7.80	+22 52.2				
[15 Arietis]	6	2 3 42.09	+18 54.6				
67 Ceti	6	2 10 44.95	− 6 59.9				
ξ² Ceti	4	2 21 30.86	+ 7 53.9				

Beobachtungen in Leipzig und Wien.

October 19		November 2		November 3		November 4		November 14		November 16	
Leipzig Steeb	Wien Weinek	Leipzig Steeb	Wien Weinek	Leipzig Steeb	Wien Weinek	Leipzig Steeb	Wien Weinek	Wien Steeb	Leipzig Weinek	Wien Steeb	Leipzig Weinek
			»	»	»	»	»	»			
				»	»	»	»				
				»	»	»	»	»			
»				»	»	»	»	»		»	
»				»	»	»	»			»	
»				»	»	»	»			»	
»				»	»	»	»			»	
»	»	»	»	»	»	»	»	»			
»	»	»	»	»	»	»	»	»			
»		»		»		»	»	»			
	»	»	»	»	»	»	»	»		»	
»	»	»	»	»	»	»	»	»		»	
»	»	»	»	»	»	»	»	»		»	»
»	»	»	»	»	»		»	»			
»	»	»	»	»	»	»	»	»		»	
»	»	»	»	»	»	»	»	»		»	»
	»		»		»		»	»		»	
	»		»		»		»	»		»	»
»	»	»	»	»	»	»	»	»		»	»
»	»	»	»	»	»	»	»	»		»	
»	»	»	»	»	»	»	»	»		»	»
»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»
»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»
»	»	»	»	»	»	»	»	»		»	
	»	»	»	»	»	»	»	»		»	»
»		»	»		»		»	»	»	»	»
»		»	»		»		»	»	»	»	»
»	»	»	»					»	»	»	»
»	»	»	»					»	»	»	»
»	»	»	»					»	»	»	
»	»	»	»					»	»	»	»
»	»	»	»					»	»	»	
»	»	»	»					»	»	»	
»	»	»	»					»	»	»	
	»		»					»	»	»	»
	»		»					»	»	»	»
								»	»	»	»
								»		»	»
								»	»	»	»
								»	»	»	
								»	»	»	»
								»	»	»	»
								»	»	»	»
								»	»	»	»
										»	»
										»	»
										»	»
										»	»
										»	
										»	»
										»	»
										»	»
											»

Die Sterne, deren Namen in Klammern gesetzt sind, wurden aus minder genauen Katalogen entlehnt, doch sind die Positionen von diesen auch im Mittel innerhalb 0ˢ05 sicher.

Für 61 Cygni ist die Parallaxe (0″45) berücksichtigt, und als Correction für dieselbe sind folgende Werthe an die scheinbaren Oerter des Sternes angebracht:

September 28.5 . . .	0ˢ029
October 18.5	0.035
November 7,6	0.037

Die Positionen der mit den Buchstaben K, F, L, M, A und G bezeichneten Polsterne sind dem Albrecht'schen Verzeichniss im »Generalbericht über die Europäische Gradmessung 1873« entnommen. An dieselben sind aber noch bei Berechnung der scheinbaren Oerter Correctionen angebracht, welche Herr Dr. Becker am Berliner Meridiankreis bestimmt hat. Der Polstern A ist identisch mit dem Stern Nr. 344 der Anhaltsterne in der »Vierteljahrschrift der Astronomischen Gesellschaft« und stimmt die mit der Becker'schen Correction folgende Position mit der der »Vierteljahrschrift« bis auf — 0ˢ03 überein.

III. Die scheinbaren Oerter der beobachteten Sterne.

Die scheinbaren Oerter der Sterne sind nach den Oppolzer-schen Hülfstafeln, in welchen für jeden Stern die Hülfsgrössen log a, log b, log c, log d angegeben sind, berechnet. Bei den Polsternen sind die Mondglieder, wo es nöthig war, berücksichtigt. Die von Dr. Becker bestimmten Correctionen der Polsternpositionen nach Oppolzer's provisorischem Katalog sind:

		Correction in AR.
Polstern	A	+ 0ˢ21
»	F	+ 0.33
»	G	— 0.82
»	K	— 0.07
»	L	+ 0.24
»	M	+ 0.03

Die angewandten scheinbaren Oerter sind in Tabelle II enthalten.

Tabelle II. Scheinbare Oerter der beobachteten Sterne.

Sterne	Oct. 8			Oct. 9	Oct. 19	Nov. 2	Nov. 3	Nov. 4	Nov. 14	Nov. 16
[23 Hevelii]	20^h	17^m	$1^s.58$			$1^s.20$	$1^s.19$	$1^s.18$	$1^s.03$	
[π Capricorni]	20	20	12.88				12.48	12.47		
[69 Aquilae]	20	23	9.74				9.35	9.34	9.20	
[15 Delphini]	20	43	42.89		$42^s.72$		42.49	42.48		$42^s.31$
μ Aquarii	20	45	57.58		57.42		57.21	57.20		57.04
[16 Delphini]	20	49	43.27		43.10		42.88	42.87		42.69
θ Capricorni	20	58	58.28	$58^s.27$	58.12	57.91	57.91	57.89	57.74	
61^1 Cygni	21	1	19.94	19.92	19.72	19.43	19.41	19.39	19.18	
61^2 Cygni	21	1	21.44	21.42	21.22	20.93	20.91	20.89	20.68	
[γ Equulei]	21	4	18.47	18.46	18.31	18.11	18.10	18.08	17.93	17.92
α Equulei	21	9	37.25	37.24	37.09	36.89	36.88	36.87	36.72	36.71
[ε Capricorni]	21	30	8.10	8.09	7.95	7.75	7.74	7.72	7.57	
[d Aquarii]	21	33	15.63	15.62	15.49	15.31	15.30	15.29	15.14	15.13
ε Pegasi	21	38	5.64	5.63	5.50	5.31	5.30	5.29	5.14	5.13
16 Pegasi	21	47	25.14	25.13	24.98	24.77	24.75	24.74	24.58	24.56
α Aquarii	21	59	24.88	24.87	24.74	24.59	24.58	24.56	24.43	24.42
θ Pegasi	22	3	56.67	56.66	56.55	56.38	56.37	56.36	56.23	56.21
[41 Aquarii]	22	7	27.19	27.19	27.07	26.89	26.88	26.87	26.72	26.70
θ Aquarii	22	10	17.48	17.47	17.36	17.20	17.19	17.18	17.04	17.03
ζ Pegasi	22	35	16.70	16.70	16.61	16.46	16.46	16.45	16.32	16.31
[68 Aquarii]	22	40	53.75	53.75	53.65	53.50	53.49	53.49	53.35	53.33
λ Aquarii	22	46	8.89	8.88	8.80	8.67	8.66	8.66	8.53	8.52
α Piscis austr.	22	50		48.33	48.23	48.07	48.05	48.04	47.89	47.88
α Pegasi	22	58		35.21	35.13	35.01	35.00	34.99	34.87	34.86
[58 Pegasi]	23	3		47.02	46.95	46.84			46.71	46.70
[φ Aquarii]	23	7		54.28	54.21	54.10			53.98	53.97
γ Piscium	23	10		44.42	44.36	44.26			44.14	44.13
21 Piscium	23	43		6.81	6.78	6.70			6.61	6.60
[φ Pegasi]	23	46		11.05	11.03	10.95			10.85	10.84
ω Piscium	23	52		56.90	56.89	56.83			56.74	56.73
α Andromedae	0	1		59.00	58.98	58.92			58.82	58.82
γ Pegasi	0	6			51.33	51.29			51.21	51.21
12 Ceti	0	23							42.98	42.98
[55 Piscium]	0	33							24.23	24.23
β Ceti	0	37							22.46	22.46
[58 Piscium]	0	40							33.68	33.69
[η Ceti]	1	2							21.58	21.59
[φ Piscium]	1	7							1.39	1.40
[f Piscium]	1	11							24.62	24.62
η Piscium	1	24								51.38
[π Piscium]	1	30								32.04
ν Piscium	1	34								59.21
[60 Ceti]	1	56								50.77
α Arietis	2	0								11.64
[15 Arietis]	2	3								45.90
67 Ceti	2	10								48.69
ξ^2 Ceti	2	21								34.65

Sterne	Oct. 8	Oct. 9	Oct. 19	Nov. 2	Nov. 3	Nov. 4	Nov. 14	Nov. 16
Polstern K (O. C.)	$20^h 34^m 36^s.15$		34ˢ.57		32ˢ.31	32ˢ.15	30ˢ.67	30ˢ.37
» F (U. C.)	21 19 10.97	11ˢ.13	12.68	15ˢ.10	15.30	15.50	17.26	17.67
» L (O. C.)	22 22 59.53	59.31	57.35	54.04	53.76	53.48	50.84	50.28
» M (O. C.)	23 27	58.97	57.37	54.18			50.77	50.17
» A (O. C.)	0 52						12.38	12.13
» G (U. C.)	1 45							52.41

IV. Ermittelung der Instrumental-Correctionen.

Von den Instrumentalfehlern wurde die Neigung direct durch das Niveau ermittelt, die Collimation durch Umlegung des Instrumentes und das Azimut hergeleitet aus den Beobachtungen der Polsterne in Verbindung mit den Zeitsternen oder in Verbindung mit einer vorläufigen Uhrcorrection. Da immer an beiden Stationen dieselben Polsterne beobachtet und zur Herleitung des Azimutes benutzt und die Coefficienten für das Azimut an beiden Stationen nur wenig verschieden sind, haben die durch Fehler in den Positionen der Polsterne hervorgebrachten Unrichtigkeiten im Azimut keinen Einfluss auf das schliessliche Resultat.

1. Das Instrument in Leipzig.

a. *Die Neigung.*

An jedem Abend wurde die Neigung nach dem Programm neun bis zwölf Mal bestimmt. Das sehr gute Niveau ist schon bei ähnlichen Arbeiten angewandt und hat immer eine grosse Genauigkeit ergeben. In der Libelle befindet sich ein Reservoir und konnte daher die Blasenlänge fast immer gleich gehalten werden. Der Werth eines Theiles der Libelle ist nach vielfachen Bestimmungen genau wie früher zu

$$0^s.122$$

ermittelt.



Die Correction wegen Ungleichheit der Zapfen ist für jeden Beobachter nach dessen Ermittelungen direct angenommen. Um die Grösse: Neigung West minus Neigung Ost, zu bestimmen, sind sämmtliche Nivellirungen benutzt, und um von einer etwaigen, von der Zeit abhängigen Variation der Neigung unabhängig zu sein, wurden durchweg folgende Combinationen eingehalten: Die ersten Neigungen in der Westlage wurden mit den nach zweimaliger Umlegung gefundenen Neigungen in der Westlage zu einem Mittel vereinigt und ebenso die dazwischen liegenden Neigungen in der Ostlage, so dass die Zeiten, für welche diese Neigungen als gültig gefunden sind, fast gleich waren; dann wurde die Grösse Neigung West minus Neigung Ost gebildet.

Wenn das Gewicht einer Nivellirung = 1 angenommen wird, jenes der aufeinanderfolgenden Mittel p', p'', p''', z. B. 2, 2, 3 für

$$\frac{W'+W''}{2}, \quad \frac{O'''+O^{IV}}{2}, \quad \frac{W^{V}+W^{VI}+W^{VII}}{3},$$

dann ist das Gewicht der schliesslichen Differenz, West — Ost

$$P = \frac{4p'p''p'''}{4p'p'''+p''(p'+p''')} = 1.41\ .$$

Herr Weinek fand für West — Ost bei dem Leipziger Instrument $+0\overset{p}{.}472$, Herr von Steeb $+0\overset{p}{.}336$.

Die angestellten Nivellirungen sind in der folgenden Tabelle gegeben und, um sie mit einander vergleichen zu können, sämmtlich auf die Kreislage West reducirt.

Tabelle III. Beobachtete Neigungen in Leipzig.

Tag	Uhrzeit	Kreislage	Neigung	Neigung, bezogen auf Kreis West
1875. October 8	20ʰ.1	W	+0ᵖ.44	+0ᵖ.440
Beobachter	20.5	W	+0.40	+0.400
Weinek	20.9	O	+0.10	+0.572
	21.3	O	−0.21	+0.262
	21.5	W	−0.21	−0.210
	21.7	W	+0.40	+0.400
	22.0	W	+0.075	+0.075
	22.5	O	+0.175	+0.647
	22.8	O	+0.29	+0.762

	Tag	Uhrzeit	Kreislage	Neigung	Neigung, bezogen auf Kreis West
1875.	October 9	20ʰ.9	O	+0ᵖ.06	+0ᵖ.532
	Beobachter	21.5	W	−0.50	−0.500
	Weinek	21.7	W	+0.44	+0.440
		22.0	W	+0.14	+0.140
		22.3	W	+0.55	+0.550
		22.5	O	−0.05	+0.422
		22.9	O	−0.30	+0.172
		23.3	O	−0.85	−0.378
		23.6	W	+0.01	+0.010
		23.9	W	0.00	0.000
	October 19	20.6	O	−0.87	−0.534
	Beobachter		W	−0.92	−0.920
	von Steeb	bis	W	−0.55	−0.550
			W	−0.25	−0.250
		21.3	W	−0.02	−0.020
		21.3	O	−0.50	−0.164
		bis	O	−0.40	−0.064
			O	−0.15	+0.186
		22.4	O	−0.72	−0.384
		22.4	W	−0.12	−0.120
		bis	W	0.00	0.000
			W	0.00	0.000
		23.5	W	+0.15	+0.150
		23.5	O	−0.20	+0.136
		bis 23.9	O	−0.10	+0.236
	November 2	21.0	W	−0.02	−0.020
	von Steeb	bis 21.3	W	0.00	0.000
		21.3	O	−0.52	−0.184
		bis	O	−0.35	−0.014
			O	−0.75	−0.414
		22.4	O	−0.80	−0.464
		22.4	W	−0.72	−0.720
		bis	W	−0.07	−0.070
			W	+0.15	+0.150
		23.5	W	−0.20	−0.200
		23.5	O	−0.52	−0.184
		bis 23.9	O	−0.40	−0.064
	November 3	20.3	O	−0.05	+0.286
	von Steeb	bis 20.6	O	−0.52	−0.184

Tag		Uhrzeit	Kreislage	Neigung	Neigung, bezogen auf Kreis West
1875.	November 3	20ʰ6	W	−0ᵖ30	−0ᵖ300
	Beobachter	bis	W	+0.10	+0.100
	von Steeb		W	+0.15	+0.150
		21.3	W	0.00	0.000
		21.3	O	−0.32	+0.016
		bis	O	−0.50	−0.164
			O	−0.22	+0.116
		22.4	O	−0.97	−0.634
		22.4	W	−0.20	−0.200
		bis 22.8	W	+0.27	+0.270
	November 4	20.3	O	−0.05	+0.286
	von Steeb	bis 20.6	O	−0.57	−0.234
		20.6	W	−0.25	−0.250
		bis	W	−0.20	−0.200
			W	+0.37	+0.370
		21.3	W	+0.47	+0.470
		21.3	O	+0.07	+0.406
		bis	O	−0.32	+0.016
			O	−0.37	−0.034
		22.4	O	−0.35	−0.014
		22.4	W	+0.02	+0.020
		bis 22.8	W	+0.02	+0.020
	November 14	22.3	W	−0.05	−0.050
	Beobachter	22.5	O	−0.05	+0.422
	Weinek	23.0	O	−0.10	+0.372
		23.3	O	+0.05	+0.522
		23.6	W	+0.20	+0.200
		0.0	W	+0.59	+0.590
		0.5	W	+0.86	+0.860
		0.8	W	+0.975	+0.975
		1.0	O	−0.21	+0.262
		1.3	O	0.00	+0.472
		1.4	W	+0.44	+0.440
	November 16	21.2	W	+1.325	+1.325
	Weinek	21.4	O	+0.31	+0.782
		21.9	O	0.00	+0.472
		22.3	O	+0.125	+0.597
		22.6	W	+0.80	+0.800

Tag		Uhrzeit	Kreislage	Neigung	Neigung, bezogen auf Kreis West
1875.	November 16	23^h0	W	$+0^p775$	$+0^p775$
	Beobachter	23.3	W	+0.95	+0.950
	Weinek	23.7	O	+0.59	+1.062
		0.3	O	+0.70	+1.172
		0.8	O	+0.19	+0.662
		1.0	W	+0.875	+0.875
		1.3	W	+0.94	+0.940
		1.7	W	+1.025	+1.025
		1.9	O	+0.525	+0.997
		2.3	O	+0.275	+0.747

Aus diesen Werthen sind aus je zwei, drei oder vier Neigungen die Mittel genommen und ist hierbei nicht ganz gleichmässig verfahren. Herr Weinek hat nämlich, da die resultirende halbstündliche Variation der Neigung innerhalb der Unsicherheit der Neigungsermittelung liegt, für jede Zeitbestimmung, abgesehen von der Correction wegen Zapfenungleichheit, nur eine Neigung angenommen; während Herr von Steeb die Neigung für jede Kreislage getrennt einführte. Aus dem Mittel der Uhrzeiten verschwindet diese Differenz und nur wenn man die Zeitbestimmungen in Kreislage Ost und West gesondert untersuchen wollte, kann sich die Verschiedenheit des Verfahrens bemerkbar machen. An die erhaltenen Mittel ist dann die Ungleichheit der Zapfen angebracht, und nach Umwandlung der Libellentheile in Zeitsecunden ist die folgende Tabelle IV der definitiven Neigungen entstanden.

Tabelle IV. Ableitung der angewandten definitiven Neigungen in Leipzig.

1875, Tag	Mittel der Uhrzeiten	Mittel der Neigungen, bezogen auf Kreis West	Neigung reducirt wegen Zapfenungleichheit		Definitive Neigung in Zeitsecunden	
			West	Ost	West	Ost
October 8	20^h5	$+0^p471$	$+0^p353$	$+0^p117$	$+0^s043$	$+0^s014$
Beobachter	21.5	+0.151	+0.033	−0.203	+0.004	−0.025
Weinek	22.4	+0.495	+0.377	+0.141	+0.046	+0.017
October 9	21.4	+0.157	+0.039	−0.197	+0.005	−0.024
Weinek	22.4	+0.321	+0.203	−0.033	+0.025	−0.004
	23.6	−0.123	−0.241	−0.477	−0.029	−0.058

1875, Tag	Mittel der Uhrzeiten	Mittel der Neigung, bezogen auf Kreis West	Neigung reducirt wegen Zapfenungleichheit		Definitive Neigung in Zeitsecunden	
			West	Ost	West	Ost
October 19	20ʰ6	−0ᵖ534	−0ᵖ618	−0ᵖ786	−0ˢ075	−0ˢ096
Beobachter	20.9	−0.435	−0.519	−0.687	−0.063	−0.084
von Steeb	21.8	−0.106	−0.190	−0.358	−0.023	−0.044
	22.9	+0.007	−0.077	−0.245	−0.009	−0.030
	23.7	+0.186	+0.102	−0.066	+0.012	−0.008
November 2	21.2	−0.010	−0.094	−0.262	−0.011	−0.032
von Steeb	21.8	−0.269	−0.353	−0.521	−0.043	−0.063
	22.9	−0.210	−0.294	−0.462	−0.036	−0.056
	23.7	−0.124	−0.208	−0.376	−0.025	−0.046
November 3	20.4	+0.051	−0.033	−0.201	−0.004	−0.024
von Steeb	20.9	−0.012	−0.096	−0.264	−0.012	−0.032
	21.8	−0.167	−0.251	−0.419	−0.031	−0.051
	22.6	+0.035	−0.049	−0.217	−0.006	−0.026
November 4	20.4	+0.026	−0.058	−0.226	−0.007	−0.027
von Steeb	20.9	+0.098	+0.014	−0.154	+0.002	−0.019
	21.8	+0.093	+0.009	−0.159	+0.001	−0.019
		+0.020	−0.064	−0.232	−0.008	−0.028
November 14	22.6	+0.248	+0.130	−0.106	+0.016	−0.013
Beobachter	23.6	+0.437	+0.319	+0.083	+0.039	+0.010
Weinek	1.0	+0.602	+0.484	+0.248	+0.059	+0.030
November 16	21.5	+0.860	+0.742	+0.506	+0.091	+0.062
Weinek	22.4	+0.698	+0.580	+0.344	+0.071	+0.042
	23.6	+0.990	+0.872	+0.636	+0.106	+0.078
	1.0	+0.826	+0.708	+0.472	+0.086	+0.058
	2.0	+0.923	+0.805	+0.569	+0.098	+0.069

Eine der Zeit proportionale Aenderung der Neigung ist nicht zu erkennen. Es ist die Variation der Neigung in einer Stunde aus Tabelle III in Leipzig nur −0ᵖ004. Der wahrscheinliche Fehler einer Nivellirung findet sich ±0ᵖ22, daher der der definitiven Neigungen, bei welchen im Durchschnitt 3.1 Nivellirungen zu einem Mittel vereinigt sind, zu

$$\pm 0^p12 = 0^s015 \; .$$

b. *Die Collimation.*

Die Ableitung des Collimationsfehlers aus den an den verschiedenen Abenden beobachteten Polsternen geschah nach der Formel:



$$c = \pm \tfrac{1}{2} \left[(T_o - T_w) \cos\delta + (J_o - J_w) \cos(\varphi \mp \delta) \right] \begin{matrix} \text{O. C.} \\ \text{U. C.} \end{matrix},$$

in welcher T_o und T_w die beobachteten Uhrzeiten der Fäden, reducirt auf den Mittelfaden, J_o und J_w die Neigungen der Verbindungslinien der Mittelpunkte der Kreiszapfen (stets auf die Westseite bezogen) in Kreis Ost und Kreis West bezeichnen. Da von Herrn Weinek die Neigung für die ganze Zeitbestimmung als constant angenommen, ist in diesem Falle die Grösse $J_o - J_w$ auch constant und abhängig von der Correction wegen Zapfenungleichheit. Es besteht nämlich die Gleichung:

$$J_o - J_w = \tfrac{1}{2}(\text{West} - \text{Ost}) \begin{cases} = -0^s\!.0288 \text{ in Leipzig,} \\ = -0.0512 \text{ in Wien.} \end{cases}$$

Bei Herrn von Steeb's Beobachtungen ist die Differenz $J_o - J_w$ wegen der für jede Kreislage als constant angenommenen Neigung für jede Zeitbestimmung verschieden.

Noch ist zu erwähnen, dass bei der Reduction von den Seitenfäden auf den Mittelfaden sowohl der Polstern- als auch der Zeitstern-Beobachtungen der individuellen Auffassung der Fäden dadurch Rechnung getragen ist, dass aus den Beobachtungen jedes Beobachters

Tabelle V. Ableitung der

1875, Tag	Stern	Durchgangszeit Kreis West	Correction für i	Durchgangszeit Kreis Ost
October 8	K (O. C.)	20h 36m 51s.13	+0s.24	20h 36m 47s.23
	F (U. C.)	21 21 30.01	−0.02	21 21 34.25
	L (O. C.)	22 25 11.14	+0.48	22 25 4.14
October 9	F (U. C.)	21 21 31.28	−0.02	21 21 35.58
	L (O. C.)	22 25 13.30	+0.26	22 25 5.52
	M (O. C.)	23 30 12.72	−0.40	23 30 1.85
October 19	K (O. C.)	20 37 4.78	−0.33	20 37 1.35
	F (U. C.)	21 21 46.17	+0.29	21 21 50.83
	L (O. C.)	22 25 25.98	−0.11	22 25 17.62
	M (O. C.)	23 30 23.01	−0.14	23 30 11.75
November 2	F (U. C.)	21 22 6.53	+0.05	21 22 10.95
	L (O. C.)	22 25 38.78	−0.12	22 25 30.92
	M (O. C.)	23 30 30.41	−0.55	23 30 26.34

für sich die Fadendistanzen abgeleitet und angewendet sind. Es haben sich folgende Fadendistanzen gefunden:

Leipziger Passageninstrument			Wiener Passageninstrument		
Faden	Weinek	von Steeb	Faden	Weinek	von Steeb
1	40ˢ.270	40ˢ.253	1	36ˢ.628	36ˢ.614
2	26.728	26.735	2	32.129	32.117
4	17.821	17.831	3	27.985	27.982
4	13.427	13.443	4	18.230	18.212
5	8.943	8.990	5	13.254	13.234
			6	9.013	8.989
7	9.004	9.011			
8	13.402	13.395	8	9.014	9.018
9	17.887	17.882	9	13.694	13.707
10	26.845	26.852	10	17.586	17.598
11	40.144	40.099	11	27.511	27.543
			12	32.190	32.195
			13	36.408	36.437

Ein eigentliches Gesetz in der Auffassung der Fäden ist nicht vorhanden; im Mittel heben sich die Differenzen fast vollständig auf.

Mit Anwendung obiger Formel ergeben sich für Ableitung der Collimationsfehler folgende Werthe, bei welchen die Federnparallaxe bereits berücksichtigt ist.

Collimation in Leipzig.

Correction für i	Durchgangszeiten corrigirt für i		Durchgangs-zeit West — Ost	Collimations-fehler	Angewandtes Tagesmittel c_w
	Kreis West	Kreis Ost			
+0.08	51ˢ.37	47ˢ.31	+4ˢ.06	—0ˢ.32	
+0.12	29.99	31.37	—1.38	—0.31	—0ˢ.31
+0.18	11.62	4.32	+7.30	—0.29	
+0.12	31.26	35.70	— 4.44	—0.31	
—0.04	13.56	5.48	+ 8.08	—0.32	—0.32
—0.80	12.32	1.05	+11.27	—0.33	
—0.56	4.45	0.79	+ 3.66	—0.29	
+0.19	46.46	51.02	— 4.56	—0.32	—0.32
—0.42	25.87	17.20	+ 8.67	—0.34	
—0.14	22.87	11.61	+11.26	—0.33	
+0.29	6.58	11.24	— 4.66	—0.33	
—0.63	38.36	30.29	+ 8.07	—0.32	—0.32
—0.69	35.86	25.65	+10.21	—0.30	

1875, Tag	Stern	Durchgangszeit Kreis West	Correction für i	Durchgangszeit Kreis Ost
November 3	K (O. C.)	20ʰ37ᵐ19ˢ.66	−0ˢ.06	20ʰ37ᵐ15ˢ.52
	F (U. C.)	21 22 7.33	+0.05	21 22 12.39
	L (O. C.)	22 25 38.58	−0.11	22 25 30.59
November 4	K (O. C.)	20 37 20.60	+0.06	20 37 16.66
	F (U. C.)	21 22 8.57	−0.05	21 22 12.88
	L (O. C.)	22 25 39.74	−0.11	22 25 31.09
November 14	L (O. C.)	22 25 50.27	+0.17	22 25 41.17
	M (O. C.)	23 30 48.10	+0.54	23 30 36.55
	A (O. C.)	0 55 11.15	+0.63	0 55 2.16
November 16	F (U. C.)	21 22 24.56	−0.44	21 22 29.29
	L (O. C.)	22 25 49.94	+0.75	22 25 41.79
	M (O. C.)	23 30 48.61	+1.47	23 30 37.65
	A (O. C.)	0 55 12.33	+0.92	0 55 3.00
	G (U. C.)	1 49 1.28	−0.60	1 49 6.68

Betrachtet man die einzelnen Werthe, so ergibt sich kein täglicher Gang, denn derselbe ist, wenn man ihn ableitet, theils positiv theils negativ, und die Summe der Veränderung ist, wenn man dieselbe aus den Differenzen der ersten und letzten Collimation an jedem Tage bildet,

$$\text{in } 19.8 \text{ Stunden nur} = +0^s.01 \,,$$

also verschwindend klein. Es sind daher für die Collimationsfehler die in der letzten Columne der Tabelle V enthaltenen Mittel angenommen.

Der wahrscheinliche Fehler einer Collimation findet sich zu

$$\pm 0^s.012 \,,$$

und der wahrscheinliche Fehler des Mittels aus drei Beobachtungen, welche an den meisten Abenden vorliegen, zu

$$\pm 0^s.007 \,.$$

c. *Das Azimut.*

Nachdem die Culminationszeiten der Polsterne wegen Neigung und Collimation corrigirt worden, war aus denselben noch die Correction wegen des Azimutes abzuleiten und wurde zuerst mit Hilfe

Correction für i	Durchgangszeiten corrigirt für i Kreis West	Kreis Ost	Durchgangszeit West — Ost	Collimationsfehler	Angewandtes Tagesmittel c_w
−0ˢ.11	19ˢ.60	15ˢ.41	+4ˢ.19	−0ˢ.33	
+0.24	7.38	12.63	−5.25	−0.37	−0ˢ.34
−0.53	38.47	30.06	+8.41	−0.33	
−0.11	20.66	16.55	+4.11	−0.32	
+0.10	8.52	12.98	−4.46	−0.32	−0.33
−0.21	39.63	30.88	+8.75	−0.34	
−0.14	50.44	40.98	+ 9.46	−0.37	
+0.14	48.64	36.69	+11.95	−0.35	−0.36
+0.32	11.78	2.48	+ 9.30	−0.36	
−0.30	24.12	28.99	− 4.87	−0.34	
+0.44	50.69	42.23	+ 8.46	−0.33	
+1.08	50.08	38.73	+11.35	−0.33	−0.34
+0.62	13.25	3.62	+ 9.63	−0.37	
−0.42	0.68	6.26	− 5.58	−0.32	

der Zeitsterne für jeden Abend ein vorläufiges Azimut abgeleitet, alsdann mit demselben sämmtliche Uhrcorrectionen der Zeitsterne ermittelt, und schliesslich mit diesen und den noch mit dem Azimut behafteten Durchgangszeiten der Polsterne das definitive Azimut gefunden.

Nennen wir die noch mit dem Azimut behaftete Culminationszeit des Polsterns aus Ost und West T', die Rectascension α, die vorläufig ermittelte Uhrcorrection Δt, so findet sich das Azimut k durch die Formel:

$$k = \frac{\alpha - T' - \Delta t}{\sin(\varphi \mp \delta)\sec\delta} \begin{Bmatrix} \text{O. C.} \\ \text{U. C.} \end{Bmatrix}.$$

Die tägliche Aberration ist selbstverständlich berücksichtigt und mit dem Collimationsfehler vereinigt. In der folgenden Tabelle VI sind alle Daten zur Ableitung des Azimuts vorhanden. Angewandt wurde für jeden Abend das arithmetische Mittel aus den erhaltenen Azimuten, denn eine der Zeit proportionale Veränderung ist nicht verbürgt, es kömmt z. B. die Differenz des Azimuts aus Polstern F — K = — 0ˢ.14, aus Polstern L — F = + 0ˢ.01, aus Polstern M — L = — 0ˢ.04, aus Polstern A — M = 0ˢ.00, also theils negativ, theils positiv, welches noch von den Fehlern der Polsternpositionen herrühren kann. Die Nichtberücksichtigung einer etwa vorhandenen Variation des Azimuts hebt sich im Endresultat auch wieder auf. Der wahrscheinliche Fehler

einer Azimutbestimmung unter der Voraussetzung, dass die erhaltenen Einzelwerthe nicht von constanten Fehlern beeinflusst sind, findet sich im Mittel zu

$$\pm 0^s\!.07\ ,$$

Tabelle VI. Ableitung des

1875, Tag	Polstern	Durchgangszeit corrigirt wegen i und c	α
October 8	K (O. C.)	$20^h 36^m 49^s\!.26$	$20^h 34^m 36^s\!.15$
	F (U. C.)	21 21 32.28	21 19 10.97
	L (O. C.)	22 25 7.80	22 22 59.53
October 9	F (U. C.)	21 21 33.35	21 19 11.13
	L (O. C.)	22 25 9.36	22 22 59.31
	M (O. C.)	23 30 6.46	23 27 58.97
October 19	K (O. C.)	20 37 2.52	20 34 34.57
	F (U. C.)	21 21 48.85	21 19 12.68
	L (O. C.)	22 25 21.35	22 22 57.35
	M (O. C.)	23 30 16.99	23 27 57.37
November 2	F (U. C.)	21 22 9.02	21 19 15.10
	L (O. C.)	22 25 34.14	22 22 54.04
	M (O. C.)	23 30 30.50	23 27 54.18
November 3	K (O. C.)	20 37 17.40	20 34 32.31
	F (U. C.)	21 22 10.11	21 19 15.30
	L (O. C.)	22 25 34.08	22 22 53.76
November 4	K (O. C.)	20 37 18.50	20 34 32.15
	F (U. C.)	21 22 10.86	21 19 15.50
	L (O. C.)	22 25 35.06	22 22 53.48
November 14	L (O. C.)	22 25 45.54	22 22 50.84
	M (O. C.)	23 30 42.44	23 27 50.77
	A (O. C.)	0 55 6.96	0 52 12.38
November 16	F (U. C.)	21 22 26.65	21 19 17.67
	L (O. C.)	22 25 46.30	22 22 50.28
	M (O. C.)	23 30 44.19	23 27 50.17
	A (O. C.)	0 55 8.27	0 52 12.13
	G (U. C.)	1 49 3.58	1 45 52.41

folglich der wahrscheinliche Fehler eines für den Abend angewandten Azimutmittels aus drei Beobachtungen zu

$$\pm 0^s04 \ .$$

Azimutes für Leipzig.

$\alpha - T'$	Δt für die Culminationszeit des Polsterns	$\alpha - T' - \Delta t$	Azimut k	Tagesmittel
$-2^m 13^s 11$	$-2^m 16^s 54$	$+3^s 43$	$-1^s 08$	
−2 21.31	−2 16.73	−4.58	−0.89	$-1^s 05$
−2 8.27	−2 16.56	+8.29	−1.17	
−2 22.22	−2 17.74	− 4.48	−0.87	
−2 10.05	−2 17.66	+ 7.61	−1.07	−0.99
−2 7.49	−2 17.69	+10.20	−1.04	
−2 27.95	−2 30.39	+ 2.44	−0.77	
−2 36.17	−2 30.42	− 5.75	−1.12	−0.98
−2 24.00	−2 30.53	+ 6.53	−0.92	
−2 19.62	−2 30.50	+10.88	−1.11	
−2 53.92	−2 47.63	− 6.29	−1.22	
−2 40.10	−2 47.67	+ 7.57	−1.06	−1.15
−2 36.32	−2 47.67	+11.35	−1.16	
−2 45.09	−2 48.32	+3.23	−1.02	
−2 54.81	−2 48.34	−6.47	−1.26	−1.14
−2 40.32	−2 48.43	+8.11	−1.14	
−2 46.35	−2 49.44	+3.09	−0.97	
−2 55.36	−2 49.43	−5.93	−1.15	−1.08
−2 41.58	−2 49.50	+7.92	−1.11	
−2 54.70	−3 2.16	+ 7.46	−1.05	
−2 51.67	−3 2.20	+10.53	−1.08	−1.06
−2 54.58	−3 2.25	+ 7.67	−1.05	
−3 8.98	−3 3.41	−5.57	−1.08	
−2 56.01	−3 3.41	+7.40	−1.04	
−2 54.02	−3 3.47	+9.45	−0.96	−1.07
−2 56.14	−3 3.46	+7.32	−1.00	
−3 11.17	−3 3.41	−7.76	−1.26	

2. Das Instrument in Wien.

a. *Die Neigung.*

Ueber die Ableitung ist schon Alles bei dem Leipziger Instrument gesagt. Es fand sich in Wien:

$$1^p = 0\overset{s}{.}095 \,.$$

Die Grösse Zapfen West — Ost ist

nach Weinek $= + 1\overset{p}{.}078$,
» von Steeb $= + 1.124$.

Die stündliche Aenderung der Neigung findet sich im Durchschnitt zu

$$- 0\overset{p}{.}024 \,,$$

also auch verschwindend klein.

Der wahrscheinliche Fehler einer Nivellirung ist

$$\pm 0\overset{p}{.}20 \,,$$

daher der der definitiven Neigungen, bei welchen im Durchschnitt 3.4 Nivellirungen zu einem Mittel vereinigt sind, zu

$$\pm 0\overset{p}{.}11 = \pm 0\overset{s}{.}010 \,.$$

Die einzelnen Nivellirungen sind in Tabelle VII, die Mittelwerthe und definitiven Neigungen in Tabelle VIII enthalten.

Tabelle VII. Beobachtete Neigungen in Wien.

1875, Tag	Uhrzeit	Kreislage	Neigung	Neigung, bezogen auf Kreis West
October 8	20ʰ3 bis 20ʰ6	W	−0ᵖ10	−0ᵖ100
Beobachter		W	+0.27	+0.270
von Steeb				
	20.6 bis 21.3	O	−0.80	+0.324
		O	−1.15	−0.026
		O	−1.25	−0.126
		O	−1.10	+0.024
	21.3 bis 22.4	W	+0.27	+0.270
		W	+0.05	+0.050
		W	+0.22	+0.220
		W	+0.50	+0.500

1875, Tag	Uhrzeit	Kreislage	Neigung	Neigung, bezogen auf Kreis West
October 8	22h4 bis 22h7	O	−0.60	+0.524
von Steeb		O	−0.95	+0.174
October 9	21.0 bis 21.3	O	−0.87	+0.254
von Steeb		O	−0.97	+0.154
	21.3 bis 22.4	W	+0.32	+0.320
		W	+0.12	+0.120
		W	+0.15	+0.150
		W	+0.45	+0.450
	22.4 bis 23.5	O	−0.67	+0.454
		O	−0.82	+0.304
		O	−1.02	+0.104
		O	−1.00	+0.124
	23.5 bis 0.0	W	+0.15	+0.150
		W	+0.15	+0.150
October 19	20h9	W	−0.24	−0.240
Beobachter	21.2	W	+0.80	+0.800
Weinek	21.4	O	−0.35	+0.728
	21.7	O	−0.89	+0.188
	21.9	O	−1.04	+0.038
	22.4	O	−0.88	+0.203
	22.7	W	+0.16	+0.160
	22.9	W	−0.04	−0.040
	23.3	W	+0.63	+0.625
	23.6	O	−0.65	+0.428
	0.0	O	−1.19	−0.112
November 2	20.1	O	+1.05	+2.128
Weinek	20.9	O	+0.76	+1.838
	21.2	O	+1.39	+2.468
	21.4	W	+2.41	+2.410
	21.7	W	+1.99	+1.990
	22.3	W	+2.46	+2.460
	22.5	O	+1.54	+2.618
	22.9	O	+0.44	+1.518
	23.2	O	+1.00	+2.078
	23.6	W	+1.98	+1.975
	23.9	W	+1.96	+1.960
November 3	20.3	W	+2.08	+2.075
Weinek	20.5	W	+2.66	+2.660
	20.7	O	+1.68	+2.753
	20.9	O	+1.25	+2.328

1875, Tag	Uhrzeit	Kreislage	Neigung	Neigung, bezogen auf Kreis West
November 3	21ʰ2	O	+1ᵖ31	+2ᵖ388
Beobachter	21.4	W	+2.36	+2.360
Weinek	21.9	W	+2.11	+2.110
	22.2	W	+2.71	+2.710
	22.6	O	+1.78	+2.853
	22.9	O	+1.25	+2.328
November 4	20.1	O	+1.86	+2.938
Weinek	20.5	O	+2.06	+3.138
	20.6	W	+3.15	+3.150
	20.9	W	+3.20	+3.200
	21.2	W	+3.68	+3.675
	21.4	O	+2.59	+3.668
	21.7	O	+2.08	+3.153
	22.2	O	+2.24	+3.318
	22.6	W	+3.24	+3.240
	22.9	W	+3.10	+3.100
November 14	20ʰ3 bis 20ʰ6	W	+1.07	+1.070
Beobachter		W	+1.52	+1.520
von Steeb				
	20.6 bis 21.3	O	+0.40	+1.524
		O	−0.20	+0.924
		O	−0.17	+0.954
	21.3 bis 22.4	W	+1.05	+1.050
		W	+1.00	+1.000
		W	+0.82	+0.820
		W	+1.17	+1.170
	22.4 bis 23.5	O	−0.37	+0.754
		O	−0.67	+0.454
		O	−0.70	+0.424
		O	−0.35	+0.774
	23.5 bis 0.9	W	+0.40	+0.400
		W	+0.55	+0.550
		W	+0.92	+0.920
		W	+0.70	+0.700
		W	+1.17	+1.170
	0.0 bis 1.2	O	−0.17	+0.954
		O	−0.55	+0.574
		O	−0.35	+0.774
		O	0.00	+1.124
November 16	20ʰ4	O	+0.57	+1.694

1875, Tag	Uhrzeit	Kreislage	Neigung	Neigung, bezogen auf Kreis West
November 16 Beobachter von Steeb	20ʰ6 bis 21ʰ3	W	+0?97	+0?970
		W	+0.87	+0.870
		W	+0.95	+0.950
		W	+1.10	+1.100
	21.3 bis 22.4	O	−0.15	+0.974
		O	−0.25	+0.874
		O	−0.62	+0.504
		O	−0.65	+0.474
	22.4 bis 23.5	W	+0.47	+0.470
		W	+0.70	+0.700
		W	+0.72	+0.720
		W	+0.82	+0.820
	23.5 bis 0.9	O	−0.27	+0.854
		O	−0.75	+0.374
		O	−0.72	+0.404
		O	−0.87	+0.254
		O	−0.82	+0.304
	0.9 bis 1.8	W	+0.10	+0.100
		W	+0.47	+0.470
		W	+0.47	+0.470
		W	+0.62	+0.620
	1.8 bis 2.2	O	−0.47	+0.654
		O	−0.75	+0.374

Tabelle VIII. Ableitung der angewandten definitiven Neigungen in Wien.

1875, Tag	Mittel der Uhrzeiten	Mittel der Neigungen, bezogen auf Kreis West	Neigung reducirt wegen Zapfenungleichheit		Definitive Neigung in Zeitsecunden	
			West	Ost	West	Ost
October 8 Beobachter von Steeb	20ʰ4	+0?085	−0?196	−0?758	−0ˢ019	−0ˢ072
	20.9	+0.049	−0.232	−0.794	−0.022	−0.075
	21.8	+0.260	−0.021	−0.583	−0.002	−0.055
	22.6	+0.349	+0.068	−0.494	−0.006	−0.047
October 9 von Steeb	21.2	+0.204	−0.077	−0.639	−0.007	−0.061
	21.8	+0.260	−0.021	−0.583	−0.002	−0.055
	22.9	+0.246	−0.035	−0.597	−0.003	−0.057
	23.7	+0.150	−0.131	−0.693	−0.012	−0.066

1875, Tag	Mittel der Uhrzeiten	Mittel der Neigungen, bezogen auf Kreis West	Neigung reducirt wegen Zapfenungleichheit		Definitive Neigung in Zeitsecunden	
			West	Ost	West	Ost
October 19	21ʰ.4	+0ᵖ.303	+0ᵖ.034	−0ᵖ.505	+0ˢ.003	−0ˢ.048
Beobachter	22.7	+0.108	−0.161	−0.700	−0.015	−0.066
Weinek	23.6	+0.314	+0.045	−0.494	+0.004	−0.047
November 2	21.1	+2.167	+1.898	+1.359	+0.180	+0.129
Weinek	22.6	+2.199	+1.930	+1.391	+0.183	+0.132
	23.6	+2.004	+1.735	+1.196	+0.165	+0.114
November 3	20.6	+2.454	+2.185	+1.646	+0.208	+0.156
Weinek	21.5	+2.286	+2.017	+1.478	+0.192	+0.140
	22.6	+2.630	+2.361	+1.822	+0.224	+0.173
November 4	20.5	+3.106	+2.837	+2.298	+0.270	+0.218
Weinek	21.4	+3.499	+3.230	+2.691	+0.307	+0.256
	22.6	+3.219	+2.950	+2.411	+0.280	+0.229
November 14	20.4	+1.295	+1.014	+0.452	+0.096	+0.043
Beobachter	21.0	+1.134	+0.853	+0.291	+0.081	+0.028
von Steeb	21.8	+1.010	+0.729	+0.167	+0.069	+0.016
	22.9	+0.601	+0.320	−0.242	+0.030	−0.023
	0.2	+0.748	+0.467	−0.095	+0.044	−0.009
	1.0	+0.856	+0.575	+0.013	+0.055	+0.001
November 16	20.4	+1.694	+1.413	+0.851	+0.134	+0.081
von Steeb	20.9	+0.972	+0.691	+0.129	+0.066	+0.012
	21.8	+0.706	+0.425	−0.137	+0.040	−0.013
	22.9	+0.678	+0.397	−0.165	+0.038	−0.016
	0.2	+0.438	+0.157	−0.405	+0.015	−0.038
	1.3	+0.448	+0.167	−0.395	+0.016	−0.037
	2.0	+0.514	+0.233	−0.329	+0.022	−0.031

b. *Die Collimation.*

Die zur Ableitung der Collimationsfehler angewandte Formel ist schon bei dem Leipziger Instrument gegeben. Die Variation beträgt in 21.4 Stunden gerade Null und verschwindet daher absolut.

Der wahrscheinliche Fehler einer Collimation beträgt

$$\pm 0^s.015 \; ,$$

der eines aus drei Werthen bestehenden Tagesmittels

$$\pm 0^s.009 \; .$$

Die erhaltenen Werthe der Collimation sind in Tabelle IX enthalten.

c. *Das Azimut.*

Die Azimute für das Wiener Instrument sind genau in derselben Weise abgeleitet, wie bei dem Leipziger Instrument und befinden sich die dazu gehörigen Daten in Tabelle X. Auch hier ist ein Gang im Azimut nicht vorhanden, denn die Veränderung findet sich

Polstern	F	—	Polstern	K	im	Durchschnitt	$-0^s.044$,
»	L	—	»	F	»	»	$+0.004$,
»	M	—	»	L	»	»	$+0.042$,
»	A	—	»	M	»	»	0.000 ,

also theils positiv, theils negativ und im Durchschnitt fast Null. Es ist aus den an jedem Abend erhaltenen Azimuten daher das Mittel genommen und bei der Reduction der Beobachtungen angewandt.

Betrachtet man die Abweichungen als zufällige Fehler, so findet sich der wahrscheinliche Fehler einer Azimutbestimmung zu

$$\pm 0^s.033 \; ,$$

der eines Tagesmittels aus drei Einzelwerthen, welche meist vorhanden sind, zu

$$\pm 0^s.02 \; .$$

Tabelle IX. Ableitung der

1875, Tag	Stern	Durchgangszeit Kreis West	Correction für i	Durchgangszeit Kreis Ost
October 8	K (O. C.)	$20^h 35^m 12^s.40$	$-0^s.11$	$20^h 35^m 12^s.32$
	F (U. C.)	21 19 36.38	0.00	21 19 36.53
	L (O. C.)	22 23 39.96	0.00	22 23 39.93
October 9	F (U. C.)	21 39 34.74	0.00	21 19 34.74
	L (O. C.)	22 23 37.88	0.00	22 23 38.23
	M (O. C.)	23 28 42.56	−0.13	23 28 41.57
October 19	F (U. C.)	21 19 21.42	−0.01	21 19 23.48
	L (O. C.)	22 23 25.07	−0.15	22 23 21.52
	M (O. C.)	23 28 28.62	+0.05	23 28 24.73
November 2	F (U. C.)	21 19 12.99	−0.82	21 19 13.82
	L (O. C.)	22 23 7.17	+1.85	22 23 5.11
	M (O. C.)	23 28 11.95	+2.20	23 28 9.52
November 3	K (O. C.)	20 34 45.26	+1.12	20 34 44.06
	F (U. C.)	21 19 17.72	−0.87	21 19 18.57
	L (O. C.)	22 23 11.83	+2.27	22 23 10.08
November 4	K (O. C.)	20 34 50.16	+1.45	20 34 49.12
	F (U. C.)	21 19 24.00	−1.40	21 19 24.93
	L (O. C.)	22 23 16.34	+2.83	22 23 15.34
November 14	K (O. C.)	20 35 22.55	+0.54	20 35 21.79
	F (U. C.)	21 19 56.34	−0.32	21 19 57.49
	L (O. C.)	22 23 49.24	+0.71	22 23 47.06
	M (O. C.)	23 28 53.92	+0.53	23 28 51.32
	A (O. C.)	0 53 10.63	+0.41	0 53 8.99
November 16	K (O. C.)	20 34 22.20	+0.38	20 34 21.88
	F (U. C.)	21 18 56.38	−0.32	21 18 57.59
	L (O. C.)	22 22 48.79	+0.40	22 22 46.66
	M (O. C.)	23 27 52.46	+0.53	23 27 50.15
	A (O. C.)	0 52 11.45	+0.10	0 52 9.37
	G (U. C.)	1 45 29.68	−0.06	1 45 31.16

Tabelle X. Ableitung des

1875, Tag	Polstern	T' Durchgangszeit corrigirt wegen i und c	α
October 8	K (O. C.)	$20^h 35^m 11^s.99$	$20^h 34^m 36^s.15$
	F (U. C.)	21 19 36.74	21 19 10.97
	L (O. C.)	22 23 39.50	22 22 59.53

Collimation in Wien.

Correction für i	Durchgangszeiten corrigirt für i Kreis West	Kreis Ost	Durchgangszeit West — Ost	Collimationsfehler	Angewandtes Tagesmittel c_w
−0ˢ43	12ˢ29	11ˢ89	+0ˢ40	−0ˢ03	
+0.36	36.38	36.89	−0.51	−0.04	−0ˢ03
−0.54	39.96	39.42	+0.54	−0.02	
+0.27	34.74	35.01	−0.27	−0.02	
−0.61	37.88	37.62	+0.26	−0.01	−0.03
−0.80	42.43	40.77	+1.66	−0.05	
+0.22	21.41	23.70	−2.29	−0.16	
−0.67	24.92	20.85	+4.07	−0.16	−0.15
−0.63	28.67	24.10	+4.57	−0.13	
−0.59	12.17	13.23	−1.06	−0.08	
+1.34	9.02	6.45	+2.57	−0.10	−0.09
+1.52	14.14	11.04	+3.10	−0.09	
+0.84	46.38	44.90	+1.48	−0.12	
−0.64	16.85	17.93	−1.08	−0.08	−0.10
+1.75	14.10	11.83	+2.27	−0.09	
+1.17	51.61	50.29	+1.32	−0.10	
−1.17	22.60	23.76	−1.16	−0.08	−0.08
+2.32	19.17	17.66	+1.51	−0.06	
+0.16	23.09	21.95	+1.14	−0.09	
−0.14	56.02	57.35	−1.33	−0.09	
−0.20	49.95	46.86	+3.09	−0.12	−0.10
−0.27	54.45	51.05	+3.40	−0.10	
0.00	11.04	8.99	+2.05	−0.08	
+0.43	22.58	22.31	+0.27	−0.02	
+0.05	56.06	57.64	−1.58	−0.11	
−0.10	49.19	46.56	+2.63	−0.10	
−0.53	52.99	49.62	+3.37	−0.10	−0.09
−0.41	11.55	8.96	+2.59	−0.10	
+0.17	29.62	31.33	−1.71	−0.10	

Azimutes in Wien.

$\alpha - T'$	Δt für die Culminationszeit des Polsterns	$\alpha - T' - \Delta t$	Azimut k	Tagesmittel
−35ˢ84	−31ˢ83	−4ˢ01	+1ˢ16	
−25.77	−31.80	+6.03	+1.11	+1ˢ11
−39.97	−31.75	−8.22	+1.07	

1875, Tag	Polstern	T′ Durchgangszeit corrigirt wegen i und c	α
October 9	F (U. C.)	21h 19m 34s.98	21h 19m 11s.13
	L (O. C.)	22 23 37.56	22 22 59.31
	M (O. C.)	23 28 41.35	23 27 58.97
October 19	F (U. C.)	21 19 22.66	21 19 12.68
	L (O. C.)	22 23 22.72	22 22 57.35
	M (O. C.)	23 28 26.15	23 27 57.37
November 2	F (U. C.)	21 19 12.84	21 19 15.10
	L (O. C.)	22 23 7.65	22 22 54.04
	M (O. C.)	23 28 12.41	23 27 54.18
November 3	K (O. C.)	20 34 45.60	20 34 32.31
	F (U. C.)	21 19 17.54	21 19 15.30
	L (O. C.)	22 23 12.84	22 22 53.76
November 4	K (O. C.)	20 34 50.91	20 34 32.15
	F (U. C.)	21 19 23.33	21 19 15.50
	L (O. C.)	22 23 18.28	22 22 53.48
November 14	K (O. C.)	20 35 22.46	20 34 30.67
	F (U. C.)	21 19 56.76	21 19 17.26
	L (O. C.)	22 23 48.28	22 22 50.84
	M (O. C.)	23 28 52.58	23 27 50.77
	A (O. C.)	0 53 9.89	0 52 12.38
November 16	K (O. C.)	20 34 22.39	20 34 30.37
	F (U. C.)	21 18 56.92	21 19 17.67
	L (O. C.)	22 22 47.75	22 22 50.28
	M (O. C.)	23 27 51.14	23 27 50.17
	A (O. C.)	0 52 10.13	0 52 12.13
	G (U. C.)	1 45 30.56	1 45 52.41

V. Ermittelung der Uhrdifferenzen.

Es ist schon erwähnt, dass zur Vergleichung der Uhren unter einander an beiden Stationen eine Anzahl von Signalen gegeben wurden, die registrirt sind. Nach der gegenseitigen Verständigung an jedem Abend folgten zunächst etliche Probesignale, darauf zwei Serien von Signalen in Intervallen von etwa 1s.5 und sind von jeder Serie auf jeder Station nur 32 gute Signale abgelesen und dieselben in zwei Gruppen getheilt; im Ganzen sind jeden Abend vor und nach den Zeitbestimmungen von beiden Stationen zusammen 256 Signale

$\alpha - T'$	Δt für die Culminationszeit des Polsterns	$\alpha - T' - \Delta t$	Azimut k	Tagesmittel
$-23^s.85$	$-30^s.00$	$+6^s.15$	$+1^s.14$	
-37.25	-29.91	-8.34	$+1.09$	$+1^s.14$
-42.38	-29.80	-12.58	$+1.19$	
-9.98	-16.13	$+6.15$	$+1.14$	
-25.37	-16.05	-9.32	$+1.21$	$+1.19$
-28.78	-15.94	-12.84	$+1.22$	
$+2.26$	-4.15	$+6.41$	$+1.18$	
-13.61	-4.41	-9.20	$+1.20$	$+1.23$
-18.23	-4.56	-13.67	$+1.29$	
-13.29	-8.99	-4.30	$+1.24$	
-2.24	-9.24	$+7.00$	$+1.29$	$+1.26$
-19.08	-9.52	-9.56	$+1.25$	
-18.76	-14.23	-4.53	$+1.31$	
-7.83	-14.45	$+6.62$	$+1.22$	$+1.28$
-24.80	-14.71	-10.09	$+1.31$	
-51.79	-46.96	-4.83	$+1.39$	
-39.50	-46.98	$+7.48$	$+1.38$	
-57.44	-46.96	-10.48	$+1.36$	$+1.38$
-61.81	-46.94	-14.93	$+1.41$	
-57.51	-46.96	-10.55	$+1.34$	
$+7.98$	$+13.21$	-5.23	$+1.51$	
$+20.75$	$+13.24$	$+7.51$	$+1.39$	
$+2.53$	$+13.21$	-10.68	$+1.39$	
-0.97	$+13.24$	-14.21	$+1.35$	$+1.40$
$+2.00$	$+13.18$	-11.18	$+1.42$	
$+21.85$	$+13.22$	$+8.63$	$+1.33$	

abgelesen und benutzt. Dieselben sind für jeden Beobachtungsabend in den folgenden Tabellen XI bis XXVI in der ersten und zweiten, vierten und fünften, siebenten und achten, zehnten und elften Columne enthalten, während in der dritten, sechsten, neunten und zwölften Columne gleich die Differenzen und am Schlusse jeder Tabelle die Mittelwerthe angegeben sind. Die Federnparallaxe ist bei den Signalen noch nicht angebracht.

Zeichenwechsel

Tabelle XI. 1875 October 8.

Zeichen gegeben von Wien			Zeichen gegeben von Leipzig		
Chronograph		Differenz	Chronograph		Differenz
Wien	Leipzig		Wien	Leipzig	
$20^h 15^m 11^s.69$	$20^h 1^m 9^s.45$	$14^m 2^s.24$	$20^h 12^m 9^s.26$	$19^h 58^m 6^s.91$	$14^m 2^s.35$
13.18	10.90	2.28	10.35	7.99	2.36
14.78	12.51	2.27	12.21	9.88	2.33
16.32	14.09	2.23	13.55	11.19	2.36
17.79	15.55	2.24	14.58	12.21	2.37
19.22	16.98	2.24	16.52	14.19	2.33
20.77	18.52	2.25	18.36	16.01	2.35
22.29	20.03	2.26	19.55	17.20	2.35
23.91	21.67	2.24	21.22	18.87	2.35
25.50	23.23	2.27	22.92	20.58	2.34
27.02	24.75	2.27	24.62	22.28	2.34
28.46	26.20	2.26	25.52	23.14	2.38
29.92	27.64	2.28	27.90	25.56	2.34
31.40	29.15	2.25	29.25	26.89	2.36
32.90	30.64	2.26	30.25	27.90	2.35
20 15 34.56	20 1 32.28	14 2.28	20 12 32.31	19 58 29.96	14 2.35
$20^h 15^m.4$	$20^h 1^m.3$	$14^m 2^s.257$	$20^h 12^m.3$	$19^h 58^m.3$	$14^m 2^s.351$

Tabelle XII. 1875 October 8.

$23^h 18^m 1^s.55$	$23^h 3^m 59^s.65$	$14^m 1^s.90$	$23^h 15^m 3^s.05$	$23^h 1^m 1^s.06$	$14^m 1^s.99$
2.82	4 0.91	1.91	4.08	2.08	2.00
4.16	2.24	1.92	5.12	3.11	2.01
5.38	3.44	1.94	6.11	4.10	2.01
6.64	4.70	1.94	7.06	5.05	2.01
7.87	5.96	1.91	9.15	7.13	2.02
9.12	7.16	1.96	10.12	8.11	2.01
10.34	8.39	1.95	11.48	9.49	1.99
11.53	9.61	1.92	12.61	10.61	2.00
12.72	10.79	1.93	14.26	12.25	2.01
13.92	12.02	1.90	16.03	14.05	1.98
15.12	13.19	1.93	16.86	14.88	1.98
16.34	14.41	1.93	18.61	16.61	2.00
17.50	15.56	1.94	20.27	18.30	1.97
18.65	16.73	1.92	21.86	19.89	1.97
23 18 19.85	23 4 17.95	14 1.90	23 15 22.47	23 1 20.49	14 1.98
$23^h 18^m.2$	$23^h 4^m.1$	$14^m 1^s.925$	$23^h 15^m.2$	$23^h 1^m.2$	$14^m 1^s.996$

Wien-Leipzig.

Erster Zeichenwechsel.

Zeichen gegeben von Leipzig			Zeichen gegeben von Wien		
Chronograph Wien	Chronograph Leipzig	Differenz	Chronograph Wien	Chronograph Leipzig	Differenz
$20^h 12^m 36^s.99$	$19^h 58^m 34^s.66$	$14^m 2^s.33$	$20^h 15^m 43^s.17$	$20^h 1^m 40^s.93$	$14^m 2^s.24$
38.36	36.01	2.35	44.54	42.29	2.25
39.52	37.17	2.35	46.00	43.75	2.25
41.10	38.76	2.34	47.33	45.05	2.28
42.52	40.16	2.36	48.69	46.44	2.25
44.82	42.46	2.36	49.97	47.71	2.26
45.78	43.41	2.37	51.37	49.10	2.27
47.22	44.86	2.36	52.82	50.56	2.26
48.90	46.56	2.34	54.27	51.99	2.28
51.00	48.65	2.35	55.60	53.34	2.26
53.16	50.81	2.35	56.96	54.71	2.25
54.41	52.05	2.36	58.33	56.09	2.24
56.44	54.12	2.32	15 59.78	57.55	2.23
59.04	56.72	2.32	16 1.22	1 58.97	2.25
59.90	57.59	2.31	2.60	2 0.34	2.26
20 13 1.86	19 58 59.54	14 2.32	20 16 4.03	20 2 1.79	14 2.24
$20^h 12^m.8$	$19^h 58^m.75$	$14^m 2^s.343$	$20^h 15^m.9$	$20^h 1^m.85$	$14^m 2^s.254$

Zweiter Zeichenwechsel.

$23^h 15^m 53^s.18$	$23^h 1^m 51^s.18$	$14^m 2^s.00$	$23^h 18^m 39^s.93$	$23^h 4^m 38^s.03$	$14^m 1^s.90$
54.71	52.72	1.99	41.10	39.16	1.94
56.98	54.96	2.02	42.22	40.29	1.93
15 58.35	56.34	2.01	43.26	41.35	1.91
16 0.53	58.55	1.98	44.35	42.44	1.91
1.35	1 59.37	1.98	45.48	43.54	1.94
3.09	2 1.12	1.97	46.54	44.59	1.95
5.35	3.35	2.00	47.65	45.72	1.93
6.20	4.21	1.99	48.69	46.74	1.95
7.55	5.59	1.96	49.73	47.77	1.96
9.34	7.34	2.00	50.85	48.91	1.94
10.83	8.83	2.00	51.94	50.01	1.93
11.54	9.56	1.98	52.96	51.00	1.96
13.22	11.21	2.01	54.07	52.10	1.97
15.66	13.67	1.99	55.16	53.21	1.95
23 16 16.53	23 2 14.55	14 1.98	23 18 56.28	23 4 54.32	14 1.96
$23^h 16^m.1$	$23^h 2^m.1$	$14^m 1^s.991$	$23^h 18^m.8$	$23^h 4^m.8$	$14^m 1^s.939$

Tabelle XIII. 1875 October 9.

Zeichen gegeben von Wien: Chronograph Wien	Chronograph Leipzig	Differenz	Zeichen gegeben von Leipzig: Chronograph Wien	Chronograph Leipzig	Differenz
20h 23m 1s85	20h 9m 2s49	13m 59s36	20h 20m 0s66	20h 6m 1s12	13m 59s54
3.28	4.00	59.28	1.65	2.12	59.53
4.71	5.36	59.35	2.66	3.10	59.56
5.95	6.59	59.36	3.63	4.08	59.55
7.27	7.93	59.34	4.65	5.10	59.55
8.58	9.23	59.35	6.72	7.16	59.56
9.84	10.57	59.27	7.74	8.20	59.54
11.13	11.85	59.28	9.87	10.34	59.53
12.35	12.94	59.41	11.03	11.48	59.55
13.63	14.31	59.32	12.88	13.36	59.52
14.90	15.59	59.31	14.08	14.54	59.54
16.18	16.88	59.30	15.88	16.34	59.54
17.48	18.11	59.37	16.68	17.11	59.57
22.36	22.99	59.37	18.03	18.48	59.55
23.55	24.19	59.36	19.97	20.45	59.52
20 23 25.90	20 9 26.55	13 59.35	20 20 21.13	20 6 21.60	13 59.53
20h 23m.2	20h 9m.2	13m 59s336	20h 20m.2	20h 6m.2	13m 59s542

Tabelle XIV. 1875 October 9.

0h 27m 11s62	0h 13m 12s61	13m 59s01	0h 24m 20s23	0h 10m 21s14	13m 59s09
13.02	14.04	58.98	21.21	22.15	59.06
14.30	15.27	59.03	22.23	23.12	59.11
15.54	16.51	59.03	23.22	24.12	59.10
16.81	17.81	59.00	24.25	25.15	59.10
17.93	18.95	58.98	26.52	27.43	59.09
19.19	20.15	59.04	27.31	28.20	59.11
20.39	21.38	59.01	29.00	29.93	59.07
21.56	22.55	59.01	30.41	31.30	59.11
22.76	23.74	59.02	32.08	32.98	59.10
23.90	24.91	58.99	33.33	34.25	59.08
25.13	26.12	59.01	34.78	35.68	59.10
26.27	27.23	59.04	35.77	36.66	59.11
27.42	28.39	59.03	37.67	38.59	59.08
28.60	29.59	59.01	38.62	39.53	59.09
0 27 29.77	0 13 30.78	13 58.99	0 24 40.53	0 10 41.45	13 59.08
0h 27m.3	0h 13m.35	13m 59s011	0h 24m.5	0h 10m.5	13m 59s092

Erster Zeichenwechsel.

Zeichen gegeben von Leipzig			Zeichen gegeben von Wien		
Chronograph		Differenz	Chronograph		Differenz
Wien	Leipzig		Wien	Leipzig	
$20^h 20^m 26^s.12$	$20^h 6^m 26^s.57$	$13^m 59^s.55$	$20^h 23^m 29^s.45$	$20^h 9^m 30^s.19$	$13^m 59^s.26$
28.08	28.53	59.55	30.58	31.30	59.28
29.92	30.39	59.53	31.79	32.49	59.30
30.84	31.28	59.56	34.07	34.74	59.33
32.23	32.66	59.57	35.17	35.84	59.33
34.10	34.58	59.52	37.50	38.18	59.32
35.47	35.92	59.55	38.64	39.25	59.39
36.95	37.41	59.54	40.88	41.60	59.28
38.41	38.86	59.55	46.62	47.34	59.28
39.11	39.56	59.55	50.07	50.76	59.31
40.44	40.91	59.53	54.59	55.24	59.35
41.67	42.14	59.53	55.72	56.41	59.31
43.53	43.99	59.54	23 59.06	9 59.80	59.26
45.18	45.66	59.52	24 1.37	10 2.10	59.27
46.06	46.51	59.55	2.52	3.19	59.33
20 20 47.93	20 6 48.38	13 59.55	20 24 8.52	20 10 9.19	13 59.33
$20^h 20^m.6$	$20^h 6^m.6$	$13^m 59^s.543$	$20^h 23^m.7$	$20^h 9^m.7$	$13^m 59^s.308$

Zweiter Zeichenwechsel.

$0^h 24^m 49^s.24$	$0^h 10^m 50^s.16$	$13^m 59^s.08$	$0^h 27^m 35^s.68$	$0^h 13^m 36^s.66$	$13^m 59^s.02$
50.62	51.51	59.11	36.83	37.84	58.99
52.10	53.01	59.09	37.90	38.89	59.01
53.43	54.35	59.08	38.99	39.94	59.05
55.36	56.27	59.09	40.15	41.13	59.02
56.58	57.51	59.07	41.21	42.21	59.00
57.76	10 58.70	59.06	42.30	43.26	59.04
24 59.51	11 0.40	59.11	43.39	44.38	59.01
25 0.92	1.85	59.07	44.61	45.60	59.01
1.76	2.68	59.08	45.72	46.71	59.01
3.62	4.53	59.09	46.81	47.79	59.02
4.90	5.85	59.05	47.91	48.91	59.00
6.39	7.30	59.09	49.05	50.05	59.00
7.55	8.45	59.10	50.23	51.19	59.04
9.51	10.44	59.07	51.31	52.30	59.01
0 25 10.51	0 11 11.42	13 59.09	0 27 52.43	0 13 53.44	13 58.99
$0^h 25^m.0$	$0^h 11^m.0$	$13^m 59^s.083$	$0^h 27^m.7$	$0^h 13^m.7$	$13^m 59^s.014$

Tabelle XV. 1875 October 19.

Zeichen gegeben von Wien			Zeichen gegeben von Leipzig		
Chronograph		Differenz	Chronograph		Differenz
Wien	Leipzig		Wien	Leipzig	
20h 22m 41s.24	20h 9m 8s.37	13m 32s.87	20h 25m 4s.43	20h 11m 31s.50	13m 32s.93
42.74	9.87	32.87	5.88	32.92	32.96
43.74	10.88	32.86	7.16	34.21	32.95
45.17	12.27	32.90	8.48	35.50	32.98
47.01	14.15	32.86	9.87	36.90	32.97
47.84	14.98	32.86	11.17	38.23	32.94
49.66	16.78	32.88	12.37	39.41	32.96
51.97	19.11	32.86	13.60	40.63	32.97
53.01	20.12	32.89	14.72	41.78	32.94
54.79	21.91	32.88	15.88	42.92	32.96
55.97	23.11	32.86	16.97	44.00	32.97
57.18	24.30	32.88	18.14	45.20	32.94
22 58.96	26.09	32.87	19.28	46.35	32.93
23 0.56	27.68	32.88	20.44	47.47	32.97
1.99	29.15	32.84	21.54	48.59	32.95
20 23 3.06	20 9 30.22	13 32.84	20 25 22.66	20 11 49.72	13 32.94
20h 22m.9	20h 9m.3	13m 32s.869	20h 25m.2	20h 11m.7	13m 32s.954

Tabelle XVI. 1875 October 19.

0h 27m 12s.03	0h 13m 39s.52	13m 32s.51	0h 29m 34s.00	0h 16m 1s.45	13m 32s.55
13.03	40.53	32.50	35.25	2.69	32.56
14.40	41.91	32.49	36.46	3.87	32.59
16.13	43.63	32.50	37.66	5.13	32.53
17.90	45.44	32.46	38.87	6.34	32.53
20.06	47.59	32.47	40.11	7.54	32.57
21.01	48.52	32.49	41.32	8.77	32.55
22.49	50.06	32.43	42.58	10.06	32.52
24.34	51.85	32.49	43.74	11.26	32.48
25.81	53.33	32.48	45.01	12.47	32.54
27.94	55.44	32.50	46.20	13.65	32.55
28.70	56.21	32.49	47.42	14.90	32.52
30.01	57.55	32.46	48.61	16.05	32.56
31.32	13 58.85	32.47	49.73	17.17	32.56
32.68	14 0.18	32.50	50.89	18.35	32.54
0 27 34.01	0 14 1.53	13 32.48	0 29 51.93	0 16 19.38	13 32.55
0h 27m.4	0h 13m.85	13m 32s.483	0h 29m.7	0h 16m.2	13m 32s.544

Erster Zeichenwechsel.

Zeichen gegeben von Leipzig			Zeichen gegeben von Wien		
Chronograph		Differenz	Chronograph		Differenz
Wien	Leipzig		Wien	Leipzig	
$20^{h}25^{m}28^{s}.35$	$20^{h}11^{m}55^{s}.38$	$13^{m}32^{s}.97$	$20^{h}23^{m}\ 9^{s}.07$	$20^{h}9^{m}36^{s}.19$	$13^{m}32^{s}.88$
29.52	56.55	32.97	10.40	37.51	32.89
30.62	57.66	32.96	12.40	39.51	32.89
31.73	58.79	32.94	13.80	40.93	32.87
32.95	11 59.97	32.98	14.86	41.97	32.89
34.14	12 1.18	32.96	16.58	43.66	32.92
35.43	2.49	32.94	17.90	45.02	32.88
36.60	3.62	32.98	19.18	46.32	32.86
37.74	4.80	32.94	20.49	47.61	32.88
38.92	5.96	32.96	21.56	48.69	32.87
40.10	7.11	32.99	23.01	51.16	32.85
41.14	8.18	32.96	24.89	51.97	32.92
42.38	9.43	32.95	27.19	54.32	32.87
43.55	10.62	32.93	28.73	55.82	32.91
44.76	11.80	32.96	30.20	57.34	32.88
20 25 45.93	20 12 12.97	13 32.96	20 23 32.29	20 9 59.40	13 32.89
$20^{h}25^{m}.6$	$20^{h}12^{m}.2$	$13^{m}32^{s}.959$	$20^{h}23^{m}.3$	$20^{h}9^{m}.8$	$13^{m}32^{s}.883$

Zweiter Zeichenwechsel.

$0^{h}29^{m}56^{s}.46$	$0^{h}16^{m}23^{s}.89$	$13^{m}32^{s}.57$	$0^{h}27^{m}40^{s}.12$	$0^{h}14^{m}\ 7^{s}.61$	$13^{m}32^{s}.51$
57.60	25.05	32.55	42.56	10.10	32.46
58.71	26.18	32.53	43.77	11.32	32.45
29 59.84	27.28	32.56	45.13	12.65	32.48
30 0.93	28.37	32.56	46.58	14.10	32.48
2.05	29.50	32.55	47.71	15.22	32.49
3.14	30.61	32.53	49.34	16.84	32.50
4.25	31.70	32.55	51.52	19.02	32.50
5.33	32.78	32.55	52.89	20.40	32.49
6.44	33.91	32.53	54.73	22.28	32.45
7.49	34.95	32.54	55.93	23.44	32.49
8.57	36.01	32.56	57.24	24.78	32.46
9.67	37.11	32.56	27 59.00	26.51	32.49
10.75	38.19	32.56	28 1.41	28.94	32.47
11.81	39.26	32.55	2.94	30.49	32.45
0 30 12.93	0 16 40.36	13 32.57	0 28 4.68	0 14 32.19	13 32.49
$0^{h}30^{m}.1$	$0^{h}16^{m}.5$	$13^{m}32^{s}.551$	$0^{h}27^{m}.85$	$0^{h}14^{m}.3$	$13^{m}32^{s}.479$

Tabelle XVII. 1875 November 2.

Zeichen gegeben von Wien: Chronograph Wien	Chronograph Leipzig	Differenz	Zeichen gegeben von Leipzig: Chronograph Wien	Chronograph Leipzig	Differenz
20ʰ 26ᵐ 28ˢ.04	20ʰ 13ᵐ 24ˢ.57	13ᵐ 3ˢ.47	20ʰ 28ᵐ 3ˢ.68	20ʰ 15ᵐ 0ˢ.13	13ᵐ 3ˢ.55
29.75	26.29	3.46	4.95	1.42	3.53
31.12	27.64	3.48	6.18	2.66	3.52
32.29	28.82	3.47	7.44	3.88	3.56
33.89	30.43	3.46	8.59	5.06	3.53
35.10	31.62	3.48	9.77	6.28	3.49
36.66	33.20	3.46	10.91	7.39	3.52
38.65	35.20	3.45	12.10	8.57	3.53
40.26	36.80	3.46	13.33	9.81	3.52
41.85	38.40	3.45	14.52	10.98	3.54
43.19	39.71	3.48	15.68	12.12	3.56
44.85	41.40	3.45	16.78	13.25	3.53
46.67	43.20	3.47	17.92	14.39	3.53
47.62	44.15	3.47	19.15	15.59	3.56
49.47	46.02	3.45	20.30	16.76	3.54
20 26 52.28	20 13 48.81	13 3.47	20 28 21.50	20 15 17.97	13 3.53
20ʰ 26ᵐ.6	20ʰ 13ᵐ.6	13ᵐ 3ˢ.464	20ʰ 28ᵐ.2	20ʰ 15ᵐ.1	13ᵐ 3ˢ.534

Tabelle XVIII. 1875 November 2.

0ʰ 33ᵐ 47ˢ.06	0ʰ 20ᵐ 42ˢ.84	13ᵐ 4ˢ.22	0ʰ 35ᵐ 15ˢ.78	0ʰ 22ᵐ 11ˢ.49	13ᵐ 4ˢ.29
48.83	44.61	4.22	17.13	12.85	4.28
50.03	45.81	4.22	18.41	14.15	4.26
52.44	48.22	4.22	19.74	15.44	4.30
53.86	49.66	4.20	21.04	16.76	4.28
55.44	51.19	4.25	22.49	18.21	4.28
57.85	53.65	4.20	23.80	19.52	4.28
33 59.61	55.38	4.23	25.08	20.80	4.28
34 1.53	57.33	4.20	26.40	22.14	4.26
3.87	20 59.64	4.23	29.11	24.83	4.28
5.37	21 1.13	4.24	30.36	26.07	4.29
7.26	3.04	4.22	31.65	27.36	4.29
9.10	4.87	4.23	33.05	28.74	4.31
10.80	6.59	4.21	34.32	30.05	4.27
12.68	8.44	4.24	35.65	31.37	4.28
0 34 14.05	0 21 9.82	13 4.23	0 35 37.07	0 22 32.78	13 4.29
0ʰ 34ᵐ.0	0ʰ 21ᵐ.0	13ᵐ 4ˢ.223	0ʰ 35ᵐ.4	0ʰ 22ᵐ.35	13ᵐ 4ˢ.283

Erster Zeichenwechsel.

Zeichen gegeben von Leipzig			Zeichen gegeben von Wien		
Chronograph		Differenz	Chronograph		Differenz
Wien	Leipzig		Wien	Leipzig	
$20^h 28^m 27^s.31$	$20^h 15^m 23^s.77$	$13^m 3^s.54$	$20^h 26^m 54^s.35$	$20^h 13^m 50^s.89$	$13^m 3^s.46$
28.50	24.96	3.54	56.04	52.55	3.49
29.75	26.25	3.50	56.95	53.48	3.47
30.89	27.38	3.51	26 58.74	55.27	3.47
32.09	28.57	3.52	27 1.07	57.60	3.47
33.21	29.68	3.53	2.39	13 58.93	3.46
34.42	30.87	3.55	3.73	14 0.25	3.48
35.65	32.10	3.55	5.16	1.69	3.47
36.83	33.30	3.53	6.67	3.20	3.47
37.99	34.48	3.51	8.83	5.36	3.47
39.18	35.64	3.54	10.66	7.21	3.45
40.34	36.81	3.53	12.13	8.64	3.49
41.56	38.05	3.51	14.36	10.91	3.45
42.70	39.16	3.54	15.92	12.46	3.46
43.80	40.27	3.53	17.10	13.62	3.48
20 28 44.97	20 15 41.45	13 3.52	20 27 19.05	20 14 15.54	12 3.51
$20^h 28^m.6$	$20^h 15^m.5$	$13^m 3^s.528$	$20^h 27^m.1$	$20^h 14^m.0$	$13^m 3^s.472$

Zweiter Zeichenwechsel.

$0^h 35^m 38^s.34$	$0^h 22^m 34^s.08$	$13^m 4^s.26$	$0^h 37^m 21^s.92$	$0^h 24^m 17^s.70$	$13^m 4^s.22$
39.73	35.45	4.28	24.05	19.82	4.23
41.18	36.90	4.28	25.84	21.60	4.24
42.41	38.13	4.28	28.36	24.14	4.22
43.72	39.43	4.29	29.80	25.58	4.22
44.95	40.66	4.29	32.93	28.69	4.24
46.30	42.03	4.27	34.30	30.11	4.19
47.62	43.33	4.29	36.94	32.71	4.23
49.01	44.73	4.28	38.50	34.30	4.20
50.35	46.08	4.27	40.25	36.02	4.23
51.67	47.38	4.29	42.77	38.56	4.21
52.99	48.71	4.28	44.70	40.46	4.24
54.25	49.95	4.30	46.78	42.58	4.20
55.66	51.36	4.30	47.96	43.72	4.24
56.97	52.67	4.30	49.78	45.58	4.20
0 35 58.33	0 22 54.05	13 4.28	0 37 52.06	0 24 47.80	13 4.26
$0^h 35^m.8$	$0^h 22^m.7$	$13^m 4^s.284$	$0^h 37^m.6$	$0^h 24^m.6$	$13^m 4^s.223$

Tabelle XIX. 1875 November 3.

Zeichen gegeben von Wien: Chronograph Wien	Chronograph Leipzig	Differenz	Zeichen gegeben von Leipzig: Chronograph Wien	Chronograph Leipzig	Differenz
$20^h 10^m 32^s.33$	$19^h 57^m 24^s.57$	$13^m 7^s.76$	$20^h 12^m 9^s.13$	$19^h 59^m 1^s.31$	$13^m 7^s.82$
34.27	26.51	7.76	10.43	2.60	7.83
36.35	28.61	7.74	11.65	3.82	7.83
38.16	30.43	7.73	12.85	5.03	7.82
39.24	31.51	7.73	13.98	6.18	7.80
41.03	33.32	7.71	15.11	7.28	7.83
42.67	34.95	7.72	16.30	8.45	7.85
44.22	36.47	7.75	17.43	9.60	7.83
45.78	38.05	7.73	18.59	10.77	7.82
47.15	39.42	7.73	19.74	11.90	7.84
48.92	41.17	7.75	20.83	13.01	7 82
51.12	43.38	7.74	21.91	14.11	7.80
53.01	45.26	7.75	22.91	15.08	7.83
54.86	37.14	7.72	25.24	17.43	7.81
57.01	49.28	7.73	26.39	18.58	7.81
20 10 58.12	19 57 50.39	13 7.73	20 12 27.42	19 59 19.61	13 7.81
$20^h 10^m.7$	$19^h 57^m.6$	$13^m 7^s.736$	$20^h 12^m.3$	$19^h 59^m.2$	$13^m 7^s.822$

Tabelle XX. 1875 November 3.

$23^h 53^m 2^s.08$	$23^h 39^m 53^s.67$	$13^m 8^s.41$	$23^h 54^m 49^s.92$	$23^h 41^m 41^s.43$	$13^m 8^s.49$
3.84	55.42	8.42	51.16	42.68	8.48
5.50	57.07	8.43	52.16	43.66	8.50
7.96	39 59.52	8.44	53.10	44.58	8.52
9.00	40 0.54	8.46	54.15	45.65	8.50
10.46	2.07	8.39	55.11	46.61	8.50
12.39	3.95	8.44	56.04	47.54	8.50
14.93	6.52	8.41	56.95	48.45	8.50
16.78	8.35	8.43	57.92	49.44	8.48
18.31	9.91	8.40	54 59.07	50.58	8.49
20.12	11.70	8.42	55 0.54	52.04	8.50
22.13	13.71	8.42	1.91	53.41	8.50
23.10	14.67	8.43	3.31	54.83	8.48
24.41	15.96	8.45	4.88	56.38	8.50
26.97	18.55	8.42	6.24	57.74	8.50
23 53 29.00	23 40 20.56	13 8.44	23 55 7.85	23 41 59.34	13 8.51
$23^h 53^m.25$	$23^h 40^m.1$	$13^m 8^s.426$	$23^h 54^m.9$	$23^h 41^m.8$	$13^m 8^s.497$

Erster Zeichenwechsel.

Zeichen gegeben von Leipzig			Zeichen gegeben von Wien		
Chronograph		Differenz	Chronograph		Differenz
Wien	Leipzig		Wien	Leipzig	
20h 12m 30s.69	19h 59m 22s.88	13m 7s.81	20h 11m 4s.77	19h 57m 57s.02	13m 7s.75
33.07	25.25	7.82	6.38	57 58.66	7.72
34.20	26.38	7.82	8.35	58 0.60	7.75
36.66	28.84	7.82	10.11	2.39	7.72
37.86	30.05	7.81	11.10	3.36	7.74
38.94	31.15	7.79	12.54	4.78	7.76
40.11	32.30	7.81	14.34	6.61	7.73
41.31	33.52	7.79	15.45	7.70	7.75
42.32	34.52	7.80	17.09	9.36	7.73
43.44	35.60	7.84	19.02	11.28	7.74
44.51	36.68	7.83	20.15	12.41	7.74
45.36	37.56	7.80	21.63	13.92	7.71
46.53	38.72	7.81	23.07	15.34	7.73
47.68	39.84	7.84	24.63	16.87	7.76
48.87	41.07	7.80	25.60	17.86	7.74
20 12 50.11	19 59 42.33	13 7.81	20 11 27.17	19 58 19.41	13 7.76
20h 12m.7	19h 59m.6	13m 7s.812	20h 11m.3	19h 58m.1	13m 7s.739

Zweiter Zeichenwechsel.

23h 55m 14s.61	23h 42m 6s.13	13m 8s.48	23h 53m 35s.13	23h 40m 26s.70	13m 8s.43
16.23	7.74	8.49	36.59	28.16	8.43
17.13	8.64	8.49	39.17	30.76	8.41
18.05	9.53	8.52	41.04	32.62	8.42
18.88	10.38	8.50	42.97	34.55	8.42
19.75	11.25	8.50	44.85	36.43	8.42
20.91	12.41	8.50	46.96	38.56	8.40
22.19	13.69	8.50	49.15	40.72	8.43
23.27	14.79	8.48	51.07	42.65	8.42
24.43	15.91	8.52	52.77	44.33	8.44
25.62	17.12	8.50	54.10	45.69	8.41
26.69	18.23	8.46	55.74	47.32	8.42
27.66	19.16	8.50	57.22	48.80	8.42
28.77	20.28	8.49	53 59.50	51.08	8.42
29.83	21.34	8.49	54 1.15	52.72	8.43
23 55 30.79	23 42 22.31	13 8.48	23 54 2.34	23 40 53.93	13 8.41
23h 55m.4	23h 42m.2	13m 8s.494	23h 53m.8	23h 40m.7	13m 8s.421

Tabelle XXI. 1875 November 4.

Zeichen gegeben von Wien			Zeichen gegeben von Leipzig		
Chronograph		Differenz	Chronograph		Differenz
Wien	Leipzig		Wien	Leipzig	
$19^h 59^m 41^s.98$	$19^h 46^m 30^s.07$	$13^m 11^s.91$	$20^h 1^m 13^s.63$	$19^h 48^m 1^s.66$	$13^m 11^s.97$
43.00	31.08	11.92	15.07	3.10	11.97
44.96	33.03	11.93	16.48	4.50	11.98
47.10	35.18	11.92	17.80	5.85	11.95
48.43	36.51	11.92	19.12	7.15	11.97
50.31	38.42	11.89	20.46	8.49	11.97
51.32	39.40	11 92	21.86	9.92	11.94
52.79	40.85	11.94	23.27	11.29	11.98
54.28	42.39	11.89	24.50	12.53	11.97
56.25	44.33	11.92	25.70	13.72	11.98
57.19	45.27	11.92	26.93	14.96	11.97
19 59 58.85	46.93	11.92	28.20	16.22	11.98
20 0 0.65	48.73	11.92	29.32	17.34	11.98
1.51	49.62	11.89	30.71	18.76	11.95
3.28	51.37	11.91	32.00	20.03	11.97
20 0 5.06	19 46 53.14	13 11 92	20 1 33.06	19 48 21.09	13 11.97
$19^h 59^m.9$	$19^h 46^m.7$	$13^m 11^s.915$	$20^h 1^m.4$	$19^h 48^m.2$	$13^m 11^s.969$

Tabelle XXII. 1875 November 4.

$23^h 42^m 12^s.09$	$23^h 28^m 59^s.44$	$13^m 12^s.65$	$23^h 39^m 38^s.44$	$23^h 26^m 25^s.72$	$13^m 12^s.72$
13.71	29 1.08	12.63	39.82	27.13	12.69
15.26	2.64	12.62	41.25	28.57	12.68
16.93	4.29	12.64	42.63	29.96	12.67
18.88	6.26	12.62	44.09	31.36	12.73
20.19	7.59	12.60	45.48	32.79	12.69
21.94	9.33	12.61	46.81	34.13	12.68
23.66	11.03	12.63	48.10	35.38	12.72
25.88	13.26	12.62	49.35	36.62	12.73
27.32	14.71	12.61	50.74	38.07	12.67
29.43	16.82	12.61	52.01	39.33	12.68
31.22	18.60	12.62	53.37	40.66	12.71
32.25	19.61	12.64	54.72	42.06	12.66
34.36	21.74	12.62	56.03	43.33	12.70
36.05	23.42	12.63	57.35	44.65	12.70
23 42 37.44	23 29 24.82	13 12.62	23 39 58.68	23 26 46.00	13 12.68
$23^h 42^m.4$	$23^h 29^m.2$	$13^m 12^s.623$	$23^h 39^m.8$	$23^h 26^m.6$	$13^m 12^s.695$

Erster Zeichenwechsel.

Zeichen gegeben von Leipzig			Zeichen gegeben von Wien		
Chronograph		Differenz	Chronograph		Differenz
Wien	Leipzig		Wien	Leipzig	
$20^h 1^m 36^s.40$	$19^h 48^m 24^s.42$	$13^m 11^s.98$	$20^h 0^m 12^s.47$	$19^h 47^m 0^s.54$	$13^m 11^s.93$
37.42	25.45	11.97	13.91	2.00	11.91
38.57	26.60	11.97	14.99	3.07	11.92
39.64	27.67	11.97	16.54	4.62	11.92
40.67	28.69	11.98	18.21	6.30	11.91
41.46	29.51	11.95	19.07	7.16	11.91
42.39	30.42	11.97	20.34	8.41	11.93
43.37	31.39	11.98	22.41	10.51	11.90
44.64	32.64	12.00	23.87	11.93	11.94
45.85	33.90	11.95	25.28	13.37	11.91
47.35	35.37	11.98	27.08	15.17	11.91
48.56	36.57	11.99	28.60	16.66	11.94
50.05	38.10	11.95	30.37	18.45	11.92
51.40	39.42	11.98	31.28	19.35	11.93
52.79	40.84	11.95	33.20	21.28	11.92
20 1 54.20	19 48 42.25	13 11.95	20 0 35.19	19 47 23.27	13 11.92
$20^h 1^m.7$	$19^h 48^m.5$	$13^m 11^s.970$	$20^h 0^m.4$	$19^h 47^m.2$	$13^m 11^s.920$

Zweiter Zeichenwechsel.

$23^h 40^m 0^s.05$	$23^h 26^m 47^s.35$	$13^m 12^s.70$	$23^h 42^m 39^s.11$	$23^h 29^m 26^s.50$	$13^m 12^s.61$
1.30	48.60	12.70	41.29	28.67	12.62
2.44	49.77	12.67	42.46	29.85	12.61
3.64	50.96	12.68	44.17	31.53	12.64
4.90	52.20	12.70	45.24	32.59	12.65
6.27	53.60	12.67	47.24	34.65	12.59
7.58	54.89	12.69	49.47	36.85	12.62
8.88	56.17	12.71	50.42	37.80	12.62
10.33	57.66	12.67	51.78	39.17	12.61
11.66	26 58.95	12.71	52.80	40.17	12.63
13.09	27 0.39	12.70	54.36	41.79	12.57
14.47	1.77	12.70	56.07	43.45	12.62
15.76	3.06	12.70	57.31	44.67	12.64
17.20	4.51	12.69	42 59.38	46.80	12.58
18.58	5.90	12.68	43 0.44	47.81	12.63
23 40 19.96	23 27 7.24	13 12.72	23 43 2.11	23 29 49.50	13 12.61
$23^h 40^m.2$	$23^h 26^m.95$	$13^m 12^s.693$	$23^h 42^m.8$	$23^h 29^m.6$	$13^m 12^s.615$

Tabelle XXIII. 1875 November 11.

Zeichen gegeben von Wien			Zeichen gegeben von Leipzig		
Chronograph		Differenz	Chronograph		Differenz
Wien	Leipzig		Wien	Leipzig	
$20^{h}50^{m}22^{s}.51$	$20^{h}36^{m}50^{s}.47$	$13^{m}32^{s}.04$	$20^{h}53^{m}\ 4^{s}.15$	$20^{h}39^{m}32^{s}.06$	$13^{m}32^{s}.09$
24.04	52.05	31.99	5.34	33.23	32.11
25.31	53.29	32.02	6.94	34.84	32.10
26.67	54.67	32.00	8.35	36.28	32.07
28.09	56.10	31.99	9.47	37.36	32.11
29.53	57.52	32.01	11.02	38.92	32.10
30.95	36 58.93	32.02	11.89	39.81	32.08
32.38	37 0.38	32.00	13.36	41.26	32.10
34.02	2.00	32.02	14.59	42.48	32.11
35.31	3.33	31.98	15.28	43.17	32.11
36.71	4.71	32.00	16.66	44.57	32.09
38.13	6.11	32.02	18.06	45.94	32.12
39.49	7.51	31.98	19.10	47.00	32.10
40.81	8.82	31.99	20.46	48.37	32.09
42.11	10.09	32.02	21.50	49.40	32.10
20 50 43.55	20 37 11.55	13 32.00	20 53 23.04	20 39 50.94	13 32.10
$20^{h}50^{m}.5$	$20^{h}37^{m}.0$	$13^{m}32^{s}.005$	$20^{h}53^{m}.2$	$20^{h}39^{m}.7$	$13^{m}32^{s}.099$

Tabelle XXIV. 1875 November 11.

$1^{h}57^{m}51^{s}.62$	$1^{h}44^{m}19^{s}.86$	$13^{m}31^{s}.76$	$2^{h}0^{m}44^{s}.00$	$1^{h}47^{m}12^{s}.21$	$13^{m}31^{s}.79$
53.07	21.30	31.77	45.38	13.55	31.83
54.21	22.44	31.77	46.97	15.14	31.83
55.53	23.78	31.75	47.87	16.05	31.82
56.72	24.95	31.77	49.25	17.41	31.84
57.92	26.15	31.77	50.71	18.87	31.84
57 59.31	27.53	31.78	52.17	20.33	31.84
58 0.64	28.87	31.77	52.93	21.09	31.84
1.90	30.13	31.77	54.33	22.48	31.85
3.20	31.44	31.76	56.04	24.24	31.80
4.33	32.58	31.75	57.48	25.64	31.84
5.50	33.72	31.78	0 59.26	27.43	31.83
6.80	35.03	31.77	1 0.12	28.31	31.81
8.27	36.52	31.75	1.53	29.68	31.85
9.83	38.07	31.76	3.08	31.24	31.84
1 58 11.37	1 44 39.64	13 31.73	2 1 4.82	1 47 32.97	13 31.85
$1^{h}58^{m}.0$	$1^{h}44^{m}.5$	$13^{m}31^{s}.763$	$2^{h}0^{m}.9$	$1^{h}47^{m}.4$	$13^{m}31^{s}.831$

Erster Zeichenwechsel.

Zeichen gegeben von Leipzig			Zeichen gegeben von Wien		
Chronograph		Differenz	Chronograph		Differenz
Wien	Leipzig		Wien	Leipzig	
$20^h53^m39^s.65$	$20^h40^m\ 7^s.56$	$13^m32^s.09$	$20^h50^m50^s.41$	$20^h37^m18^s.39$	$13^m32^s.02$
41.13	9.03	32.10	51.60	19.61	31.99
42.29	10.18	32.11	52.89	20.87	32.02
43.43	11.34	32.09	54.12	22.10	32.02
45.18	13.08	32.10	55.19	23.18	32.01
46.51	14.41	32.10	56.45	24.45	32.00
48.19	16.10	32.09	57.72	25.72	32.00
49.99	17.88	32.11	50 58.99	26.99	32.00
51.14	19.05	32.09	51 0.21	28.23	31.98
52.94	20.87	32.07	1.46	29.46	32.00
54.90	22.80	32.10	2.73	30.72	32.01
55.92	23.83	32.09	3.97	31.98	31.99
57.24	25.15	32.09	5.37	33.37	32.00
53 58.61	26.51	32.10	6.71	34.71	32.00
54 0.08	28.00	32.08	8.00	36.04	31.96
20 54 1.59	20 40 29.49	13 32.10	20 51 9.26	20 37 37.27	13 31.99
$20^h53^m.8$	$20^h40^m.3$	$13^m32^s.095$	$20^h51^m.0$	$20^h37^m.5$	$13^m31^s.999$

Zweiter Zeichenwechsel.

$2^h1^m\ 9^s.81$	$1^h47^m37^s.93$	$13^m31^s.88$	$1^h58^m16^s.67$	$1^h44^m44^s.93$	$13^m31^s.74$
11.75	39.88	31.87	18.13	46.35	31.78
12.63	40.82	31.81	19.55	47.78	31.77
14.44	42.57	31.87	20.86	49.11	31.75
16.05	44.23	31.82	22.06	50.30	31.76
18.95	47.09	31.86	23.23	51.47	31.76
20.50	48.65	31.85	24.43	52.67	31.76
22.95	51.12	31.83	25.53	53.75	31.78
23.96	52.16	31.80	26.65	54.90	31.75
25.41	53.56	31.85	27.77	56.04	31.73
26.73	54.88	31.85	28.91	57.16	31.75
28.24	56.41	31.83	29.96	58.21	31.75
29.44	57.58	31.86	31.27	44 59.50	31.77
30.65	47 58.82	31.83	32.64	45 0.87	31.77
32.10	48 0.29	31.81	34.00	2.24	31.76
2 1 33.22	1 48 1.38	13 31.84	1 58 35.57	1 45 3.80	13 31.77
$2^h1^m.4$	$1^h47^m.9$	$13^m31^s.841$	$1^h58^m.4$	$1^h44^m.9$	$13^m21^s.759$

Tabelle XXV. 1875 November 16.

Zeichen gegeben von Wien: Chronograph Wien	Chronograph Leipzig	Differenz	Zeichen gegeben von Leipzig: Chronograph Wien	Chronograph Leipzig	Differenz
20h 59m 41s.36	20h 47m 10s.93	12m 30s.43	21h 2m 11s.88	20h 49m 41s.41	12m 30s.47
42.52	12.09	30.43	13.29	42.80	30.49
43.51	13.10	30.41	14.29	43.76	30.53
44.49	14.09	30.40	16.12	45.61	50.51
45.62	15.19	30.43	17.79	47.26	30.53
46.66	16.21	30.45	18.60	48.07	30.53
47.78	17.35	30.43	19.71	49.18	30.53
48.77	18.35	30.42	21.39	50.89	30.50
49.79	19.35	30.44	22.45	51.91	30.54
50.94	20.52	30.42	23.68	53.17	30.51
52.06	21.63	30.43	24.94	54.43	30.51
53.06	22.63	30.43	26.32	55.82	30.50
54.15	23.71	30.44	27.40	56.88	30.52
55.30	24.86	30.44	28.69	49 58.20	30.49
56.44	26.02	30.42	30.61	50 0.10	30.51
20 59 57.49	20 47 27.05	12 30.44	21 2 31.95	20 50 1.47	12 30.48
20h 59m.8	20h 47m.3	12m 30s.429	21h 2m.4	20h 49m.9	12m 30s.509

Tabelle XXVI. 1875 November 16.

2h 51m 31s.68	2h 39m 1s.33	12m 30s.35	2h 48m 31s.60	2h 36m 1s.19	12m 30s.41
33.29	2.93	30.36	32.66	2.27	30.39
34.77	4.43	30.34	34.24	3.80	30.44
36.50	6.15	30.35	35.51	5.08	30.43
38.18	7.80	30.38	37.27	6.85	30.42
39.79	9.44	30 35	38.17	7.74	30.43
41.28	10.96	30.32	39.65	9.25	30.40
42.75	12.37	30.38	40.86	10.47	30.39
44.17	13.82	30.35	42.00	11.59	30.41
45.57	15.22	30.35	43.84	13.43	30.41
47.08	16.72	30.36	45.19	14.78	30.41
48.52	18 18	30.34	47.15	16.74	30.41
50.00	19 62	30.38	47.99	17.64	30.35
51.42	21.07	30.35	49.74	19.32	30.42
52.87	22.54	30.33	51.06	20.64	30.42
2 51 54.41	2 39 24.06	12 30.35	2 48 52.70	2 36 22.30	12 30.40
2h 51m.7	2h 39m.2	12m 30s.351	2h 48m.7	2h 36m.2	12m 30s.400

Erster Zeichenwechsel.

Zeichen gegeben von Leipzig			Zeichen gegeben von Wien		
Chronograph		Differenz	Chronograph		Differenz
Wien	Leipzig		Wien	Leipzig	
$21^{h}2^{m}35^{s}.54$	$20^{h}50^{m}\ 5^{s}.06$	$12^{m}30^{s}.48$	$21^{h}6^{m}21^{s}.10$	$20^{h}53^{m}50^{s}.71$	$12^{m}30^{s}.39$
36.81	6.34	30.47	22.30	51.86	30.44
37.95	7.44	30.51	23.50	53.06	30.44
39.27	8.75	30.52	24.74	54.32	30.42
40.47	9.99	30.48	26.00	55.57	30.43
42.15	11.62	30.53	27.21	56.78	30.43
43.12	12.62	30.50	28.46	58.06	30.40
44.18	13.67	30.51	29.70	53 59.28	30.42
46.08	15.54	30.54	31.04	54 0.63	30.41
47.56	17.06	30.56	32.34	1.91	30.43
48.45	17.95	30.50	33.66	3.25	30.41
49.72	19.23	30.49	35.04	4.62	30.42
50.94	20.43	30.51	36.37	5.97	30.40
52.05	21.56	30.49	37.71	7.30	30.41
53.47	22.98	30.49	39.19	8.77	30.42
21 2 54.80	20 50 24.28	12 30.52	21 6 40.75	20 54 10.34	12 30.41
$21^{h}2^{m}.7$	$20^{h}50^{m}.2$	$12^{m}30^{s}.502$	$21^{h}6^{m}.5$	$20^{h}54^{m}.0$	$12^{m}30^{s}.417$

Zweiter Zeichenwechsel.

$2^{h}48^{m}57^{s}.98$	$2^{h}36^{m}27^{s}.56$	$12^{m}30^{s}.42$	$2^{h}52^{m}\ 0^{s}.41$	$2^{h}39^{m}30^{s}.07$	$12^{m}30^{s}.34$
48 59.27	28.87	30.40	1.78	31.42	30.36
49 1.60	31.17	30.43	3.28	32.93	30.35
3.08	32.64	30.44	4.65	34.29	30.36
4.58	34.19	30.39	5.86	35.48	30.38
6.36	35.93	30.43	7.09	36.73	30.36
7.42	36.99	30.43	8.26	37.93	30.33
8.57	38.17	30.40	9.44	39.09	30.35
10.40	39.96	30.44	10.65	40.29	30.36
11.72	41.29	30.43	11.74	41.40	30.34
13.40	42.98	30.42	12.83	42.49	30.34
14.33	43.93	30.40	13.87	43.51	30.36
15.69	45.28	30.41	14.99	44.62	30.37
16.93	46.55	30.38	15.97	45.63	30.34
18.75	48.33	30.42	17.06	46.72	30.34
2 49 20.42	2 36 50 04	12 30.38	2 52 18.15	2 39 47.77	12 30.38
$2^{h}49^{m}.2$	$2^{h}36^{m}.6$	$12^{m}30^{s}.414$	$2^{h}52^{m}.15$	$2^{h}39^{m}.65$	$12^{m}30^{s}.354$

In der folgenden Tabelle XXVII finden sich nochmals Mittel, an welche aber gleich die Federnparallaxen, deren Werthe in Abschnitt V, S. 332 aufgeführt, angebracht sind; ferner sind die Differenz der Uhrgänge und die sogenannten Stromzeiten gegeben. Die aus den Signalen abgeleiteten Uhrdifferenzen haben eine grosse Genauigkeit; vergleicht man die Einzelwerthe mit den Mittelwerthen aus je 16 Signalen, so kömmt als mittlerer Fehler einer Differenz weniger als

$$\pm 0\overset{s}{.}02 \ .$$

Der mittlere Fehler aus 16 Signalen ist demnach kleiner als

$$\pm 0\overset{s}{.}005 \ ,$$

und da immer zwei Serien zusammen genommen sind und aus der Differenz der Signale vor und nach den Beobachtungen die Differenz der Uhrgänge abgeleitet, sind dieselben auch auf $\pm 0\overset{s}{.}005$ für ein Intervall von vier bis fünf Stunden richtig, daher der in der Tabelle XXVII angegebene Uhrgang für die Stunde bis auf $\pm 0\overset{s}{.}001$ sicher, wobei natürlich ein regelmässiger Gang während der Beobachtungszeit vorausgesetzt ist. Was die sogenannten Stromzeiten anbetrifft, so sind dieselben dadurch erhalten, dass die in Columne 10 enthaltenen Zahlen aus den in Wien und Leipzig ge-

Tabelle XXVII. Resultate aus den zwischen Wien

1875, Tag	Uhrzeit in Wien	Uhrzeit in Leipzig	Uhrdifferenz Signale von Wien	Uhrzeit in Wien	Uhrzeit in Leipzig
October 8	$20^h 15\overset{m}{.}7$	$20^h 1\overset{m}{.}7$	$14^m 2\overset{s}{.}226$	$20^h 12\overset{m}{.}6$	$19^h 58\overset{m}{.}6$
	23 18.5	23 4.5	14 1.902	23 15.7	23 1.7
9	20 23.5	20 9.5	13 59.294	20 20.4	20 6.4
	24 27.5	24 13.5	13 58.984	24 24.8	24 10.8
19	20 23.1	20 9.6	13 32.916	20 25.4	20 11.9
	24 27.6	24 14.1	13 32.527	24 29.9	24 16.4
November 2	20 26.9	20 13.8	13 3.604	20 28.4	20 15.3
	24 35.8	24 22.8	13 4.317	24 35.6	24 22.5
3	20 11.0	19 57.9	13 7.812	20 12.5	19 59.4
	23 53.5	23 40.4	13 8.492	23 55.1	23 42.0
4	20 0.2	19 47.0	13 11.998	20 1.6	19 48.4
	23 42.6	23 29.4	13 12.700	23 40.0	23 26.8
14	20 50.8	20 37.3	13 31.969	20 53.5	20 40.0
	25 58.2	25 44.7	13 31.732	26 1.2	25 47.7
16	21 3.1	20 50.6	12 30.413	21 2.5	20 50.0
	26 51.9	26 39.4	12 30.342	26 48.9	26 36.4

gebenen Signalen mit dem Uhrgange auf dieselbe Zeit reducirt und aus den Differenzen die Mittel gebildet sind. Bei dem zweiten Signalwechsel October 9 zeigt sich für die Stromzeit eine ungewöhnliche Abweichung, die ihren Grund in Unregelmässigkeiten in den in Leipzig ankommenden Signalen hat. Der mittlere Fehler einer Uhrdifferenz ist für diesen Zeichenwechsel ± 0ˢ04 statt ± 0ˢ02 an den anderen Abenden und vermuthlich ist in der Telegraphenleitung eine Störung gewesen. Ich habe jedoch das Resultat des Zeichenwechsels nicht ausgeschlossen, sondern nehme nur bei der Bildung des Mittels der Stromzeiten den ungewöhnlichen Werth nicht mit.

Die sogenannte Stromzeit findet sich dann zu

$$+ 0^s036 \pm 0^s002 ,$$

ein Werth, der mit früher gefundenen nahe übereinstimmt. 1865 ist

$$+ 0^s0325$$

gefunden.

Was die Uhrgänge anbetrifft, so ging die Leipziger Uhr ziemlich regelmässig, an der Wiener Uhr wurde mehrfach gestellt und geschraubt, daher die Veränderung des Standes und des Ganges.

und Leipzig gegebenen registrirten Signalen.

Uhrdifferenz Signale von Leipzig	Mittel Uhrzeit in Wien	Mittel Uhrzeit in Leipzig	Mittel der Uhrdifferenzen	Differenz der Uhrgänge für 1 Stunde	Einfache Stromzeit
14ᵐ 2ˢ317	20ʰ 14ᵐ1	20ʰ 0ᵐ1	14ᵐ 2ˢ272	− 0ˢ111	+ 0.042
14 1.964	23 17.1	23 3.1	14 1 933		+ 0.028
13 59.514	20 22.0	20 8.0	13 59.404	− 0.094	+ 0.112
13 59.059	24 26.1	24 12.1	13 59.021		+ 0.040
13 32.996	20 24.2	20 10.7	13 32.956	− 0.097	+ 0.038
13 32.593	24 28.7	24 15.2	13 32.560		+ 0.031
13 3.667	20 27.6	20 14.5	13 3.635	+ 0.172	+ 0.034
13 4.377	24 35.7	24 22.6	13 4.347		+ 0.030
13 7.892	20 11.7	19 58.6	13 7.852	+ 0.182	+ 0.038
13 8.564	23 54.3	23 41.2	13 8.528		+ 0.034
13 12.050	20 0.9	19 47.7	13 12.024	+ 0.194	+ 0.027
13 12.775	23 41.3	23 28.1	13 12.737		+ 0.036
13 32.064	20 52.1	20 38.6	13 32.016	− 0.049	+ 0.048
13 31.807	25 59.7	25 46.2	13 31.769		+ 0.039
12 30.495	21 2.8	20 50.3	12 30.454	− 0.014	+ 0.041
12 30.401	26 50.4	26 37.9	12 30,371		+ 0.029

VI. Die Beobachtungen in Wien und Leipzig.

In der folgenden Tabelle XXIX sind auf der linken Seite die in Wien, auf der rechten die in Leipzig erhaltenen Beobachtungsresultate enthalten. Die in den einzelnen Columnen enthaltenen Werthe erkennt man leicht aus den Ueberschriften. In der ersten Columne auf beiden Seiten ist das Datum und der Beobachter aufgeführt, in der zweiten die Kreislage, in der dritten die Anzahl der Fäden, in der vierten die auf den Mittelfaden reducirte Durchgangszeit. Die angewandten Fadendistanzen sind schon früher auf S. 299 gegeben, die Federnparallaxen, welche in Wien October 8 $-0^{s}.030$, October 9 $-0^{s}.028$, October 19 $+0^{s}.003$, $+0^{s}.009$, November 2 $+0^{s}.110$, $+0^{s}.085$, $+0^{s}.056$, $+0^{s}.050$, November 3 $+0^{s}.051$, $+0^{s}.042$, $+0^{s}.047$, November 4 $+0^{s}.045$, $+0^{s}.048$, $+0^{s}.044$, $+0^{s}.050$, November 14 $+0^{s}.013$, November 16 $+0^{s}.032$, in Leipzig October 8 und 9 $0^{s}.00$, October 19 $-0^{s}.037$, November 2 $-0^{s}.039$, November 3 $-0^{s}.024$, November 4 $-0^{s}.034$, Novbr. 14 $+0^{s}.046$, $+0^{s}.042$, November 16 $+0^{s}.042$ gefunden, sind angebracht.

Der wahrscheinliche Fehler der Beobachtung eines Sternes an einem Faden findet sich bei beiden Beobachtern $\pm 0^{s}.07$.

In den Columnen 6, 7, 8 ist die Instrumentalcorrection ent-

Tabelle XXVIII.

T	October 8	October 9	October 19	November 2
20^h	$+14^m 2^s.30$	$+13^m 59^s.44$	$+13^m 33^s.01$	$+13^m 3^s.56$
	11	10	10	17
21	2.19	59.34	32.91	3.73
	11	9	10	17
22	2.08	59.25	32.81	3.90
	11	10	10	17
23	1.97	59.15	32.71	4.07
	11	9	10	17
0	+14. 1.86	+13 59.06	+13 32.61	+13 4.24
1				
2				
	ldu	*ldu*	*ldu*	*ldu*
	−0.011	−0.011	−0.012	−0.005

halten und ist die tägliche Aberration gleich mit dem Collimationsfehler vereinigt. Columne 9 enthält die Uhrcorrectionen, welche entstanden sind durch die Differenzen zwischen den scheinbaren Rectascensionen der Sterne und der Summe der Columnen 5 bis 8. Columne 10 links giebt die Differenzen dieser Uhrcorrectionen und Columne 10 rechts enthält die Längendifferenz. Diese ist folgendermassen abgeleitet:

Nennen wir die Summe der in der fünften, sechsten, siebenten und achten Columne befindlichen Zahlen jeder Zeile, welche die nach den Ortszeiten gültigen Culminationen der Sterne in Wien und Leipzig sind, T und T', die Uhrcorrectionen Columne 9 Δt und $\Delta t'$; ist ferner U die zur Wiener Sternzeit S oder zur Leipziger Sternzeit S' geltende Uhrdifferenz, welche man aus der Tabelle XXVII entnehmen kann, dU der stündliche Uhrgang in Wien, du in Leipzig, l die Längendifferenz, so hat man leicht:

$$l = U + (\Delta t - \Delta t') + (\alpha - S)(du - dU) + l\,du.$$

Die Grösse $\Delta t - \Delta t'$ ist in der Columne 10 auf der linken Seite enthalten; für $U + (\alpha - S)(du - dU)$ ist mit dem Argument T (Wiener Ortszeit) die folgende Tafel XXVIII gerechnet und der stündliche Gang du der Leipziger Uhr ist aus den Leipziger Beobachtungen abgeleitet und mit $l = \frac{15,8}{60}$ multiplicirt.

$U + (\alpha - S)(du - dU)$.

November 3	November 4	November 14	November 16
$+13^m 7^s.82$	$+13^m 12^s.02$		
18	19		
8.00	12.21	$+13^m 32^s.01$	$+12^m 30^s.45$
19	20	5	1
8.19	12.41	31.96	30.44
18	19	5	2
8.37	12.60	31.91	30.42
18	20	5	1
+13 8.55	+13 12.80	31.86	30.41
		5	2
		31.81	30.39
		4	1
		+13 31.77	+12 30.38
$l\,du$	$l\,du$	$l\,du$	$l\,du$
−0.016	−0.007	−0.014	−0.001

Tabelle XXIX.

Beobachtungen in Wien.

Tag 1875	Name des Sterns	Kreislage	Zahl der Fäden	Durchgangszeit	Correct. für i	Correct. für c	Correct. für k	Uhr-Correct.	Differenz der Uhren
October 8	23 Hevelii	W	13	20h 17m 32s.69	−0s.01	−0s.04	+0s.77	−31s.83	+1m 44s.70
Beobachter	π Capricorni	W	13	20 20 43.71	−0.01	−0.04	+1.08	−31.86	+1 44.68
v. Steeb	69 Aquilae	W	13	20 23 40.68	−0.01	−0.04	+0.87	−31.76	+1 44.77
	Polstern K (O. C.)	W	6	20 35 12.40	−0.11	−0.26	−3.87		
	» K (O. C.)	O	7	20 35 12.32	−0.13	+0.06	−3.87		
	15 Delphini	O	13	20 44 14.10	−0.07	+0.01	+0.67	−31.82	+1 44.80
	μ Aquarii	O	13	20 46 28.52	−0.04	+0.01	+0.96	−31.87	+1 44.70
	16 Delphini	O	13	20 50 14.48	−0.07	+0.01	+0.67	−31.82	+1 44.80
	θ Capricorni								
	61¹ Cygni	O	13	21 1 51.71	−0.10	+0.01	+0.25	−31.93	
	61² Cygni	O	13	21 1 58.18	−0.10	+0.01	+0.25	−31.90	+1 44.77
	γ Equulei	O	11	21 4 49.60	−0.06	+0.01	+0.71	−31.79	+1 44.76
	α Equulei	O	13	21 10 8.40	−0.06	+0.01	+0.77	−31.87	
	Polstern F (U. C.)	O	6	21 19 36.53	+0.36	−0.07	+6.03		
	» F (U. C.)	W	6	21 19 36.38	0.00	+0.28	+6.03		
	ε Capricorni	W	13	21 30 38.83	0.00	−0.04	+1.10	−31.79	+1 44.79
	d Aquarii	W	13	21 33 46.63	0.00	−0.04	+0.81	−31.77	+1 44.82
	ε Pegasi	W	13	21 38 36.67	0.00	−0.04	+0.71	−31.70	+1 44.84
	16 Pegasii	W	13	21 47 56.41	0.00	−0.04	+0.48	−31.71	
	α Aquarii	W	13	21 59 55.85	0.00	−0.04	+0.84	−31.77	
	θ Pegasi	W	13	22 4 27.70	0.00	−0.04	+0.76	−31.75	+1 44.86
	41 Aquarii	W	12	22 7 37.82	0.00	−0.04	+1.13	−31.72	+1 44.92
	θ Aquarii	W	13	22 10 48.32	0.00	−0.04	+0.94	−31.74	+1 44.91
	Polstern L (O. C.)	W	6	22 23 39.96	0.00	−0.51	−8.58		
	» L (O. C.)	O	7	22 23 39.93	−0.51	+0.13	−8.58		
	ζ Pegasi	O	13	22 35 47.77	−0.04	+0.01	+0.70	−31.74	+1 44.90
	68 Aquarii	O	13	22 41 24.43	−0.02	+0.01	+1.11	−31.78	+1 44.92
	λ Aquarii	O	13	22 46 39.72	−0.03	+0.01	+0.94	−31.75	+1 44.93
October 9	θ Capricorni	O	13	20 59 27.29	−0.03	+0.01	+1.09	−30.09	+1 47.64
	61¹ Cygni	O	13	21 1 49.86	−0.08	+0.01	+0.25	−30.12	
Beobachter	61² Cygni	O	13	21 1 51.38	−0.08	+0.01	+0.25	−30.14	
v. Steeb	γ Equulei	O	13	21 4 47.73	−0.05	+0.01	+0.72	−29.95	+1 47.62
	α Equulei	O	13	21 10 6.52	−0.04	+0.01	+0.79	−30.04	+1 47.62
	Polstern F (U. C.)	O	6	21 19 34.74	+0.27	−0.07	+6.16		
	» F (U. C.)	W	7	21 19 34.74	0.00	+0.28	+6.16		
	ε Capricorni	W	13	21 30 37.01	0.00	−0.04	+1.18	−30.01	+1 47.67
	d Aquarii	W	13	21 33 44.70	0.00	−0.04	+0.83	−29.96	+1 47.67
	ε Pegasi	W	13	21 38 34.87	0.00	−0.04	+0.72	−29.92	+1 47.65
	16 Pegasi	W	13	21 47 54.56	0.00	−0.04	+0.49	−29.88	
	α Aquarii	W	13	21 59 53.93	0.00	−0.04	+0.86	−29.93	
	θ Pegasi	W	13	22 4 25.86	0.00	−0.04	+0.77	−29.90	+1 47.77
	41 Aquarii	W	13	22 7 35.96	0.00	−0.04	+1.15	−29.88	+1 47.84
	θ Aquarii	W	13	22 10 46.46	0.00	−0.04	+0.96	−29.91	+1 47.76
	Polstern L (O. C.)	W	6	22 23 37.88	0.00	−0.51	−8.75		
	» L (O. C)	O	7	22 23 38.23	−0.61	+0.13	−8.75		
	ζ Pegasi	O	13	22 35 45.98	−0.05	+0.01	+0.71	−29.95	+1 47.78
	68 Aquarii	O	13	22 41 22.57	−0.02	+0.01	+1.13	−29.94	+1 47.85
	λ Aquarii	O	13	22 46 37.91	−0.03	+0.01	+0.96	−29.97	+1 47.82
	α Piscis austr.	O	13	22 51 16.95	−0.01	+0.01	+1.29	−29.91	
	α Pegasi	O	13	22 59 4.42	−0.05	+0.01	+0.65	−29.82	

Beobachtungen.

Beobachtungen in Leipzig.

Tag 1875	Name des Sterns	Kreislage	Zahl der Fäden	Durchgangs-zeit	Correct. für *i*	Correct. für *c*	Correct. für *k*	Uhr-Correct.	Längen-differenz
October 8	22 Hevelii	W	11	20h19m19s.16	+ 0s.02	− 0s.32	− 0s.76	− 2m16s.53	15m46s.95
	π Capricorni	W	11	20 22 30.78	+ 0.02	− 0.34	− 1.04	− 2 16.54	15 46.93
Beobachter	69 Aquilae	W	11	20 25 27.42	+ 0.03	− 0.32	− 0.86	− 2 16.53	15 47.01
Weinek	Polstern K (O. C.)	W	5	20 36 51.13	+ 0.24	− 2.08	+ 3.33		
	» K (O. C.)	O	5	20 36 47.23	+ 0.08	+ 1.86	+ 3.33		
	15 Delphini	O	11	20 45 59.88	+ 0.01	+ 0.30	− 0.68	− 2 16.62	15 47.01
	μ Aquarii	O	11	20 48 14.78	+ 0.01	+ 0.29	− 0.93	− 2 16.57	15 46.91
	16 Delphini	O	11	20 52 0.26	+ 0.01	+ 0.30	− 0.68	− 2 16.62	15 47.00
	θ Capricorni	O	11	21 1 15.69	− 0.01	+ 0.31	− 1.03	− 2 16.67	
	61[1] Cygni								
	61[2] Cygni								
	γ Equulei	O	11	21 6 35.46	− 0.02	+ 0.29	− 0.71	− 2 16.56	15 46.94
	α Equulei	O	11	21 11 54.37	− 0.02	+ 0.29	− 0.76	− 2 16.63	15 46.92
	Polstern F (U. C.)	O	4	21 21 34.26	+ 0.42	− 2.06	− 5.41		
	» F (U. C.)	W	5	21 21 30.02	− 0.02	+ 2.24	− 5.41		
	ε Capricorni	W	11	21 32 26.08	0.00	− 0.34	− 1.06	− 2 16.58	15 46.91
	d Aquarii	W	11	21 35 33.34	0.00	− 0.32	− 0.80	− 2 16.59	15 46.93
	ε Pegasi	W	11	21 40 23.21	0.00	− 0.32	− 0.71	− 2 16.54	15 46.94
	16 Pegasi								
	α Aquarii								
	θ Pegasi	W	11	22 6 11.32	− 0.03	− 0.32	− 0.75	− 2 16.61	15 46.92
	41 Aquarii	W	11	22 9 45.25	− 0.01	− 0.34	− 1.08	− 2 16.64	15 46.97
	θ Aquarii	W	11	22 12 35.34	− 0.02	− 0.32	− 0.92	− 2 16.65	15 46.96
	Polstern L (O. C.)	W	5	22 25 11.14	− 0.48	− 4.03	+ 7.48		
	» L (O. C.)	O	6	22 25 4.14	− 0.48	+ 3.70	+ 7.48		
	ε Pegasi	O	11	22 37 33.74	− 0.01	+ 0.30	− 0.70	− 2 16.64	15 46.90
	68 Aquarii	O	11	22 43 11.20	− 0.01	+ 0.31	− 1.06	− 2 16.70	15 46.91
	λ Aquarii	O	11	22 48 26.18	− 0.01	+ 0.29	− 0.91	− 2 16.68	15 46.91
October 9	θ Capricorni	O	11	21 1 16.64	+ 0.32	+ 0.32	− 0.97	− 2 17.70	15 46.94
	61[1] Cygni	O							
Beobachter	61[2] Cygni	O							
Weinek	γ Equulei	O	11	21 6 36.40	+ 0.31	+ 0.31	− 0.67	− 2 17.57	15 46.94
	α Equulei	O	11	21 11 55.34	+ 0.31	+ 0.31	− 0.72	− 2 17.68	15 46.94
	Polstern F (U. C.)	O	5	21 21 35.58	− 2.19	− 2.19	− 5.42		
	» F (U. C.)	W	5	21 21 31.28	+ 2.37	+ 2.37	− 5.42		
	ε Capricorni	W	11	21 32 27.13	− 0.36	− 0.36	− 1.00	− 2 17.68	15 46.95
	d Aquarii	W	11	21 35 34.34	− 0.34	− 0.34	− 0.76	− 2 17.63	15 46.94
	ε Pegasi	W	11	21 40 24.21	− 0.34	− 0.34	− 0.67	− 2 17.57	15 46.91
	16 Pegasi	W							
	α Aquarii	W							
	θ Pegasi	W	11	22 6 15.36	− 0.34	− 0.34	− 0.72	− 2 17.67	15 47.00
	41 Aquarii	W	11	22 9 46.28	− 0.36	− 0.36	− 1.02	− 2 17.72	15 47.07
	θ Aquarii	W	11	22 12 36.33	− 0.34	− 0.34	− 0.87	− 2 17.67	15 46.98
	Polstern L (O. C.)	W	5	22 25 13.30	− 4.26	− 4.26	+ 7.08		
	» L (O. C.)	O	6	22 25 5.52	+ 3.92	+ 3.92	+ 7.08		
	ζ Pegasi	O	11	22 37 34.78	+ 0.31	+ 0.31	− 0.66	− 2 17.73	15 46.95
	68 Aquarii	O	11	22 43 12.22	+ 0.33	+ 0.33	− 1.01	− 2 17.79	15 47.03
	λ Aquarii	O	11	22 48 27.23	+ 0.31	+ 0.31	− 0.87	− 2 17.79	15 46.99
	α Piscis austr.	O							
	α Pegasi	O							

Beobachtungen in Wien.

Tag 1875	Name des Sterns	Kreislage	Zahl der Fäden	Durchgangs-zeit	Correct. für i	Correct. für c	Correct. für k	Uhr-Correct.	Differenz der Uhren
October 9	58 Pegasi	O	13	23h 4m 16s.20	− 0s.05	+ 0s.01	+ 0s.73	− 29s.87	+ 1m 47s.84
Beobachter	φ Aquarii	O	13	23 08 23.27	− 0.03	+ 0.01	+ 0.94	− 29.91	+ 1 47.84
von Steeb	γ Piscium	O	13	23 11 18.50	− 0.04	+ 0.01	+ 0.81	− 29.86	+ 1 47.86
	Polstern M (O. C.)	O	6	23 28 41.57	− 0.80	+ 0.17	− 12.00		
	» M (O. C.)	W	7	23 28 42.56	− 0.13	− 0.68	− 12.00		
	21 Piscium	W	12	23 43 35.82	− 0.01	− 0.04	+ 0.84	− 29.80	+ 1 47.93
	φ Pegasi	W	6	23 46 40.23	− 0.01	− 0.04	+ 0.60	− 29.73	+ 1 47.93
	ω Piscium	W	13	23 50 25.96	− 0.01	− 0.04	+ 0.77	− 29.78	+ 1 47.97
	α Andromedae	W	13	0 2 28.80	− 0.01	− 0.05	+ 0.44	− 29.68	
October 19	Polstern K (O. C.)								
Beobachter	» K (O. C.)								
Weinek	15 Delphini								
	μ Aquarii								
	16 Delphini								
	θ Capricorni	W	13	20 59 13.80	0.00	− 0.17	+ 1.12	− 16.13	+ 2 14.36
	61¹ Cygni	W	13	21 1 35.84	0.00	− 0.21	+ 0.25	− 16.17	+ 2 14.16
	61² Cygni	W							
	γ Equulei	W	13	21 4 33.78	0.00	− 0.17	+ 0.73	− 16.03	
	α Equulei	W	13	21 9 52.53	0.00	− 0.17	+ 0.80	− 16.07	+ 2 14.39
	Polstern F (U. C.)	W	6	21 19 21.43	− 0.01	+ 1.17	+ 6.28		
	» F (U. C.)	O	6	21 19 23.48	+ 0.22	− 0.98	+ 6.28		
	ε Capricorni	O	13	21 30 22.89	− 0.02	+ 0.15	+ 1.15	− 16.23	+ 2 14.28
	d Aquarii	O	13	21 33 30.68	− 0.03	+ 0.14	+ 0.84	− 16.14	+ 2 14.25
	ε Pegasi	O	13	21 38 20.73	− 0.04	+ 0.14	+ 0.73	− 16.06	+ 2 14.34
	56 Pegasi	O	13	21 47 40.43	− 0.04	+ 0.15	+ 0.50	− 16.06	
	α Aquari	O	13	21 59 39.88	− 0.03	+ 0.14	+ 0.88	− 16.12	
	θ Pegasi	O	13	22 4 11.75	− 0.05	+ 0.14	+ 0.79	− 16.08	+ 2 14.44
	41 Aquarii	O	13	22 7 41.90	− 0.02	+ 0.15	+ 1.18	− 16.14	+ 2 14.33
	θ Aquarii	O	13	22 10 32.39	− 0.04	+ 0.14	+ 0.98	− 16.11	+ 2 14.40
	Polstern L (O. C.)	O	5	22 23 21.53	− 0.67	+ 1.75	− 8.93		
	» L (O. C.)	W	7	22 23 25.08	− 0.15	− 2.11	− 8.93		
	ζ Pegasi	W	13	22 35 32.11	− 0.01	− 0.17	+ 0.73	− 16.06	+ 2 14.49
	68 Aquarii	W	13	22 41 8.65	− 0.01	− 0.18	+ 1.15	− 15.96	+ 2 14.62
	λ Aquarii	W	8	22 46 24.00	− 0.01	− 0.17	+ 0.98	− 16.00	
	α Piscis austr.	W							
	α Pegasi	W	13	22 58 50.54	− 0.01	− 0.17	+ 0.67	− 15.90	+ 2 14.69
	58 Pegasi	W	13	23 4 2.28	0.00	− 0.17	+ 0.74	− 15.91	+ 2 14.62
	φ Aquarii	W	13	23 8 9.33	0.00	− 0.17	+ 0.96	− 15.91	+ 2 14.66
	γ Piscium	W	13	23 10 59.64	0.00	− 0.17	+ 0.83	− 15.94	+ 2 14.62
	Polstern M (O. C.)	W	6	23 28 28.63	+ 0.05	− 2.82	− 12.25		
	» M (O. C.)	O	7	23 28 24.73	− 0.63	+ 2.34	− 12.25		
	21 Piscium	O	13	23 43 21.80	− 0.03	+ 0.14	+ 0.86	− 15.99	+ 2 14.50
	φ Pegasi	O	13	23 46 26.15	− 0.04	+ 0.15	+ 0.61	− 15.84	+ 2 14.49
	ω Piscium	O	13	23 53 11.97	− 0.04	+ 0.14	+ 0.78	− 15.96	+ 2 14.53
	γ Pegasi	O	13	0 7 6.51	− 0.04	+ 0.14	+ 0.67	− 15.95	
November 2	23 Hevelii	O	13	20 17 4.02	+ 0.09	+ 0.08	+ 0.85	− 3.84	

Beobachtungen in Leipzig.

Tag 1875	Name des Sterns	Kreislage	Zahl der Fäden	Durchgangs-zeit	Correct. für i	Correct. für c	Correct. für k	Uhr-Correct.	Längen-differenz
October 9	58 Pegasi	O	11	$23^h\ 6^m\ 5^s.18$	+ $0^s.34$	+ $0^s.34$	− $0^s.68$	− $2^m\ 17^s.74$	$15^m\ 46^s.97$
Beobachter	φ Aquarii	O	11	23 10 12.60	+ 0.34	+ 0.34	− 0.85	− 2 17.75	15 46.97
Weinek	γ Piscium	O	11	23 13 2.61	+ 0.34	+ 0.34	− 0.75	− 2 17.72	15 46.99
	Polstern M (O. C.)	O	5	23 30 1.85	+ 5.25	+ 5.25	+ 9.74		
	» M (O. C.)	W	6	23 30 12.72	− 5.69	− 5.69	+ 9.74		
	21 Piscium	W	9	23 45 25.66	− 0.34	− 0.34	− 0.77	− 2 17.73	15 47.01
	φ Pegasi	W	9	23 48 29.66	− 0.35	− 0.35	− 0.87	− 2 17.66	15 47.00
	ω Piscium	W	11	23 55 15.72	− 0.34	− 0.34	− 0.71	− 2 17.75	15 47.03
	α Andromedae	W							
October 19	Polstern K (O. C.)	O	5	20 37 01.35	− 0.56	+ 1.98	+ 3.16		
Beobachter	» K (O. C.)	W	5	20 37 04.78	− 0.33	− 2.18	+ 3.16		
von Steeb	15 Delphini	W	5	20 46 14.15	− 0.05	− 0.35	− 0.65	− 2 30.38	
	μ Aquarii	W	11	20 48 29.11	− 0.03	− 0.34	− 0.88	− 2 30.44	
	16 Delphini	W	11	20 52 14.50	− 0.05	− 0.35	− 0.65	− 2 30.35	
	θ Capricorni	W	11	21 1 29.97	− 0.02	− 0.36	− 0.98	− 2 30.49	15 47.26
	61^1 Cygni	W	3	21 3 50.84	− 0.07	− 0.43	− 0.29	− 2 30.33	15 47.06
	61^2 Cygni	W	3	21 3 52.36	− 0.07	− 0.43	− 0.29	− 2 30.35	
	γ Equulei	W							
	α Equulei	W	11	21 12 8.66	− 0.04	− 0.34	− 0.73	− 2 30.46	15 47.27
	Polstern F (U. C.)	W	5	21 21 46.17	+ 0.29	+ 2.40	− 5.14		
	» F (U. C.)	O	6	21 21 50.83	+ 0.19	− 2.19	− 5.14		
	ε Capricorni	O	11	21 32 39.15	− 0.01	+ 0.33	− 1.01	− 2 30.51	15 47.13
	d Aquarii	O	11	21 35 46.37	− 0.03	+ 0.34	− 0.76	− 2 30.40	15 47.10
	ε Pegasi	O	11	21 40 36.30	− 0.03	+ 0.34	− 0.68	− 2 30.40	15 47.18
	16 Pegasi	O							
	α Aquarii	O							
	θ Pegasi	O	11	22 6 27.51	− 0.03	+ 0.34	− 0.72	− 2 30.52	15 47.23
	41 Aquarii	O	11	22 9 58.25	− 0.01	+ 0.33	− 1.03	− 2 30.47	15 47.12
	θ Aquarii	O	11	22 12 48.45	− 0.02	+ 0.34	− 0.87	− 2 30.54	15 47.48
	Polstern L (O. C.)	O	5	22 25 17.62	− 0.42	+ 3.94	+ 7.12		
	» L (O. C.)	W	6	23 25 25.98	− 0.14	− 4.32	+ 7.12		
	ζ Pegasi	W	11	22 37 48.19	− 0.04	− 0.35	− 0.67	− 2 30.55	15 47.22
	68 Aquarii	W	11	22 43 25.60	0.00	− 0.36	− 1.01	− 2 30.58	15 47.35
	λ Aquarii	W							
	α Piscis austr.	W	11	22 58 20.28	0.00	− 0.39	− 1.14	− 2 30.52	
	α Pegasi	W	11	23 1 6.70	− 0.01	− 0.35	− 0.62	− 2 30.59	15 47.39
	58 Pegasi	W	11	23 6 18.54	− 0.04	− 0.34	− 0.68	− 2 30.53	15 47.34
	φ Aquarii	W	11	23 10 25.98	− 0.04	− 0.34	− 0.85	− 2 30.57	15 47.35
	γ Piscium	W	11	23 13 16.02	− 0.04	− 0.34	− 0.75	− 2 30.56	15 47.30
	Polstern M (O. C.)	W	5	23 30 23.04	− 0.14	− 5.77	+ 9.79		
	» M (O. C.)	O	6	23 30 11.75	− 0.14	+ 5.27	+ 9.79		
	21 Piscium	O	11	23 45 37.75	− 0.04	+ 0.34	− 0.78	− 2 30.49	15 47.43
	φ Pegasi	O	11	23 48 41.64	− 0.04	+ 0.33	− 0.57	− 2 30.33	15 47.41
	ω Piscium	O	11	23 55 27.79	− 0.04	+ 0.34	− 0.71	− 2 30.49	15 47.14
	γ Pegasi	O							
November 2	23 Hevelii	O							

Beobachtungen in Wien.

Tag 1875	Name des Sterns	Kreislage	Zahl der Fäden	Durchgangs-zeit	Correct. für i	Correct. für c	Correct. für k	Uhr-Correct.	Differenz der Uhren
November 2 Beobachter Weinek	θ Capricorni	O	13	20h59m 0s.78	+0s.06	+0s.08	+ 1s.18	−4s.19	+2m43s.42
	61¹ Cygni	O	13	21 1 23.03	+0.16	+0.10	+ 0.27	−4.18	+2 43.57
	61² Cygni	O							
	γ Equulei	O	13	21 4 21.20	+0.10	+0.08	+ 0.78	−4.06	+2 43.46
	α Equulei	O	13	21 9 40.11	+0.09	+0.08	+ 0.85	−4.23	+2 43.35
	Polstern F (U. C.)	O	6	21 19 13.91	−0.59	−0.58	+ 6.65		
	» F (U. C.)	W	6	21 19 13.08	−0.82	+0.78	+ 6.65		
	ε Capricorni	W	13	21 30 10.87	+0.07	−0.11	+ 1.22	−4.30	+2 43.39
	d Aquarii	W	13	21 33 18.57	+0.12	−0.10	+ 0.89	−4.18	+2 43.45
	ε Pegasi	W	13	21 38 8.66	+0.14	−0.10	+ 0.78	−4.17	+2 43.40
	16 Pegasi	W	13	21 47 28.34	+0.18	−0.11	+ 0.53	−4.17	
	α Aquarii	W	13	21 59 27.86	+0.12	−0.10	+ 0.93	−4.22	
	θ Pegasi	W	13	22 3 59.74	+0.14	−0.10	+ 0.84	−4.23	+2 43.41
	41 Aquarii	W	13	22 7 30.04	+0.07	−0.11	+ 1.24	−4.36	+2 43.23
	θ Aquarii	W	13	22 10 20.44	+0.10	−0.10	+ 1.04	−4.28	+2 43.40
	Polstern L (O. C.)	W	6	22 23 7.26	+1.85	−1.31	− 9.46		
	» L (O. C.)	O	6	22 23 5.20	+1.34	+0.95	− 9.46		
	ζ Pegasi	O	13	22 35 19.94	+0.11	+0.08	+ 0.77	−4.42	+2 43.27
	68 Aquarii	O	13	22 40 56.66	+0.05	+0.08	+ 1.22	−4.51	+2 43.15
	λ Aquarii	O	13	22 46 12.01	+0.07	+0.08	+ 1.04	−4.58	+2 43.19
	α Piscis austr.	O	13	22 50 31.04	+0.03	+0.09	+ 1.40	−4.46	+2 43.17
	α Pegasi	O	9	22 58 38.62	+0.11	+0.08	+ 0.71	−4.50	+2 43.12
	58 Pegasi	O	13	23 3 50.37	+0.09	+0.08	+ 0,79	−4.48	+2 43.23
	φ Aquarii	O	13	23 7 57.48	+0.07	+0.08	+ 1.02	−4.54	+2 43.13
	γ Piscium	O	13	23 10 47.77	+0.08	+0.08	+ 0.88	−4.55	+2 43.10
	Polstern M (O. C.)	O	6	23 28 9.57	+1.52	+1.27	−12.98		
	» M (O. C.)	W	7	23 28 12.00	+2.20	−1.75	−12.98		
	21 Piscium	W	13	23 43 10.32	+0.11	−0.10	+ 0.91	−4.53	+2 43.14
	φ Pegasi	W	13	23 46 14.81	+0.15	−0.11	+ 0.65	−4.55	+2 43.13
	ω Piscium	W	13	23 53 0.63	+0.12	−0.10	+ 0.83	−4.65	+2 43.01
	α Andromedae	W	13	0 2 2.91	+0.18	−0.12	+ 0.48	−4.52	
	γ Pegasi	W	13	0 6 55.17	+0.14	−0.11	+ 0.72	−4.64	
November 3 Beobachter Weinek	23 Hevelii	W	13	20 17 9.13	+0.15	−0.11	+ 0.87	−8.85	+2 39.46
	π Capricorni	W	13	20 20 20.24	+0.09	−0.11	+ 1.23	−8.97	+2 39.41
	69 Aquilae	W	13	20 23 17.20	+0.13	−0.11	+ 0.99	−8.86	+2 39.40
	Polstern K (O. C.)	W	6	20 34 45.31	+1.12	−0.69	− 4.38		
	» K (O. C.)	O	7	20 34 44.11	+0.84	−0.51	− 4.38		
	15 Delphini	O	13	20 43 50.59	+0.13	+0.08	+ 0.76	−9.07	+2 39.25
	μ Aquarii	O	13	20 46 5.08	+0.09	+0.08	+ 1.08	−9.12	+2 39.27
	16 Delphini	O	13	20 49 30.99	+0.13	+0.08	+ 0.76	−9.09	+2 39.26
	θ Capricorni	O	13	20 59 5.74	+0.06	+0.08	+ 1.21	−9.18	+2 39.16
	61¹ Cygni	O	13	21 1 28.04	+0.19	+0.10	+ 0.28	−9.20	+2 39.13
	61² Cygni								
	γ Equulei	O	13	21 4 26.25	+0.11	+0.08	+ 0.80	−9.14	+2 39.16
	α Equulei	O	13	21 9 45.14	+0.10	+0.08	+ 0.87	−9.31	+2 39.04
	Polstern F (U. C.)	O	6	21 19 18.62	−0.64	−0.57	+ 6.83		
	» F (U. C.)	W	7	21 19 17.77	−0.87	+0.76	+ 6.88		
	ε Capricorni	W	13	21 30 15.84	+0.08	−0.12	+ 1.25	−9.31	+2 39.07
	d Aquarii	W	13	21 33 23.59	+0.13	−0,11	+ 0.92	−9.23	+2 39.13
	ε Pegasi	W	13	21 38 13.69	+0.15	−0.11	+ 0.80	−9.24	+2 39.06
	16 Pegasi	W	13	21 47 33.32	+0.21	−0.12	+ 0.54	−9.19	
	α Aquarii	W	13	21 59 32.94	+0.14	−0.11	+ 0.96	−9.32	

Beobachtungen in Leipzig.

Tag 1875	Name des Sterns	Kreislage	Zahl der Fäden	Durchgangszeit	Correct. für *i*	Correct. für *c*	Correct. für *k*	Uhr-Correct.	Längendifferenz
November 2 Beobachter v. Steeb	θ Capricorni	O	10	21h 1m 47s.01	0s.00	−0s.36	− 1s.13	−2m 47s.64	15m 47s.14
	61¹ Cygni	O	11	21 4 7.90	−0.01	−0.43	− 0.33	−2 47.70	15 47.29
	61² Cygni	O	11	21 4 9.39	−0.01	−0.43	− 0.33	−2 47.69	
	γ Equulei	O	11	21 7 6.76	−0.01	−0.34	− 0.78	−2 47.52	15 47.20
	α Equulei	O	11	21 12 25.69	−0.01	−0.34	− 0.84	−2 47.61	15 47.14
	Polstern F (U. C.)	O	5	21 22 06.53	+0.05	+2.40	− 5.94		
	» F (U. C.)	W	6	21 22 10.95	+0.29	−2.19	− 5.94		
	ε Capricorni	W	11	21 32 56.29	−0.02	+0.33	− 1.16	−2 47.69	15 47.15
	d Aquarii	W	10	21 36 3.55	−0.04	+0.31	− 0.88	−2 47.63	15 47.27
	ε Pegasi	W	11	21 40 53.40	−0.05	+0.31	− 0.78	−2 47.57	15 47.24
	16 Pegasi	W							
	α Aquarii	W							
	θ Pegasi	W	11	22 6 44.58	−0.04	+0.31	− 0.83	−2 47.64	15 47.33
	41 Aquarii	W	11	22 10 15.41	−0.02	+0.33	− 1.19	−2 47.64	15 47.20
	θ Aquarii	W	11	22 13 5.61	−0.03	+0.31	− 1.01	−2 47.68	15 47.33
	Polstern L (O. C.)	W	5	22 25 30.92	−0.63	+3.94	+ 8.22		
	» L (O. C.)	O	6	22 25 38.78	−0.42	−4.32	+ 8.22		
	ζ Pegasi	O	11	22 38 5.30	−0.03	−0.35	− 0.77	−2 47.69	15 47.26
	68 Aquarii	O	11	22 43 42.70	−0.01	−0.36	− 1.17	−2 47.66	15 47.16
	λ Aquarii	O	11	22 48 57.75	−0.02	−0.34	− 1.00	−2 47.72	15 47.22
	α Piscis austr.	O	11	22 53 37.42	−0.01	−0.39	− 1.32	−2 47.63	15 47.21
	α Pegasi	O	11	23 1 23.72	−0.03	−0.35	− 0.71	−2 47.62	15 47.19
	58 Pegasi	O	11	23 6 35.70	−0.03	−0.34	− 0.78	−2 47.71	15 47.30
	φ Aquarii	O	11	23 10 43.13	−0.02	−0.34	− 0.98	−2 47.69	15 47.24
	γ Piscium	O	11	23 13 33.15	−0.03	−0.34	− 0.57	−2 47.65	15 47.20
	Polstern M (O. C.)	O	5	23 30 36.41	−0.55	−5.77	+11.31		
	» M (O. C.)	W	6	23 30 26.34	−0.69	+5.27	+11.31		
	21 Piscium	W	11	23 45 54.99	−0.03	+0.31	− 0.90	−2 47.67	15 47.33
	φ Pegasi	W	11	23 48 59.00	−0.04	+0.33	− 0.66	−2 47.68	15 47.33
	ω Piscium	W	11	23 55 45.04	−0.04	+0.31	− 0.82	−2 47.66	15 47.22
	α Andromedae	W							
	γ Pegasi	W							
November 3 Beobachter v. Steeb	23 Hevelii	O	11	20 19 50.03	−0.01	+0.31	− 0.83	−2 48.31	15 47.33
	π Capricorni	O	11	20 23 1.67	−0.01	+0.33	− 1.13	−2 48.38	15 47.29
	69 Aquilae	O	11	20 35 58.24	−0.01	+0.31	− 0.93	−2 48.26	15 47.29
	Polstern K (O. C.)	O	5	20 37 15.52	−0.11	+1.98	+ 3.62		
	» K (O. C.)	W	6	20 37 49.66	−0.06	−2.18	+ 3.62		
	15 Delphini	W	11	20 46 31.94	−0.01	−0.35	− 0.74	−2 48.35	15 47.23
	μ Aquarii	W	11	20 48 46.95	0.00	−0.34	− 1.01	−2 48.39	15 47.22
	10 Delphini	W	11	20 52 32.31	−0.01	−0.35	− 0.74	−2 48.33	15 47.21
	θ Capricorni	W	11	21 1 47.73	0.00	−0.36	− 1.12	−2 48.34	15 47.16
	61¹ Cygni	W	11	21 4 8.55	−0.01	−0.43	− 0.33	−2 48.38	15 47.18
	61² Cygni	W	11	21 4 10.07	−0.01	−0.43	− 0.33	−2 48.40	
	γ Equulei	W	11	21 7 7.52	−0.01	−0.34	− 0.77	−2 48.30	15 47.17
	α Equulei	W	11	21 12 26.41	−0.01	−0.34	− 0.83	−2 48.35	15 47.07
	Polstern F (U. C.)	W	5	21 22 7.33	+0.05	+2.40	− 5.89		
	» F (U. C.)	O	6	21 22 12.39	+0.24	−2.19	− 5.89		
	ε Capricorni	O	11	21 32 56.96	−0.02	+0.33	− 1.15	−2 48.38	15 47.17
	d Aquarii	O	11	21 36 4.25	−0.03	+0.31	− 0.87	−2 48.36	15 47.24
	ε Pegasi	O	11	21 40 54.10	−0.04	+0.31	− 0.77	−2 48.30	15 47.18
	16 Pegasi								
	α Aquarii								

Beobachtungen in Wien.

Tag 1875	Name des Sterns	Kreislage	Zahl der Fäden	Durchgangs-zeit	Correct. für *i*	Correct. für *c*	Correct. für *k*	Uhr-Correct.	Differenz der Uhren
November 3	θ Pegasi	W	13	22h 4m 4.83s	+0.17s	−0.11s	+0.86s	−9.38s	+2m38.98s
Beobachter	41 Aquarii	W	6	22 7 35.00	+0.08	−0.12	+1.28	−9.36	+2 39.06
Weinek	θ Aquarii	W	7	22 10 25.47	+0.13	−0.11	+1.07	−9.37	+2 39.04
	Polstern L (O. C.)	W	6	22 23 11.88	+2.27	−1.37	−9.71		
	» L (O. C.)	O	7	22 23 10.13	+1.75	+1.02	−9.71		
	ζ Pegasi	O	13	22 35 24.98	+0.14	+0.08	+0.79	−9.53	+2 38.94
	68 Aquarii	O	13	22 41 1.70	+0.07	+0.09	+1.25	−9.62	+2 38.87
	λ Aquarii	O	13	22 46 17.09	+0.10	+0.08	+1.06	−9.67	+2 38.83
	α Piscis austr.	O	13	22 50 56.16	+0.04	+0.09	+1.13	−9.67	
	α Pegasi	O	13	22 58 43.64	+0.15	+0.08	+0.72	−9.59	
November 4	23 Hevelii	O	13	20 17 14.25	+0.16	+0.07	+0.88	−14.18	+2 35.17
Beobachter	π Capricorni	O	13	20 20 25.82	+0.09	+0.07	+0.24	−14.25	+2 35.22
Weinek	69 Aquilae	O	13	20 23 22.38	+0.14	+0.07	+1.00	−14.24	+2 35.15
	Polstern K (O. C.)	O	6	20 34 49.16	+1.17	+0.44	−4.42		
	» K (O. C.)	W	7	20 34 50.20	+1.45	−0.62	−4.42		
	15 Delphini	W	13	20 43 55.84	+0.22	−0.10	+0.77	−14.25	+2 35.22
	μ Aquarii	W	13	20 46 10.35	+0.15	−0.10	+1.09	−14.29	+2 35.23
	16 Delphini	W	13	20 49 56.16	+0.22	−0.10	+0.77	−14.19	+2 35.28
	θ Capricorni	W	13	20 59 10.97	+0.13	−0.10	+1.22	−14.33	+2 35.19
	61¹ Cygni	W	13	21 1 33.23	+0.36	−0.12	+0.28	−14.36	+2 35.11
	61² Cygni	W	13	21 1 34.73	+0.36	−0.12	+0.28	−14.37	+2 35.12
	γ Equulei	W	13	21 4 31.37	+0.24	−0.10	+0.81	−14.25	+2 35.11
	α Equulei	W	13	21 9 50.21	+0.22	−0.10	+0.88	−14.35	+2 35.12
	Polstern F (U. C.)	W	6	21 19 24.05	−1.40	+0.68	+6.90		
	» F (U. C.)	O	7	21 19 24.98	−1.17	−0.48	+6.90		
	ε Capricorni	O	13	21 30 20.89	+0.10	+0.07	+1.26	−14.59	
	d Aquarii	O	13	21 33 28.68	+0.18	+0.07	+0.93	−14.57	+2 34.83
	ε Pegasi	O	13	21 38 18.71	+0.20	+0.07	+0.81	−14.51	+2 34.84
	16 Pegasi	O	13	21 47 38.32	+0.25	+0.08	+0.55	−14.45	
	α Aquarii	O	13	21 59 38.05	+0.16	+0.07	+0.97	−14.67	
	θ Pegasi	O	13	22 4 9.85	+0.17	+0.07	+0.87	−14.59	+2 34.89
	41 Aquarii	O	13	22 7 40.09	+0.09	+0.07	+1.29	−14.66	+2 34.86
	θ Aquarii	O	13	22 10 30.59	+0.13	+0.07	+1.08	−14.67	+2 34.82
	Polstern L (O. C.)	O	6	22 23 15.39	+2.32	+0.86	−9.81		
	» L (O. C.)	W	7	22 23 16.39	+2.83	−1.22	−9.81		
	ζ Pegasi	W	13	22 35 30.25	+0.22	−0.10	+0.80	−14.78	+2 34.78
	68 Aquarii	W	13	22 41 7.01	+0.11	−0.10	+1.26	−14.80	+2 34.74
	λ Aquarii	W	13	22 46 22.28	+0.16	−0.10	+1.07	−14.76	+2 34.75
	α Piscis austr.	W	13	22 51 1.41	+0.07	−0.11	+1.15	−14.76	
	α Pegasi	W	13	22 58 48.85	+0.24	−0.10	+0.73	−14.73	
November 14	23 Hevelii	W	13	20 17 47.01	+0.07	−0.11	+0.95	−46.89	
Beobachter	69 Aquilae	W	13	20 23 55.01	+0.06	−0.11	+1.08	−46.84	
von Steeb	Polstern K (O. C.)	W	6	20 35 22.55	+0.54	−0.70	−4.79		
	» K (O. C.)	O	6	20 35 21.79	+0.16	+0.58	−4.79		
	θ Capricorni	O	13	20 59 43.83	+0.01	+0.09	+1.33	−47.02	
	61¹ Cygni	O	13	21 2 5.80	+0.04	+0.11	+0.31	−47.08	
	61² Cygni	O	13	21 2 7.29	+0.04	+0.11	+0.31	−47.07	
	γ Equulei	O	13	21 5 3.87	+0.02	+0.09	+0.88	−46.93	
	α Equulei	O	13	21 10 22.70	+0.02	+0.09	+0.96	−47.05	
	Polstern F (U. C.)	O	5	21 19 57.49	−0.14	−0.64	+7.48		
	» F (U. C.)	W	5	21 19 56.84	−0.32	+0.78	+7.48		
	ε Capricorni	W	13	21 30 53.32	+0.03	−0.12	+1.37	−47.03	
	d Aquarii	W	13	21 34 11.16	+0.05	−0.11	+1.00	−46.96	
	ε Pegasi	W	13	21 38 51.24	+0.06	−0.11	+0.88	−46.93	
	16 Pegasi	W	9	21 48 10.90	+0.07	−0.12	+0.59	−46.86	
	α Aquarii	W	13	22 0 10.45	+0.05	−0.11	+1.05	−47.01	

Beobachtungen in Leipzig.

Tag 1875	Name des Sterns	Kreislage	Zahl der Fäden	Durchgangs-zeit	Correct. für *i*	Correct. für *c*	Correct. für *k*	Uhr-Correct.	Längen-differenz
November 3	θ Pegasi	O	11	$22^h 6^m 45^s.28$	$-0^s.04$	$+0^s.31$	$-0^s.82$	$-2^m 48^s.36$	$15^m 47^s.18$
Beobachter	41 Aquarii	O	11	22 10 16.47	−0.02	+0.33	−1.18	−2 48.42	15 47.27
v. Steeb	θ Aquarii	O	11	22 13 6.32	−0.03	+0.31	−1.00	−2 48.41	15 47.25
	Polstern L (O. C.)	O	5	22 25 30.59	−0.53	+3.94	+8.15		
	» L (O. C.)	W	6	22 25 38.58	−0.11	−4.32	+8.15		
	ζ Pegasi	W	11	22 38 06.05	−0.01	−0.35	−0.76	−2 48.47	15 47.24
	68 Aquarii	W	11	22 43 43.50	0.00	−0.36	−1.16	−2 48.49	15 47.19
	λ Aquarii	W	11	22 48 58.50	−0.01	−0.34	−0.99	−2 48.50	15 47.16
	α Piscis austr.								
	α Pegasi								
November 4	23 Hevelii	O	11	20 19 51.01	−0.01	+0.31	−0.78	−2 49.35	15 47.24
Beobachter	π Capricorni	O	11	20 23 2.69	−0.01	+0.33	−1.07	−2 49.47	15 47.29
v. Steeb	69 Aquilae	O	11	20 25 59.31	−0.01	+0.31	−0.88	−2 49.39	15 47.23
	Polstern K (O. C.)	O	5	20 37 16.66	−0.11	+1.98	+3.42		
	» K (O. C.)	W	6	20 37 20.60	+0.06	−2.18	+3.42		
	15 Delphini	W	11	20 46 31.99	+0.01	−0.35	−0.70	−2 49.47	15 47.37
	μ Aquarii	W	11	20 47 48.01	0.00	−0.34	−0.95	−2 49.52	15 47.39
	16 Delphini	W	11	20 52 33.38	+0.01	−0.35	−0.70	−2 49.47	15 47.45
	θ Capricorni	W	11	21 1 48.83	0.00	−0.36	−1.06	−2 49.52	15 47.39
	61¹ Cygni	W	11	21 4 9.60	+0.01	−0.48	−0.32	−2 49.47	15 47.32
	61² Cygni	W	11	21 4 11.12	+0.01	−0.48	−0.32	−2 49.49	15 47.33
	γ Equulei	W	11	21 7 8.50	+0.01	−0.34	−0.73	−2 49.36	15 47.33
	α Equulei	W	11	21 12 27.45	+0.01	−0.34	−0.78	−2 49.47	15 47.35
	Polstern F (U. C.)	W	5	21 22 8.57	−0.05	+2.40	−5.57		
	» F (U. C.)	O	6	21 22 12.88	+0.10	−2.19	−5.57		
	ε Capricorni	O							
	d Aquarii	O	11	21 36 5.21	−0.01	+0.31	−0.82	−2 49.40	15 47.14
	ε Pegasi	O	11	21 40 55.08	−0.02	+0.31	−0.73	−2 49.35	15 47.17
	16 Pegasi	O							
	α Aquarii	O							
	θ Pegasi	O	11	22 6 46.31	−0.01	+0.31	−0.77	−2 49.48	15 47.30
	41 Aquarii	O	11	22 10 17.18	−0.01	+0.33	−1.11	−2 49.52	15 47.28
	θ Aquarii	O	11	22 13 7.31	−0.01	+0.31	−0.94	−2 49.49	15 47.25
	Polstern L (O. C.)	O	5	22 25 31.09	−0.21	+3.94	+7.70		
	» L (O. C.)	W	6	22 25 39.74	−0.11	−4.32	+7.70		
	ζ Pegasi	W	11	22 37 7.04	−0.01	−0.35	−0.72	−2 49.51	15 47.29
	68 Aquarii	W	11	22 43 44.48	0.00	−0.36	−1.09	−2 49.54	15 47.27
	λ Aquarii	W	11	22 48 59.46	−0.01	−0.34	−0.94	−2 49.51	15 47.30
	α Piscis austr.	W							
	α Pegasi	W							
November 11	23 Hevelii								
Beobachter	69 Aquilae								
Weinek	Polstern K (O. C.)								
	» K (O. C.)								
	θ Capricorni								
	61¹ Cygni								
	61² Cygni								
	γ Equulei								
	α Equulei								
	Polstern F (U. C.)								
	» F (U. C.)								
	ε Capricorni								
	d Aquarii								
	ε Pegasi								
	16 Pegasi								
	α Aquarii								

Beobachtungen in Wien.

Tag 1875	Name des Sterns	Kreislage	Zahl der Fäden	Durchgangszeit	Correct. für *i*	Correct. für *c*	Correct. für *k*	Uhr-Correct.	Differenz der Uhren
November 14 Beobachter von Steeb	θ Pegasi	W	13	22h 4m 42.25s	+ 0.05s	− 0.11s	+ 0.94s	− 46.90s	
	41 Aquarii	W	13	22 8 12.36	+ 0.02	− 0.12	+ 1.40	− 46.95	
	θ Aquarii	W	13	22 11 2.83	+ 0.04	− 0.11	+ 1.17	− 46.89	
	Polstern L (O. C.)	W	6	22 23 49.24	+ 0.71	− 1.40	− 10.64		
	» L (O. C.)	O	7	22 23 47.06	− 0.20	+ 1.14	− 10.64		
	ζ Pegasi	O	13	22 36 2 36	− 0.02	+ 0.09	+ 0.87	− 46.98	+ 2m 15.16s
	68 Pegasi	O	13	22 41 38.93	− 0.01	+ 0.10	+ 1.37	− 47.04	
	λ Aquarii	O	13	22 46 54.30	− 0.01	+ 0.09	+ 1.16	− 47.01	
	α Piscis austr.	O	13	22 51 33.19	0.00	+ 0.10	+ 1.57	− 46.97	+ 2 15.24
	α Pegasi	O	13	22 59 20.96	− 0.02	+ 0.09	+ 0.79	− 46.95	+ 2 15.25
	58 Pegasi	O	13	23 4 32.73	− 0.02	+ 0.09	+ 0.88	− 46.97	+ 2 15.29
	φ Aquarii	O	13	23 8 39.72	− 0.01	+ 0.09	+ 1.14	− 46.96	+ 2 15.25
	γ Piscium	O	13	23 11 30.06	− 0.01	+ 0.09	+ 0.99	− 46.99	+ 2 15.26
	Polstern M (O. C.)	O	6	23 28 51.32	− 0.27	+ 1.58	− 14.59		
	» M (O. C.)	W	7	23 28 53.92	+ 0.53	− 1.87	− 14.59		
	21 Piscium	W	11	23 43 52.64	+ 0.03	− 0.11	+ 1.02	− 46.97	+ 2 15.24
	φ Pegasi	W	13	23 46 57.09	+ 0.04	− 0.12	+ 0.78	− 46.89	+ 2 15.21
	ω Piscium	W	13	23 53 42.80	+ 0.03	− 0.11	+ 0.93	− 46.91	+ 2 15.28
	α Andromedae	W	13	0 2 45.23	+ 0.04	− 0.13	+ 0.53	− 46.85	+ 2 15.23
	γ Pegasi	W	13	0 7 37.40	+ 0.03	− 0.11	+ 0.79	− 46.90	+ 2 15.25
	12 Ceti	W	11	0 24 28.92	+ 0.02	− 0.11	+ 1.11	− 46.96	+ 2 15.23
	55 Piscium	W	13	0 34 10.49	+ 0.04	− 0.12	+ 0.68	− 46.86	
	β Ceti	W	12	0 38 8.16	+ 0.03	− 0.12	+ 1.34	− 46.94	+ 2 15.33
	58 Piscium	W	13	0 41 19.82	+ 0.03	− 0.11	− 0.85	− 46.91	+ 2 15.25
	Polstern A (O. C.)	W	6	0 58 10.63	+ 0.41	− 1.43	− 10.92		
	» A (O. C.)	O	7	0 53 08.99	0.00	− 1.17	− 10.92		
	η Ceti	O	11	1 3 7.87	0.00	+ 0.09	+ 1.21	− 47.09	+ 2 15.30
	φ Piscium	O	13	1 7 47.59	0.00	+ 0.10	+ 0.62	− 46.92	+ 2 15.32
	f Piscium	O	13	1 12 10.58	0.00	+ 0.09	+ 0.98	− 47.03	+ 2 15.29
November 16 Beobachter von Steeb	Polstern K (O. C.)	O	6	20 34 21.88	+ 0.13	+ 0.58	− 4.86		
	» K (O. C.)	W	5	20 34 22.20	+ 0.38	− 0 70	− 4.86		
	15 Delphini	W	13	20 43 28.24	+ 0.06	− 0.11	+ 0.85	+ 13.27	
	μ Aquarii	W	13	20 45 12.71	+ 0.04	− 0.11	+ 1.20	+ 13.20	
	16 Delphini	W	10	20 49 28.63	+ 0.06	− 0.11	+ 0.85	+ 13.26	
	γ Equulei	W	11	21 4 8.82	+ 0.06	− 0.11	+ 0.89	+ 13.26	
	α Equulei	W	13	21 9 22.60	+ 0.05	− 0.11	+ 0.97	+ 13.20	
	Polstern F (U. C.)	W	6	21 18 56.88	− 0.82	+ 0.78	+ 7.58		
	» F (U. C.)	O	7	21 18 57 59	+ 0.05	− 0.64	+ 7.58		
	d Aquarii	O	13	21 33 0.82	− 0.01	+ 0.09	+ 1.02	+ 13.21	
	ε Pegasi	O	13	21 37 50.89	− 0.01	+ 0.09	+ 0.90	+ 13.26	+ 3 16.60
	16 Pegasi	O	13	21 47 10.60	− 0.01	+ 0.10	+ 0.60	+ 13.27	
	α Aquarii	O	13	21 59 10.12	− 0.01	+ 0.09	+ 1.06	+ 13.16	+ 3 16.60
	θ Pegasi	O	13	22 3 44.97	− 0.01	+ 0.09	+ 0.96	+ 13.20	+ 3 16.59
	41 Aquarii	O	13	22 7 12.08	0.00	+ 0.10	+ 1.42	+ 13.10	
	θ Aquarii	O	13	22 10 2.57	− 0.01	+ 0.09	+ 1.19	+ 13.19	+ 3 16.60
	Polstern L (O. C.)	O	6	22 22 46.66	− 0.10	+ 1.14	− 10.79		
	» L (O. C.)	W	7	22 22 48.79	+ 0.40	− 1.40	− 10.79		
	ζ Pegasi	W	13	22 35 2.24	+ 0.03	− 0.11	+ 0.88	+ 13.27	+ 3 16.67
	68 Aquarii	W	13	22 40 38.83	+ 0.02	− 0.12	+ 1.39	+ 13.21	
	λ Aquarii	W	13	22 45 54.21	+ 0.02	− 0.11	+ 1.18	+ 13.22	+ 3 16.70
	α Piscis austr.	W	12	22 50 33.24	+ 0.01	− 0.13	+ 1.59	+ 13.17	+ 3 16.63
	α Pegasi	W	13	22 58 20.84	+ 0.03	− 0.11	+ 0.84	+ 13.29	+ 3 16.58

Beobachtungen in Leipzig.

Tag 1875	Name des Sterns	Kreislage	Zahl der Fäden	Durchgangszeit	Correct. für *i*	Correct. für *c*	Correct. für *k*	Uhr-Correct.	Längendifferenz
November 14	θ Pegasi								
Beobachter	11 Aquarii								
Weinek	θ Aquarii								
	Polstern L (O. C.)	W	3	22h25m50s.27	+ 0s.17	— 4s.78	+ 7s.55		
	» L (O. O.)	O	5	22 25 41.12	— 0.14	+ 4.40	+ 7.55		
	ζ Pegasi	O	11	22 38 18.82	— 0.01	+ 0.35	— 0.71	— 3m2s.14	15m47s.08
	68 Aquarii	O							
	λ Aquarii	O							
	α Piscis austr.	O	11	22 53 50.92	0.00	+ 0.40	— 1.21	— 3 2.21	15 47.15
	α Pegasi	O	11	23 1 37.37	0.00	+ 0.36	— 0.66	— 3 2.20	15 47.13
	58 Pegasi	O	11	23 6 49.34	+ 0.01	+ 0.35	— 0.72	— 3 2.26	15 47.20
	φ Aquarii	O	11	23 10 56.74	0.00	+ 0.35	— 0.91	— 3 2.21	15 47.15
	γ Piscium	O	11	23 13 46.83	+ 0.01	+ 0.35	— 0 80	— 3 2.25	15 47.16
	Polstern M (O. C.)	O	5	23 30 36.55	+ 0.14	+ 5.88	+ 10.39		
	» M (O. C.)	W	4	23 30 48.10	+ 0.54	— 6.32	+ 10.39		
	21 Piscium	W	10	23 46 9.99	+ 0.08	— 0.37	— 0.82	— 3 2.21	15 47.11
	φ Pegasi	W	11	23 49 11.01	+ 0.04	— 0.39	— 0.61	— 3 2.20	15 47.08
	ω Piscium	W	11	23 56 0.03	+ 0.08	— 0.37	— 0.76	— 3 2.19	15 47.15
	α Andromedae	W	11	0 5 1.75	+ 0.05	— 0.42	— 0.47	— 3 2.08	15 47.09
	γ Pegasi	W	11	0 9 54.36	+ 0.04	— 0.38	— 0.66	— 3 2,15	15 47.10
	12 Ceti	W	11	0 26 46.41	+ 0.03	— 0.37	— 0.88	— 3 2.19	15 47.07
	55 Piscium	W							
	β Ceti	W	11	0 40 26.15	+ 0.02	— 0.39	— 1.03	— 3 2.27	15 47.16
	58 Piscium	W	11	0 43 36.87	+ 0.05	— 0.38	— 0.69	— 3 2.16	15 47.09
	Polstern A (O. C.)	W	5	0 55 11.15	+ 0.64	— 4.84	+ 7.75		
	» A (O. C.)	O	6	0 55 02.16	+ 0.32	+ 4.50	+ 7.75		
	η Ceti	O	9	1 5 24.56	+ 0.01	+ 0.35	— 0.95	— 3 2.39	15 47.11
	φ Piscium	O	2	1 10 3.76	+ 0.03	+ 0.38	— 0.53	— 3 2.24	15 47.12
	f Piscium	O	11	1 14 27.36	+ 0.02	+ 0.35	— 0.79	— 3 2.32	15 47.09
November 16	Polstern K (O. C.)								
Beobachter	» K (O. C.)								
Weinek	15 Delphini								
	μ Aquarii								
	16 Delphini								
	γ Equulei								
	α Equulei								
	Polstern F (U. C.)	W	5	21 22 24.57	— 0.44	+ 2.47	— 5.53		
	» F (U. C.)	O	5	21 22 29.30	— 0.30	— 2.28	— 5.53		
	d Aquarii	O							
	ε Pegasi	O	11	21 41 8.83	+ 0.05	+ 0.33	— 0.73	— 3 3.34	15 47.04
	16 Pegasi	O							
	α Aquarii	O	11	22 2 20.36	+ 0.03	+ 0.32	— 0.85	— 3 3.44	15 47.04
	θ Pegasi	O	11	22 7 0.02	+ 0.08	+ 0.33	— 0.77	— 3 3.39	15 47.04
	11 Aquarii	O							
	θ Aquarii	O	11	22 13 21.13	+ 0.02	+ 0.33	— 0.94	— 3 3.41	15 47,05
	Polstern L (O. C.)	O	4	22 25 41.79	+ 0.44	+ 4.10	+ 7.65		
	» L (O. C.)	W	1	22 25 49.94	+ 0.73	— 4.48	+ 7.65		
	ζ Pegasi	W	11	22 38 20.72	+ 0.05	— 0.36	— 0.72	— 3 3.40	15 47.11
	68 Aquarii	W							
	λ Aquarii	W	5	22 49 13.26	+ 0.04	— 0.35	— 0.94	— 3 3.48	15 47.12
	α Piscis austr.	W	11	22 53 52.97	+ 0.02	— 0.40	— 1.28	— 3 3.46	15 47.05
	α Pegasi	W	11	23 1 39.19	+ 0.07	— 0.36	— 0.66	— 3 3.29	15 47.00

Beobachtungen in Wien.

Tag 1875	Name des Sterns	Kreislage	Zahl der Fäden	Durchgangs-zeit	Correct. für i	Correct. für c	Correct. für k	Uhr-Correct.	Differenz der Uhren
November 16	58 Pegasi	W	13	23h 3m 32s.57	+ 0s.03	− 0s.11	+ 0.90	+ 13s.31	+ 3m 16s.84
Beobachter	φ Aquarii	W	13	23 07 39.63	+ 0.02	− 0.11	+ 1.16	+ 13.27	+ 3 16.70
von Steeb	γ Piscium	W	13	23 10 29.92	+ 0.03	− 0.11	+ 1.01	+ 13.28	
	Polstern M (O. C.)	W	6	23 27 52.46	+ 0.53	− 1.87	− 14.79		
	» M (O. C.)	O	7	23 27 50.15	− 0.53	+ 1.53	− 14.79		
	21 Piscium	O	13	23 42 52.30	− 0.03	+ 0.09	+ 1.04	+ 13.20	
	φ Pegasi	O	13	23 45 56.83	− 0.04	+ 0.09	+ 0.74	+ 13.22	
	ω Piscium	O	13	23 52 42.55	− 0.03	+ 0.09	+ 0.95	+ 13.17	
	α Andromedae	O	13	0 1 45.00	− 0.04	+ 0.10	+ 0.54	+ 13.21	+ 3 16.67
	γ Pegasi	O	13	0 6 37.17	− 0.03	+ 0.09	+ 0.81	+ 13.17	+ 3 16.67
	12 Ceti	O	13	0 23 28.69	− 0.02	+ 0.09	+ 1.12	+ 13.10	+ 3 16.58
	55 Piscium	O	13	0 33 10.25	− 0.04	+ 0.10	+ 0.69	+ 13.22	+ 3 16.49
	β Ceti	O	13	0 37 7.92	− 0.02	+ 0.09	+ 1.36	+ 13.11	+ 3 16.61
	58 Piscium	O	13	0 40 19.61	− 0.03	+ 0.09	+ 0.86	+ 13.16	
	Polstern A (O. C.)	O	6	0 52 9.37	− 0.41	+ 1.17	− 11.08		
	» A (O. C.)	W	7	0 52 11.45	+ 0.10	− 1.43	− 11.08		
	η Ceti	W	13	1 2 7.37	+ 0.01	− 0.11	+ 1.23	+ 13.09	+ 3 16.66
	φ Piscium	W	13	1 6 47.58	+ 0.01	− 0.12	+ 0.63	+ 13.30	+ 3 16.78
	f Piscium	W	13	1 11 10.52	+ 0.01	− 0.11	+ 1.00	+ 13.20	+ 3 16.70
	η Piscium	W	13	1 24 37.44	+ 0.01	− 0.11	+ 0.84	+ 13.23	+ 3 16.71
	π Piscium	W	13	1 30 18.06	+ 0.01	− 0.11	+ 0.86	+ 13.22	+ 3 16.60
	ν Piscium	W	13	1 34 45.18	+ 0.01	− 0.11	+ 0.97	+ 13.19	+ 3 16.59
	Polstern G (U. C.)	W	6	1 45 29.68	− 0.06	+ 0.95	+ 9.09		
	» G (U. C.)	O	7	1 45 31.16	+ 0.17	− 0.78	+ 9.09		
	60 Ceti	O	13	1 56 36.49	− 0.02	+ 0.09	+ 1.06	+ 13.15	
	α Arietis	O	13	1 59 57.70	− 0.03	+ 0.10	+ 0.65	+ 13.21	+ 3 16.68
	15 Arietis	O	13	2 3 31,83	− 0.03	+ 0.09	+ 0.73	+ 13.28	+ 3 16.59
	67 Ceti	O	13	2 10 34.30	− 0.02	+ 0.09	+ 1.16	+ 13.16	+ 3 16.62
	ξ² Ceti	O							

VII. Ableitung der Endresultate.

a. *Aus gleichen an jedem Abend auf beiden Stationen beobachteten Sternen.*

Obwohl die Beobachter bemüht gewesen sind, an den heiteren Abenden auf beiden Stationen dieselben Sterne zu beobachten, ist dies doch nicht immer gelungen, und ebenso wie bei früher ausgeführten Längenbestimmungen werde ich daher versuchen, das Resultat einmal aus den identischen Sternen, welche auf beiden Stationen an jedem Abend gesehen sind, anderntheils dann aber auch aus allen beobachteten Sternen abzuleiten.

Um zunächst zu untersuchen, ob eine Differenz zwischen Kreis-

Beobachtungen in Leipzig.

Tag 1875	Name des Sterns	Kreislage	Zahl der Fäden	Durchgangs-zeit	Correct. für i	Correct. für c	Correct. für k	Uhr-Correct.	Längen-differenz
vember 16	58 Pegasi	W	1	23h 6m 54s.20	+ 0.08	− 0.35	− 0.73	− 3m 3s.50	15m 47s.24
obachter	φ Aquarii	W	4	23 10 58.62	+ 0.06	− 0.35	− 0.92	− 3 3.43	15 47.12
Weinek	γ Piscium	W							
	Polstern M (O. C.)	W	2	23 30 48.62	+ 1.47	− 5.93	+ 10.54		
	» M (O. C.)	O	2	23 30 37.66	+ 1.08	+ 5.49	+ 10.54		
	21 Piscium	O							
	φ Pegasi	O							
	ω Piscium	O							
	α Andromedae	O	10	0 5 2.31	+ 0.07	+ 0.37	− 0.48	− 3 3.46	15 47.08
	γ Pegasi	O	8	0 9 54.98	+ 0.06	+ 0.33	− 0.67	− 3 3.50	15 47.08
	12 Ceti	O	11	0 26 47.00	+ 0.04	+ 0.32	− 0.89	− 3 3.48	15 46.99
	55 Piscium	O	11	0 36 27.67	+ 0.05	+ 0.35	− 0.58	− 3 3.26	15 46.88
	β Ceti	O	11	0 40 26.66	+ 0.02	+ 0.34	− 1.06	− 3 3.50	15 47.00
	58 Piscium	O							
	Polstern A (O. C.)	O	5	0 55 3.00	+ 0.62	+ 4.20	+ 7.86		
	» A (O. C.)	W	6	0 55 12.38	+ 0.93	− 4.54	+ 7.86		
	η Ceti	W	11	1 5 26.41	+ 0.04	− 0.36	− 0.97	− 3 3.55	15 47.03
	φ Piscium	W	11	1 10 5.71	+ 0.08	− 0.38	− 0.54	− 3 3.48	15 47.16
	f Piscium	W	11	1 14 29.21	+ 0.06	− 0.35	− 0.80	− 3 3.50	15 47.09
	η Piscium	W	11	1 27 55.80	+ 0.08	− 0.36	− 0.66	− 3 3.48	15 47.10
	π Piscium	W	11	1 33 36.76	+ 0.08	− 0.36	− 0.70	− 3 3.38	15 46.98
	ν Piscium	W	11	1 38 3.70	+ 0.07	− 0.35	− 0.78	− 3 3.40	15 46.97
	Polstern G (U. C.)	W	5	1 49 1.28	− 0.60	+ 3.02	− 6.61		
	» G (U. C.)	O	5	1 49 6.68	− 0.42	− 2.80	− 6.61		
	60 Ceti	O							
	α Arietis	O	11	2 3 15.24	+ 0.07	+ 0.35	− 0.56	− 3 3.47	15 47.04
	15 Arietis	O	11	2 6 49.41	+ 0.06	+ 0.34	− 0.61	− 3 3.31	15 46.97
	67 Ceti	O	11	2 13 52.70	+ 0.04	+ 0.33	− 0.92	− 3 3.46	15 47.00
	ξ² Ceti	O	11	2 24 38.47	+ 0.05	+ 0.33	− 0.75	− 3 3.45	

lage West und Kreislage Ost besteht, ferner ob die einzelnen von einander unabhängigen Zeitbestimmungen — unter Zeitbestimmung ist die Beobachtung eines Polsterns und sechs bis acht Zeitsternen verstanden — dieselben Resultate geben, habe ich auf beiden Stationen für jede Kreislage zunächst für die Uhrstände und für die Längendifferenzen die Mittel genommen.

Die erhaltenen Werthe sind die folgenden:

Tabelle XXX. Mittelwerthe aus

1875	Kreis-lage	Wiener Uhrzeit	Uhrcorrection	Zahl der Sterne	Kreis-lage
October 8	W	20ʰ20ᵐ7	−0ᵐ31ˢ817	3	W
	O	20 47.0	−0 31.837	3	O
	O	21 4.7	−0 31.872	4	O
	W	21 42.2	−0 31.748	5	W
	W	22 7.6	−0 31.737	3	W
	O	22 41.3	−0 31.757	3	O
October 9	O	21 3.6	−0 30.068	5	O
	W	21 42.1	−0 29.940	5	W
	W	22 7.7	−0 29.897	3	W
	O	22 46.8	−0 29.918	5	O
	O	23 8.0	−0 29.880	3	O
	W	23 48.3	−0 29.748	4	W
October 19	W				W
	W	21 3.8	−0 16.100	4	W
	O	21 42.1	−0 16.122	5	O
	O	22 7.5	−0 16.110	3	O
	W	22 45.5	−0 15.980	4	W
	W	23 7.7	−0 15.920	3	W
	O	23 52.7	−0 15.935	4	O
November 2	O	20 54.3	−0 4.090	5	O
	W	21 41.7	−0 4.208	5	W
	W	22 7.3	−0 4.290	3	W
	O	22 46.3	−0 4.484	5	O
	O	23 7.5	−0 4.523	3	O
	W	23 54.3	−0 4.578	5	W
November 3	W	20 20.2	−0 8.893	3	W
	O	20 46.6	−0 9.093	3	O
	O	21 3.7	−0 9.207	4	O
	W	21 41.8	−0 9.258	5	W
	W	22 7.4	−0 9.370	3	W
	O	22 46.5	−0 9.616	5	O
November 4	O	20 20.3	−0 14.223	3	O
	W	20 46.6	−0 14.243	3	W
	W	21 3.3	−0 14.332	5	W
	O	21 41.9	−0 14.558	5	O
	O	22 7.4	−0 14.640	3	O
	W	22 46.6	−0 14.756	5	W

den Beobachtungsresultaten.

Leipziger Uhrzeit	Uhrcorrection	Zahl der Sterne	Längendifferenz	Zahl der Sterne
20ʰ22ᵐ4	−2ᵐ16ˢ533	3	15ᵐ46ˢ963	3
20 48.7	−2 16.603	3	46.973	3
21 6.6	−2 16.620	3	46.930	2
21 36.1	−2 16.570	3	46.927	3
22 9.5	−2 16.633	3	46.950	3
22 43.1	−2 16.673	3	46.907	3
21 6.6	−2 17.650	3	15 46.940	3
21 36.1	−2 17.627	3	46.933	3
22 9.5	−2 17.687	3	47.017	3
22 43.1	−2 17.770	3	46.990	3
23 9.8	−2 17.727	3	46.977	3
23 49.7	−2 17.713	3	47.013	3
20 49.0	−2 30.390	3		
21 5.3	−2 30.407	4	15 47.197	3
21 36.3	−2 30.437	3	47.137	3
22 9.7	−2 30.500	3	47.177	3
22 48.9	−2 30.560	4	47.257	3
23 10.0	−2 30.553	3	47.320	3
23 49.9	−2 30.437	3	47.127	3
21 5.9	−2 47.626	5	15 47.192	4
21 36.6	−2 47.630	3	47.220	3
22 10.0	−2 47.653	3	47.287	3
22 48.2	−2 47.664	5	47.208	5
23 10.3	−2 47.683	3	47.247	3
23 50.2	−2 47.670	3	47.293	3
20 26.3	−2 48.317	3	15 47.293	3
20 49.3	−2 48.357	3	47.213	3
21 5.9	−2 48.354	5	47.135	5
21 36.6	−2 48.347	3	47.187	2
22 10.0	−2 48.397	3	47.227	3
22 43.6	−2 48.487	3	47.187	3
20 23.0	−2 49.413	3	15 47.253	3
20 49.0	−2 49.487	3	47.403	3
21 6.0	−2 49.502	5	47.344	5
21 38.5	−2 49.375	2	47.155	2
22 10.1	−2 49.497	3	47.227	3
22 43.6	−2 49.520	3	47.287	3

1875	Kreis-lage	Wiener Uhrzeit	Uhrcorrection	Zahl der Sterne	Kreis-lage
November 14	W	$20^h 20^m 8$	$-0^m 46^s 865$	2	
	O	21 3.9	−0 47.050	5	
	W	21 42.5	−0 46.958	5	
	W	22 8.0	−0 46.913	3	
	O	22 47.1	−0 46.990	5	O
	O	23 8.3	−0 46.973	3	O
	W	23 59.9	−0 46.913	6	W
	W	0 37.9	−0 46.903	3	W
	O	1 7.7	−0 47.013	3	O
November 16	W	20 46.2	+ 13.243	3	
	W	21 6.7	+ 13.230	2	
	O	21 44.3	+ 13.225	4	O
	O	22 7.0	+ 13.163	3	O
	W	22 46.1	+ 13.232	5	W
	W	23 7.2	+ 13.287	3	W
	O	23 58.9	+ 13.182	6	O
	O	0 36.9	+ 13.167	3	O
	W	1 6.7	+ 13.197	3	W
	W	1 29.9	+ 13.213	3	W
	O	2 2.7	+ 13.200	4	O

Um die Differenzen zwischen Kreislage Ost und Kreislage West zu finden, sind die in der vorstehenden Tabelle enthaltenen Uhrcorrectionen auf dieselben Uhrzeiten zu reduciren, und dazu bedarf man der Uhrgänge. Dieselben sind abgeleitet aus den erhaltenen Zeitbestimmungen, selbstverständlich mit Berücksichtigung der zwischen Kreis Ost und Kreis West bestehenden Differenz, und hat sich gefunden:

	Wiener Uhr stündlicher Gang	Leipziger Uhr stündlicher Gang
October 8	$+0^s053$	-0^s041
» 9	+0.088	−0.042
» 19	+0.086	−0.045
November 2	−0.185	−0.020
» 3	−0.255	−0.059
» 4	−0.246	−0.027
» 14	+0.010	−0.051
» 16	−0.008	−0.005

Am Pendel der Wiener Uhr wurde, wie schon erwähnt, einige Mal geschraubt, daher die starken Aenderungen des Ganges.



Leipziger Uhrzeit	Uhrcorrection	Zahl der Sterne	Längendifferenz	Zahl der Sterne
22h 51m.3	−3m 2s.183	3	15m 47s.127	3
23 10.5	−3 2.240	3	47.170	3
0 2.4	−3 2.170	6	47.100	6
0 42.0	−3 2.205	2	47.125	2
1 10.0	−3 2.317	3	47.107	3
21 51.8	−3 3.390	2	15 47.040	2
22 10.2	−3 3.400	2	47.045	2
22 50.8	−3 3.407	4	47.070	4
23 8.9	−3 3.465	2	47.180	2
0 13.9	−3 3.480	3	47.050	3
0 38.4	−3 3.380	2	46.940	2
1 10.0	−3 3.510	3	47.093	3
1 33.2	−3 3.420	3	47.017	3
2 12.1	−3 3.422	4	47.003	3

Das Gewicht einer jeden der folgenden Differenzen Kreis Ost — Kreis West ist nach der Formel:

$$\frac{4pp'}{p+p'}$$

berechnet und jedem Sterne das Gewicht 1 gegeben.

Es findet sich:

1875, Tag	Wien		Leipzig		Längendifferenz	
	Ost — West	Gewicht	Ost — West	Gewicht	Ost — West	Gewicht
October 8	−0s.043	6.0	−0s.055	6.0	+0s.010	6.0
	−0.090	8.9	−0.070	6.0	+0.003	4.8
	−0.049	6.0	−0.017	6.0	−0.043	6.0
October 9	−0.071	10.0	−0.044	6.0	+0.007	6.0
	−0.078	7.5	−0.059	6.0	−0.027	6.0
	−0.073	6.9	−0.042	6.0	−0.036	6.0
October 19	−0.077	8.9	−0.007	6.9	−0.060	6.0
	−0.075	6.9	+0.031	6.9	−0.080	6.0
	−0.080	6.9	+0.146	6.0	−0.193	6.0

1875, Tag	Wien		Leipzig		Längendifferenz	
	Ost — West	Gewicht	Ost — West	Gewicht	Ost — West	Gewicht
November 2	—0ˢ026	10.0	—0ˢ006	7.5	—0ˢ028	6.9
	—0.072	7.5	+0.002	7.5	—0.079	7.5
	—0.089	7.5	—0.026	6.0	—0.046	6.0
November 3	—0.088	6.0	—0.017	6.0	—0.080	6.0
	—0.113	8.9	—0.037	7.5	—0.052	5.7
	—0.080	7.5	—0.057	6.0	—0.040	6.0
November 4	—0.088	6.0	+0.072	6.0	—0.150	6.0
	—0.068	10.0	+0.142	5.7	—0.189	5.7
	—0.045	7.5	+0.008	6.0	—0.010	6.0
November 14	—0.192	5.7	—0.114	8.0	+0.048	12.0
	—0.084	7.5	—0.028	4.8	—0.018	4.8
	—0.051	8.0				
	—0.115	6.0				
November 16	0.000	5.3	+0.004	5.3	—0.028	8.0
	—0.074	7.5	—0.009	4.8	—0.130	4.8
	—0.098	8.0	+0.127	4.8	—0.153	4.8
	—0.034	6.0	+0.001	6.9	—0.014	6.0
	—0.009	6.9				

Beachtet man, dass October 8, 9, November 14 und 16 die Beobachter an ihren Wohnorten beobachteten, October 19, November 2, 3 und 4 aber gewechselt hatten, so hat man mit Berücksichtigung der Gewichte:

	Wiener Instrument			Leipziger Instrument		Längendifferenz	
	Ost — West	Gewicht		Ost — West	Gewicht	Ost — West	Gewicht
v. Steeb in Wien	—0.079 ±0.007	96.2	Weinek in Leipzig	—0.030 ±0.011	70.6	—0.023 ±0.009	75.2
Weinek in Wien	—0.074 ±0.005	98.6	v. Steeb in Leipzig	+0.018 ±0.012	78.0	—0.088 ±0.011	73.8

Auf beiden Stationen ist daher eine Differenz zwischen Kreis Ost und Kreis West, aber bei dem Wiener Instrument ist die Differenz bei beiden Beobachtern nicht nur nahe dieselbe, sondern sie ist auch beträchtlich und scheint reell zu sein; bei dem Leipziger Instrument hat sie bei den beiden Beobachtern verschiedenes Zeichen und ist ausserdem klein, so dass, wie man aus den wahrscheinlichen Fehlern ersieht, an der Realität gezweifelt werden kann. Der Einfluss, welcher aus dem nicht identischen Ver-

fahren der beiden Beobachter die Neigung anzubringen [s. S. 296 (16)] herrührt, ist im Mittel, wie man sich leicht überzeugen kann, verschwindend klein. Ob die Differenz zwischen den Kreislagen von einer seitlichen Biegung der Instrumente, oder von einer Verschiedenheit der persönlichen Gleichung bei Polsternen und Zeitsternen, oder von der entgegengesetzten Bewegungsrichtung der Sterne in den Fernröhren mit gebrochener Achse herrührt, braucht hier nicht erörtert zu werden — ich bin geneigt, mich für letzteres auszusprechen.

Dadurch, dass man Kreis Ost und Kreis West immer mit einander verbindet, fällt der Fehler heraus, und es ist, um ein Endresultat abzuleiten, noch erforderlich, sich für eine Gewichtseinheit zu entscheiden. Von der Anzahl der Polsterne hängt die Sicherheit der Ermittelung der Collimation und des Azimutes ab und die in den Instrumentalfehlern begangenen Fehler gehen unmittelbar in die Uhrcorrectionen und daher auch in die Längendifferenzen über. Zu denselben kommen die Beobachtungsfehler der Zeitsterne, und nehmen wir der Einfachheit wegen an, dass die Genauigkeit bei allen Polsternen die gleiche und ebenso auch die Genauigkeit bei den verschiedenen Zeitsternen unter einander dieselbe sei, d. h. nehmen wir nicht Rücksicht auf die Anzahl der beobachteten Fäden und auf die Verschiedenheit der Declination und bezeichnen den mittleren Fehler, den eine Polsternbeobachtung hervorbringt, mit m, den einer Zeitsternbeobachtung mit n, so ist der mittlere Fehler für p Polsterne in Verbindung mit z Zeitsternen gleichzusetzen

$$\sqrt{\frac{m^2}{p} + \frac{n^2}{z}},$$

und das Gewicht ist proportional der Grösse:

$$\frac{pz}{n^2 p + m^2 z}.$$

Nehmen wir als Gewichtseinheit die Combination eines Polsternes mit einem Zeitsterne an, so wird die Bedingung zu erfüllen sein, dass

$$m^2 + n^2 = 1$$

sein muss.

Da die Beobachtungsfehler, wenn man mit Auge und Ohr beobachtet, sich zusammensetzen aus dem Gesichts- und dem Gehörfehler, oder, wenn man registrirt, aus dem Gesichts- und dem

Handfehler (eigentlich dem Fehler, der durch das Signalgeben mit der Hand entsteht), so kann man den Fehler von der Form

$$\frac{a+b\sec\delta}{\sqrt{f}}$$

setzen, wo b der Gesichts-, a der Gehör- oder Handfehler, f die Anzahl der Fäden, δ die Declination des Sternes bezeichnet. Aus einer Anzahl von Beobachtungen von Zeitsternen und aus den Polsternen habe ich gefunden, dass bei $f = 11$ Fäden für einen Zeitstern nahe

$$\frac{a+b\sec\delta}{\sqrt{f}} = 0^s03$$

ist; aus einem Polstern folgt der mittlere Fehler nahe zu:

$$0^s02.$$

Setze ich daher:

$$\frac{m}{n} = \frac{2}{3},$$

und erfülle die Gleichung:

$$m^2 + n^2 = 1 \,,$$

so wird

$$n^2 = \frac{9}{13} = 0.7$$

$$m^2 = \frac{4}{13} = 0.3 \,,$$

und das Gewicht g findet sich nach obiger Gleichung:

$$g = \frac{p\,z}{0.7\,p + 0.3\,z} \; {}^{*)}.$$

Ist g_w das in Wien, g_l das in Leipzig gefundene Gewicht, so ist das Gewicht der Differenz der Uhrcorrectionen und der Längendifferenz:

$$G = \frac{g_w g_l}{g_w + g_l} \,.$$

Für die an beiden Stationen beobachteten identischen Sterne findet sich als Längendifferenz aus der Tabelle XXX, wenn man einfach aus den in Kreislage Ost und Kreislage West beobachteten Sternen das Mittel nimmt, die Gewichte nach der gegebenen Formel berechnet und die persönliche Gleichung:

$$\text{Steeb} - \text{Weinek} = s - w$$

nennt:

*) Diese anzuwendende Gewichts-Formel hat Herr von Oppolzer mir mitgetheilt.

1875	Längendifferenz — (s — w)	p	z	Gewicht
October 8	$15^m 46^s.942$	3 und 3	17	3.5
» 9	46.978	3 » 3	18	3.6
November 14	47.124	5 » 3	17	4.1
» 16	47.053	6 » 5	24	5.8
Mittel	$15^m 47^s.031$			17.0

1875	Längendifferenz + (s—w)	p	z	Gewicht
October 19	$15^m 47^s.202$	3 und 4	18	4.0
November 2	47.241	3 » 3	21	3.7
» 3	47.207	3 » 3	19	3.7
» 4	47.286	3 » 3	19	3.7
Mittel	$15^m 47^s.233$			15.1

Es ist demnach die persönliche Gleichung

$$s - w = + 0^s.101.$$

Mit Berücksichtigung der persönlichen Gleichung wird daher die Längendifferenz:

October 8	$15^m 47^s.043$	Gewicht 3.5
» 9	47.079	3.6
» 19	47.101	4.1
November 2	47.140	5.8
» 3	47.106	4.0
» 4	47.185	3.7
» 14	47.225	3.7
» 16	47.154	3.7
Längendifferenz = $15^m 47^s.130 \pm 0^s.012$		Gewicht 32.1

Nimmt man gar keine Rücksicht auf die Anzahl der beobachteten Sterne oder giebt man, wie ich es früher gethan, jedem Abend dasselbe Gewicht, so erhält man mit Hilfe der Werthe in beiden obigen Tabellen:

$$\text{Längendifferenz} - (s - w) = 15^m 47^s.024$$
$$\text{»} \quad + (s - w) = 15 \; 47.234$$
$$\text{mithin} \quad s - w = + 0^s.105,$$

und die Längendifferenz:

October 8	15ᵐ47ˢ.047
» 9	47.083
» 19	47.097
November 2	47.136
» 3	47.102
» 4	47.181
» 14	47.229
» 16	47.158
Mittel	15ᵐ47ˢ.129 ± 0ˢ.014

Um noch, wie oben schon gesagt ist, zu untersuchen, ob die einzelnen Zeitbestimmungen dieselben Resultate geben, stelle ich die Resultate nach den Polsternen zusammen, bringe aber gleich die gefundene persönliche Gleichung

$$s - w = + 0^s.101$$

überall an, um die Resultate direct vergleichbar zu haben.

Es findet sich die Längendifferenz aus den Zeitbestimmungen mit:

	Polstern K	Polstern F	Polstern L	Polstern M	Polstern A	Polstern G
Octbr. 8	15ᵐ47ˢ.069	15ᵐ47ˢ.030	15ᵐ47ˢ.030			
» 9		47.038	47.105	15ᵐ47.096		
» 19		47.066	47.116	47.122		
Novbr. 2		47.105	47.146	47.169		
» 3	47.142	47.060	47.106			
» 4	47.227	47.148	47.181			
» 14			47.239*	47.236	15ᵐ47ˢ.217	
» 16		47.152*	47.159	47.216	47.118	15ᵐ47ˢ.111
Mittel	15ᵐ47ˢ.146	15ᵐ47ˢ.080	15ᵐ47ˢ.128	15ᵐ47ˢ.168	15ᵐ47ˢ.168	15ᵐ47ˢ.111

Mittel 15ᵐ47ˢ.128 ± 0ˢ.008.

Der wahrscheinliche Fehler ist so klein gefunden, weil jeder einzelnen Zeitbestimmung das Gewicht 1 gegeben ist. Berechnet man noch die wahrscheinlichen Fehler zu den Mittelwerthen der Längendifferenz, geordnet nach den Polsternen, so erhält man:

*) An die Kreislage Ost ist nach S. 350 + 0ˢ.011 = ½ (West—Ost) angebracht und diesen Werthen nur halbes Gewicht gegeben.

Längendifferenz = 15ᵐ47ˢ146 ± 0ˢ031
47.080 ± 0.013
47.128 ± 0.015
47.168 ± 0.018
47.168 ± 0.034
47.111

wovon der erste, dritte, fünfte und sechste Werth ganz innerhalb der wahrscheinlichen Fehler mit dem Mittelwerth übereinstimmt, während der zweite und vierte um die geringe Grösse von einigen hundertstel Secunden ausserhalb der Grenzen liegt.

Um zu sehen, ob nach Rectascension und Declination der Sterne geordnet, sich auch die genügende Uebereinstimmung zeigt, sind die Längendifferenzen in den folgenden Tabellen nach den genannten Polarcoordinaten geordnet zusammengestellt. Um die Werthe mit einander wieder vergleichbar zu haben, ist die persönliche Gleichung angebracht, auf die Differenz zwischen den Kreislagen aber keine Rücksicht genommen, weil dieselbe im Mittel herausfällt.

Es findet sich:

Stern	AR	Längen-differenz	Zahl der Beobacht.
23 Hevelii	20ʰ 17ᵐ	15ᵐ47ˢ140	3
π Capricorni	20 20	47.136	3
69 Aquilae	20 23	47.143	3
15 Delphini	20 44	47.170	3
μ Aquarii	20 46	47.143	3
16 Delphini	20 50	47.186	3
θ Capricorni	20 59	15 47.117	5
61¹ Cygni	21 1	47.111	4
61² Cygni	21 1	47.229	1
γ Equulei	21 4	47.096	5
α Equulei	21 10	47.081	6
ε Capricorni	21 30	17.042	5
d Aquarii	21 33	47.070	6
ε Pegasi	21 38	47.080	7
α Aquarii	21 59	47.141	1
θ Pegasi	22 4	15 47.128	7
41 Aquarii	22 7	47.118	6
θ Aquarii	22 10	47.128	7
ζ Pegasi	22 35	47.131	8
68 Aquarii	22 41	47.118	6
λ Aquarii	22 46	47.117	6
α Piscis austr.	22 51	47.170	3
α Pegasi	22 59	47.182	4

Stern	AR	Längen-differenz	Zahl der Beobacht.
58 Pegasi	23ʰ 4ᵐ	15ᵐ47ˢ224	5
φ Aquarii	23 8	47.186	5
γ Piscium	23 11	47.162	4
21 Piscium	23 43	47.145	4
φ Pegasi	23 46	47.130	4
ω Piscium	23 53	47.135	4
α Andromedae	0 2	47.186	2
γ Pegasi	0 7	47.191	2
12 Ceti	0 24	47.131	2
55 Piscium	0 33	15 46.981	1
β Ceti	0 37	47.181	1
58 Piscium	0 41	47.191	1
η Ceti	1 2	47.171	2
φ Piscium	1 7	47.241	2
f Piscium	1 11	47.191	2
η Piscium	1 25	15 47.201	1
π Piscium	1 30	47.081	1
ν Piscium	1 35	47.071	1
α Arietis	2 0	47.141	1
15 Arietis	2 4	47.071	1
67 Ceti	2 11	47.101	1

Es findet sich, wenn man die Sterne in sechs Gruppen theilt, welche durch die Striche angedeutet sind, mit Rücksicht auf die Anzahl der Beobachtungen:

	Mittlere AR	Längendifferenz	Anzahl der Beobacht.
Erste Gruppe	20h33m	15m47s153	18
Zweite »	21 19	47.089	40
Dritte »	22 28	47.132	47
Vierte »	23 34	47.167	32
Fünfte »	0 55	47.174	10
Sechste »	1 48	47.111	6
Mittel	22h28m	15m47s133	153

Obwohl die wahrscheinlichen Fehler der einzelnen Gruppen nur zwischen ± 0s01 und ± 0s02 liegen, ja bei einzelnen noch geringer sind, zeigt sich doch weder ein fortschreitender, noch ein periodischer Gang und sind die Abweichungen theils der Unsicherheit der Instrumentalfehler, theils zufälligen Beobachtungsfehlern zuzuschreiben.

Nach Declinationen geordnet erhält man:

Name	Decl.	Längendifferenz	Zahl der Beobacht.
α Piscis austrini	— 30° 17.'1	15m47s170	3
41 Aquarii	— 21 41.7	47.118	6
68 Aquarii	— 20 15.9	47.118	6
ε Capricorni	— 20 1.5	47.042	5
β Ceti	— 18 40.4	47.181	2
π Capricorni	— 18 37.2	47.136	3
θ Capricorni	— 17 43.7	47.117	5
η Ceti	— 10 50.7	15 47.171	2
μ Aquarii	— 9 27.1	47.143	3
θ Aquarii	— 8 24.3	47.128	7
λ Aquarii	— 8 14.7	47.117	6
67 Ceti	— 6 59.9	47.101	1
φ Aquarii	— 6 43.4	47.186	5
12 Ceti	— 4 38.9	47.131	2
69 Aquilae	— 3 18.0	47.143	3
α Aquarii	— 0 55.6	47.141	1

Name	Decl.	Längendifferenz	Zahl der Beobacht.
21 Piscium	+ 0° 23.′0	15ᵐ 47ˢ.145	4
d Aquarii	+ 1 41.0	47.070	6
γ Piscium	+ 2 36.0	47.162	4
f Piscium	+ 2 57.3	47.191	2
α Equulei	+ 4 43.9	47.081	6
ν Piscium	+ 4 51.3	47.071	1
23 Hevelii	+ 4 56.7	47.140	3
θ Pegasi	+ 5 35.0	47.128	7
ω Piscium	+ 6 10.3	47.135	4
58 Pegasi	+ 9 8.7	47.224	5
ε Pegasi	+ 9 18.2	47.080	7
γ Equulei	+ 9 37.7	47.096	5
ζ Pegasi	+ 10 10.8	15 47.131	8
58 Piscium	+ 11 17.5	47.191	1
π Piscium	+ 11 30.1	47.081	1
15 Delphini	+ 12 4.8	47.170	3
16 Delphini	+ 12 5.5	47.186	3
γ Pegasi	+ 14 29.3	47.191	2
α Pegasi	+ 14 32.0	47.182	4
η Piscium	+ 14 42.0	47.201	1
φ Pegasi	+ 18 25.0	47.130	4
15 Arietis	+ 18 54.6	47.071	1
55 Piscium	+ 20 45.1	15 46.981	1
α Arietis	+ 22 52.2	47.141	1
φ Piscium	+ 23 55.3	47.241	2
α Andromedae	+ 28 24.0	47.186	2
61¹ Cygni	+ 38 8.1	47.111	4
61² Cygni	+ 38 8.1	47.229	1

Bildet man hier die 5 schon abgetheilten Gruppen, so erhält man:

	Decl.	Längendifferenz	Zahl der Beobacht.
Erste Gruppe	−20° 49′	15ᵐ 47ˢ.116	30
Zweite »	− 7 18	47.141	30
Dritte »	+ 5 32	47.122	54
Vierte »	+13 15	47.153	28
Fünfte »	+30 49	47.150	11
Mittel	1° 5′	15ᵐ 47ˢ.133	

Bei den wahrscheinlichen Fehlern von nahe ± 0ˢ.02 der einzelnen Gruppen stimmen die Resultate befriedigend überein, und wir

nehmen daher als Resultat aus den an den einzelnen Abenden an beiden Stationen beobachteten identischen Sternen nach S. 353 (73) an:

Längendifferenz = 15^{m}47^s.130 ± 0^s.012.

b. *Ableitung des Resultates aus allen boobachteten Sternen.*

Zu dem Zwecke sind zuerst aus allen beobachteten Zeit-Sternen die Uhrcorrectionen nach den Kreislagen zu Mitteln vereinigt und auch dazu das Mittel der Uhrzeiten genommen. Wenn die Uhrzeiten in Wien und Leipzig genau so viel von einander verschieden wären, als die Uhrzeiten in Tafel XXVII, für welche die Uhrdifferenzen gelten, so wäre die Längendifferenz einfach gleich der Differenz der Uhrcorrectionen an beiden Orten vermehrt um die für die Uhrzeiten geltende Uhrdifferenz, d. h. mit den Bezeichnungen auf S. 333 [53]

1875	Kreislage	Uhrzeit Wien T	Uhr-Correction Δt	Zahl der Sterne	Uhrzeit Leipzig T'
October 8	W	21^{h}26^m.9	−31^s.674	11	21^{h}22^m.7
	O	21 28.4	−31.827	10	21 32.8
October 9	O	22 12.0	−29.967	13	22 19.8
	W	22 30.6	−29.865	12	22 31.8
October 19	W	22 14.6	−16.007	11	21 57.4
	O	22 32.0	−16.057	12	22 31.0
November 2	O	22 8.1	− 4.342	13	22 11.4
	W	22 38.6	− 4.369	13	22 32.3
November 3	W	21 26.5	− 9.189	11	21 28.0
	O	21 42.3	− 9.349	12	21 24.3
November 4	O	21 26.6	−14.489	11	21 22.0
	W	21 39.2	−14.475	13	21 27.8
November 14	W	22 48.9	−46.918	19	24 12.1
	O	22 45.2	−46.004	16	23 43.9
November 16	O	23 45.6	+13.183	20	24 13.1
	W	23 7.7	+13.234	19	24 9.2

$$l = U + (\Delta t - \Delta t'),$$

wo die Grösse U sich leicht findet, da dieselbe aus den Werthen der Tabelle XXVII interpolirt werden kann, denn der Uhrgang kann für die kurze Zeit der Beobachtung als gleichförmig angenommen werden. Da die obige Voraussetzung aber bei dem Mittel der Uhrzeiten nicht stattfindet, ist an die eine Uhrcorrection noch eine kleine Verbesserung anzubringen, welche wir die Reduction nennen wollen. Wie schon oben gesagt, ist der Uhrgang der Leipziger Uhr ein regelmässigerer als der der Wiener Uhr gewesen und daher ist es am vortheilhaftesten, die Leipziger Uhrcorrection auf die Uhrzeit, welche gleich ist der Wiener Uhrzeit minus der Uhrdifferenz aus Tab. XXVII, zu reduciren. Der Uhrgang der Leipziger Uhr ist schon S. 348 (68) gegeben und in der folgenden Zusammenstellung sind alle Daten enthalten:

Uhr-Correction $\Delta t'$	Zahl der Sterne	Reduction von $\Delta t'$	$\Delta t - \Delta t'$ + Red.	U	l
− 2ᵐ16ˢ.579	9	+ 0ˢ.007	+ 1ᵐ44ˢ.808	14ᵐ 2ˢ.138	15ᵐ46ˢ.945
16.632	9	+ 0.013	44.792	2.134	46.926
− 2 17.716	9	+ 0.015	+ 1 47.734	13 59.232	46.966
17.676	9	+ 0.011	47.800	59.203	47.003
− 2 30.479	14	− 0.004	+ 2 14.476	13 32.779	47.255
30.458	9	+ 0.009	14.392	32.749	47.141
− 2 47.654	13	+ 0.007	+ 2 43.305	13 3.923	47.228
47.651	9	+ 0.002	43.280	4.011	47.291
− 2 48.391	11	+ 0.014	+ 2 39.188	13 8.079	47.267
48.353	9	− 0.005	39.009	8.127	47.136
− 2 59.431	8	+ 0.004	+ 2 34.938	13 12.301	47.239
49.485	11	+ 0.001	35.009	12.341	47.350
− 3 2.181	8	+ 0.084	+ 2 15.179	13 31.921	47.100
2.247	9	+ 0.062	15.181	31.924	47.105
− 3 3.421	13	+ 0.004	+ 3 16.600	12 30.416	47.016
3.446	12	+ 0.007	16.673	30.425	47.098

Um den Fehler in den beiden Kreislagen zu eliminiren, ist für jeden Tag einfach das Mittel zu nehmen. Bestimmt man die Gewichte nach der S. 352 (72) gegebenen Formel, so hat man:

Tag	Längendifferenz $-(s-w)$	Gewicht	Tag	Längendifferenz $+(s-w)$	Gewicht
October 8	15ᵐ46ˢ936	3.7	October 19	15ᵐ47ˢ198	4.3
» 9	46.984	3.7	November 2	47.260	3.9
November 14	47.102	4.5	» 3	47.202	3.8
» 16	47.057	6.4	» 4	47.294	3.8
Mittel	15ᵐ47ˢ029	18.3	Mittel	15ᵐ47ˢ237	15.8

Daraus $s-w = +0^s104$

und die Längendifferenz:

October 8	15ᵐ47ˢ040	Gewicht 3.7
9	47.088	3.7
19	47.094	4.3
November 2	47.156	3.9
3	47.098	3.9
4	47.190	3.8
14	47.206	4.5
16	47.161	6.4
Mittel	15ᵐ47ˢ133	34.1

und den wahrscheinlichen Fehler ± 0ˢ013.

Nimmt man ohne Rücksicht auf die Gewichte das Mittel, so erhält man:

$$15^m47^s020 - (s-w)$$
$$15\ 47.238 + (s-w)\ ,$$

daher

$$s-w = +0^s109$$

und die Längendifferenz

$$15^m47^s129 \pm 0^s013.$$

Mit Berücksichtigung der früheren Werthe nehmen wir daher

$$l = 15^m47^s131.$$

In Wien beträgt die Reduction auf den östlichen Pfeiler, welcher von Herrn von Oppolzer als Normalpunkt angenommen wird,

$$+\ 0^s015\ ;$$

in Leipzig, wo im kleinen östlichen Meridianzimmer beobachtet, ist die Längendifferenz mit der Mitte des grossen Refractorpfeilers, welcher als Centrum der Sternwarte angenommen wird, 9,4 Meter oder

$$+\ 0^s\!.032\ ,$$

so dass also die neue Wiener Sternwarte auf der Türkenschanze

$$\mathbf{15^m 47^s\!.178 \pm 0^s\!.013}$$

östlicher als das Centrum der Leipziger Sternwarte liegt.

Im Jahre 1865 war gefunden:
Centrum der Leipziger Sternwarte westlich vom Beobachtungspfeiler auf dem Laaer Berge

$$15^m 2^s\!.262 \pm 0^s\!.015 - 0^s\!.036 = 16^m 2^s\!.226 \pm 0^s\!.015.$$

Die Differenz Türkenschanze — Laaer Berg ist nach Herrn von Oppolzer's Ermittelungen

$$-\ 15^s\!.091\ ,$$

so dass, mit Rücksicht der Reduction von $+\ 0^s\!.015$, das frühere Resultat:

$$15^m 47^s\!.150$$

ist. Der wahrscheinliche Fehler wird, da die Längendifferenz Türkenschanze — Laaer Berg auch auf telegraphischem Wege ermittelt, nahe $\pm\ 0^s\!.020$ sein.

Wir nehmen daher mit Rücksicht auf die wahrscheinlichen Fehler als Endresultat an:
Wiener Sternwarte auf der Türkenschanze, östlicher Pfeiler, östlich vom Centrum der Leipziger Sternwarte

$$\mathbf{15^m 47^s\!.17 \pm 0^s\!.011.}$$



Inhalt.

SECHSTER BAND. (IX. Bd.) Mit 10 Tafeln. hoch 4. 1864. brosch. Preis 19 *M* 20 *Pf*.

W. G. HANKEL, Elektrische Untersuchungen. Fünfte Abhandlung: Maassbestimmungen der elektromotorischen Kräfte. Erster Theil. 1861. 1 *M* 60 *Pf*.

—— Messungen über die Absorption der chemischen Strahlen des Sonnenlichtes. 1862. 1 *M* 20 *Pf*.

P. A. HANSEN, Darlegung der theoretischen Berechnung der in den Mondtafeln angewandten Störungen. Erste Abhandlung. 1862. 9 *M*.

G. METTENIUS, Ueber den Bau von Angiopteris. Mit 10 Tafeln. 1863. 4 *M* 40 *Pf*.

W. WEBER, Elektrodynamische Maassbestimmungen, insbesondere über elektrische Schwingungen. 1864. 3 *M*.

SIEBENTER BAND. (XI. Bd.) Mit 5 Tafeln. hoch 4. 1865. brosch. 17 *M*.

P. A. HANSEN, Darlegung der theoretischen Berechnung der in den Mondtafeln angewandten Störungen. Zweite Abhandlung. 1864. 9 *M*.

G. METTENIUS, Ueber die Hymenophyllaceae. Mit 5 Tafeln. 1864. 3 *M* 60 *Pf*.

P. A. HANSEN, Relationen einestheils zwischen Summen und Differenzen und anderntheils zwischen Integralen und Differentialen. 1865. 2 *M*.

W. G. HANKEL, Elektrische Untersuchungen. Sechste Abhandlung: Maassbestimmungen der elektromotorischen Kräfte. Zweiter Theil. 1865. 2 *M* 80 *Pf*.

ACHTER BAND. (XIII. Bd.) Mit 3 Tafeln. hoch 4. 1868. brosch. Preis 24 *M*.

P. A. HANSEN, Geodätische Untersuchungen. 1865. 5 *M* 60 *Pf*.

—— Bestimmung des Längenunterschiedes zwischen den Sternwarten zu Gotha und Leipzig, unter seiner Mitwirkung ausgeführt von Dr. Auwers und Prof. Bruhns im April des Jahres 1865. Mit 1 Figurentafel. 1866. 2 *M* 80 *Pf*.

W. G. HANKEL, Elektrische Untersuchungen. Siebente Abhandlung: Ueber die thermoelektrischen Eigenschaften des Bergkrystalles. Mit 2 Tafeln. 1866. 2 *M* 40 *Pf*.

P. A. HANSEN, Tafeln der Egeria mit Zugrundelegung der in den Abhandlungen der Königl. Sächs. Gesellschaft der Wissenschaften in Leipzig veröffentlichten Störungen dieses Planeten berechnet und mit einleitenden Aufsätzen versehen. 1867. 6 *M* 80 *Pf*.

—— Von der Methode der kleinsten Quadrate im Allgemeinen und in ihrer Anwendung auf die Geodäsie. 1867. 6 *M*.

NEUNTER BAND. (XIV. Bd.) Mit 6 Tafeln. hoch 4. 1871. brosch. Preis 18 *M*.

P. A. HANSEN, Fortgesetzte geodätische Untersuchungen, bestehend in zehn Supplementen zur Abhandlung von der Methode der kleinsten Quadrate im Allgemeinen und in ihrer Anwendung auf die Geodäsie. 1868. 5 *M* 40 *Pf*.

—— Entwickelung eines neuen veränderten Verfahrens zur Ausgleichung eines Dreiecksnetzes mit besonderer Betrachtung des Falles, in welchem gewisse Winkel vorausbestimmte Werthe bekommen sollen. 1869. 3 *M*.

—— Supplement zu der geodätische Untersuchungen benannten Abhandlung, die Reduction der Winkel eines sphäroidischen Dreiecks betr. 1869. 2 *M*.

W. G. HANKEL, Elektrische Untersuchungen. Achte Abhandlung: Ueber die thermoelektrischen Eigenschaften des Topases. Mit 4 Tafeln. 1870. 2 *M* 40 *Pf*.

P. A. HANSEN, Bestimmung der Sonnenparallaxe durch Venusvorübergänge vor der Sonnenscheibe mit besonderer Berücksichtigung des im Jahre 1874 eintreffenden Vorüberganges. Mit zwei Planigloben. 1870. 3 *M*.

G. T. FECHNER, Zur experimentalen Aesthetik. Erster Theil. 1871. 3 *M*.

ZEHNTER BAND (XV. Bd.) Mit 7 Tafeln. hoch 4. 1874. brosch. Preis 21 *M*.

W. WEBER, Elektrodynamische Maassbestimmungen, insbesondere über das Princip der Erhaltung der Energie. 1871. 1 *M* 60 *Pf*.

P. A. HANSEN, Untersuchung des Weges eines Lichtstrahls durch eine beliebige Anzahl von brechenden sphärischen Oberflächen. 1871. 3 *M* 60 *Pf*.

C. BRUHNS, Bestimmung der Längendifferenz zwischen Leipzig und Wien. 1872. 2 *M*.

W. G. HANKEL, Elektrische Untersuchungen. Neunte Abhandlung: Ueber die thermoelektrischen Eigenschaften des Schwerspathes. Mit 4 Tafeln. 1872. 2 *M*.

—— Elektrische Untersuchungen. Zehnte Abhandlung: Ueber die thermoelektrischen Eigenschaften des Aragonites. Mit 3 Tafeln. 1872. 2 *M*.

C. NEUMANN, Ueber die den Kräften elektrodynamischen Ursprungs zuzuschreibenden Elementargesetze. 1873. 3 *M* 80 *Pf*.

P. A. HANSEN, Von der Bestimmung der Theilungsfehler eines gradlinigen Maassstabes. 1874. 4 *M*.

—— Ueber die Darstellung der graden Aufsteigung und Abweichung des Mondes in Function der Länge in der Bahn und der Knotenlänge. 1874. 1 *M*.

—— Dioptrische Untersuchungen mit Berücksichtigung der Farbenzerstreuung und der Abweichung wegen Kugelgestalt. Zweite Abhandlung. 1874. 2 *M*.

ELFTER BAND. (XVIII. Bd.) Mit 8 Tafeln. hoch 4. 1878. brosch. Preis 21 *M*

G. T. FECHNER, Ueber den Ausgangswerth der kleinsten Abweichungssumme, dessen Bestimmung, Verwendung und Verallgemeinerung. 1874. 2 *M*.

C. NEUMANN, Ueber das von Weber für die elektrischen Kräfte aufgestellte Gesetz. 1874. 3 *M*

W. G. HANKEL, Elektrische Untersuchungen. Elfte Abhandlung: Ueber die thermoelektrischen Eigenschaften des Kalkspathes, des Berylles, des Idocrases und des Apophyllites. Mit 3 Tafeln. 1875. 2 *M*.

P. A. HANSEN, Ueber die Störungen der grossen Planeten, insbesondere des Jupiter. 1875. 6 *M*.

W. G. HANKEL, Elektrische Untersuchungen. Zwölfte Abhandlung: Ueber die thermoelektrischen Eigenschaften des Gypses, des Diopsids, des Orthoklases, des Albits und des Periklins. Mit 4 Tafeln. 1875. 2 *M*.

W. SCHEIBNER, Dioptrische Untersuchungen, insbesondere über das Hansen'sche Objectiv. 1876. 3 *M*.

C. NEUMANN, Das Webersche Gesetz bei Zugrundelegung der unitarischen Anschauungsweise. 1876. 1 *M*.

W. WEBER, Elektrodynamische Maassbestimmungen, insbesondere über die Energie der Wechselwirkung. Mit 1 Tafel. 1878. 2 *M*.

ZWÖLFTER BAND. (XIX. Bd.) hoch 4.

W. G. HANKEL, Elektrische Untersuchungen. Dreizehnte Abhandlung: Ueber die thermoelektrischen Eigenschaften des Apatits, Brucits, Coelestins, Prehnits, Natroliths, Skolezits, Datoliths und Axinits. Mit 3 Tafeln. 1878. 2 *M*.

W. SCHEIBNER, Zur Reduction elliptischer Integrale in reeller Form. 1879. 5 *M*.

W. G. HANKEL, Elektrische Untersuchungen. Vierzehnte Abhandlung: Ueber die photo- und thermoelektrischen Eigenschaften des Flussspathes. Mit 3 Tafeln. 1879. 2 *M*.

C. BRUHNS, Neue Bestimmung der Längendifferenz zwischen der Sternwarte in Leipzig und der neuen Sternwarte auf der Türkenschanze in Wien. 1880. 2 *M* 40 *Pf*.

Leipzig, Januar 1880. **S. Hirzel.**

SITZUNGSBERICHTE
DER
KÖNIGL. SÄCHSISCHEN GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN.
KLEINERE ABHANDLUNGEN.

BERICHTE über die Verhandlungen der Königlich Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig. Erster Band. Aus den Jahren 1846 und 1847. Mit Kupfern. gr. 8. 12 Hefte.

—— Zweiter Band. Aus dem Jahre 1848. Mit Kupfern. gr. 8. 6 Hefte.

Vom Jahre 1849 an sind die Berichte der beiden Classen getrennt erschienen.

—— Mathematisch-physische Classe. 1849 (3) 1850 (3) 1851 (2) 1852 (2) 1853 (3) 1854 (3) 1855 (2) 1856 (2) 1857 (3) 1858 (3) 1859 (4) 1860 (3) 1861 (2) 1862 (1) 1863 (2) 1864 (1) 1865 (1) 1866 (5) 1867 (4) 1868 (3) 1869 (4) 1870 (5) 1871 (7) 1872 (4 mit Beiheft) 1873 (7) 1874 (5) 1875 (4) 1876 (2) 1877 (2) 1878 (1).

—— Philologisch-historische Classe. 1849 (5) 1850 (4) 1851 (5) 1852 (4) 1853 (5) 1854 (6) 1855 (4) 1856 (4) 1857 (2) 1858 (2) 1859 (4) 1860 (4) 1861 (4) 1862 (1) 1863 (3) 1864 (3) 1865 (1) 1866 (4) 1867 (2) 1868 (3) 1869 (3) 1870 (3) 1871 (1) 1872 (1) 1873 (1) 1874 (2) 1875 (2) 1876 (1) 1877 (2) 1878 (3).

Jedes Heft der Berichte ist einzeln zu dem Preise von 1 Mark zu haben.

SCHRIFTEN
DER FÜRSTLICH-JABLONOWSKI'SCHEN GESELLSCHAFT ZU LEIPZIG.

ABHANDLUNGEN bei Begründung der Königl. Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften am Tage der zweihundertjährigen Geburtsfeier Leibnizens herausgegeben von der Fürstl. Jablonowski'schen Gesellschaft. Mit dem Bildnisse von Leibniz in Medaillon und zahlreichen Holzschnitten und Kupfertafeln. 61 Bogen in hoch 4⁰. 1846. broch. Preis 15 *M.*

PREISSCHRIFTEN gekrönt und herausgegeben von der Fürstlich Jablonowski'schen Gesellschaft.

1. H. GRASSMANN, Geometrische Analyse geknüpft an die von Leibniz erfundene geometrische Charakteristik. Mit einer erläuternden Abhandlung von *A. F. Möbius.* (Nr. I der mathematisch-physischen Section.) hoch 4⁰. 1847. 2 *M.*
2. H. B. GEINITZ, Das Quadergebirge oder d. Kreideformation in Sachsen, mit Berücks. der glaukonitreichen Schichten. Mit 1 color. Tafel. (Nr. II d. math.-phys. Sect.) hoch 4⁰. 1850. 1 *M* 60 *Pf.*
3. J. ZECH, Astronomische Untersuchungen über die Mondfinsternisse des Almagest. (Nr. III d. math.-phys. Sect.) hoch 4⁰. 1851. 1 *M.*
4. J. ZECH, Astron. Untersuchungen üb. die wichtigeren Finsternisse, welche v. d. Schriftstellern des class. Alterthums erwähnt werden. (No. IV d. math.-phys. Sect.) hoch 4⁰. 1853. 2 *M.*
5. H. B. GEINITZ, Darstellung der Flora des Hainichen-Ebersdorfer und des Flöhaer Kohlenbassins. (Nr. V d. math.-phys. Sect.) hoch 4⁰. Mit 14 Kupfertafeln in gr. Folio. 1854. 24 *M.*
6. TH. HIRSCH, Danzigs Handels- und Gewerbsgeschichte unter der Herrschaft des deutschen Ordens. (Nr. I der historisch-nationalökonomischen Section.) hoch 4⁰. 1858. 8 *M.*
7. H. WISKEMANN, Die antike Landwirthschaft und das von Thünensche Gesetz, aus den alten Schriftstellern dargelegt. (Nr. II d. hist.-nat. ök. Sect.) 1859 2 *M* 40 *Pf.*
8. K. WERNER, Urkundliche Geschichte der Iglauer Tuchmacher-Zunft. (Nr. III d. hist.-nat. ök. Sect.) 1861. 3 *M.*
9. V. BÖHMERT, Beiträge zur Gesch. d. Zunftwesens. (Nr. IV d. hist.-nat. ök. Sect.) 1862. 4 *M.*
10. H. WISKEMANN, Darstellung der in Deutschland zur Zeit der Reformation herrschenden nationalökonomischen Ansichten. (Nr. V d. hist.-nat. ök. Sect.) 1862. 4 *M.*
11. E. L. ETIENNE LASPEYRES, Geschichte der volkswirthschaftl. Anschauungen der Niederländer und ihrer Litteratur zur Zeit der Republik. (Nr. VI d. hist.-nat. ök. Sect.) 1863. 8 *M.*
12. J. FIKENSCHER, Untersuchung der metamorphischen Gesteine der Lunzenauer Schieferhalbinsel. (Nr. VI d. math.-phys. Sect.) 1867. 2 *M.*
13. JOH. FALKE, Die Geschichte des Kurfürsten August von Sachsen in volkswirthschaftlicher Beziehung. (Nr. VII d. hist.-nat. ök. Sect.) 1868. 8 *M.*
14. B. BÜCHSENSCHÜTZ, Die Hauptstätten des Gewerbfleisses im classischen Alterthume. (Nr. VIII d. hist.-nat. ök. Sect.) 1869. 2 *M* 80 *Pf.*
15. DR. HUGO BLÜMNER, Die gewerbliche Thätigkeit der Völker des classischen Alterthums. (Nr. IX d. hist.-nat. ök. Sect.) 1869. 4 *M.*
16. HERMANN ENGELHARDT, Flora der Braunkohlenformation im Königreich Sachsen. (Nr. VII d. math.-phys. Sect.) Mit 15 Tafeln. 1870. 12 *M.*
17. H. ZEISSBERG, Die polnische Geschichtschreibung des Mittelalters. (Nr. X d. hist.-nat. ök. Sect.) 1873. 12 *M.*
18. ALBERT WANGERIN, Reduction der Potentialgleichung für gewisse Rotationskörper auf eine gewöhnliche Differentialgleichung. (Nr. VIII d. math.-phys. Sect.) 1875 1 *M* 20 *Pf.*
19. A. LESKIEN, Die Declination im Slavisch-Litauischen und Germanischen. (Nr. XI d. hist.-nat. ök. Sect.) 1876. 5 *M.*
20. DR. R. HASSENCAMP, Ueber den Zusammenhang des lettoslavischen und germanischen Sprachstammes. (Nr. XII d. hist.-nat. ök. Sect.) 1876. 3 *M.*
21. DR. PÖHLMANN, Die Wirthschaftspolitik der Florentiner Renaissance und das Princip der Verkehrsfreiheit. (Nr. XIII d. hist.-nat. ök. Sect.) 1878. 4 *M* 20 *Pf.*
22. DR. ALEXANDER BRÜCKNER, Die slavischen Ansiedelungen in der Altmark und im Magdeburgischen. (Nr. XIV d. hist.-nat. ök. Sect.) 1879. 4 *M* 20 *Pf.*

Leipzig. **S. Hirzel.**

Druck von Breitkopf und Härtel in Leipzig.

C. NEUMANN,
MITGLIED DER KÖNIGL. SÄCHS. GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN.

ÜBER

DIE PERIPOLAREN COORDINATEN.

Des XII. Bandes der Abhandlungen der mathematisch-physischen Classe der Königl. Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften

Nº V.

A LEIPZIG
BEI S. HIRZEL.
1880.

ABHANDLUNGEN

DER

KÖNIGL. SÄCHS. GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN

ZU LEIPZIG.

MATHEMATISCH-PHYSISCHE CLASSE.

ERSTER BAND. (I. Bd.)*) Mit 3 Tafeln. hoch 4. 1852. brosch. Preis 13 ℳ 60 ₰.

A. F. MÖBIUS, Ueber die Grundformen der Linien der dritten Ordnung. Mit 1 Tafel. 1849. 2 ℳ 40 ₰.
P. A. HANSEN, Auflösung eines beliebigen Systems von linearischen Gleichungen. — Ueber die Entwickelung der Grösse $(1-2\alpha H+\alpha\alpha)^{-\frac{1}{2}}$ nach den Potenzen von α. 1849. 1 ℳ 20 ₰.
A. SEEBECK, Ueber die Querschwingungen elastischer Stäbe. 1849. 1 ℳ.
C. F. NAUMANN, Ueber die cyclocentrische Conchospirale und über das Windungsgesetz von Planorbis Corneus. 1849. 1 ℳ.
W. WEBER, Elektrodynamische Maassbestimmungen (Widerstandsmessungen). 1851. 3 ℳ.
F. REICH, Neue Versuche mit der Drehwaage. 1852. 2 ℳ.
M. W. DROBISCH, Zusätze zum Florentiner Problem. Mit 1 Tafel. 1852. 1 ℳ 60 ₰.
W. WEBER, Elektrodynamische Maassbestimmungen (Diamagnetismus). Mit 1 Tafel. 1852. 2 ℳ.

ZWEITER BAND. (IV. Bd.) Mit 19 Tafeln. hoch 4. 1855. brosch. Preis 20 ℳ.

M. W. DROBISCH, Ueber musikalische Tonbestimmung und Temperatur. 1852. 3 ℳ.
W. HOFMEISTER, Beiträge zur Kenntniss der Gefässkryptogamen. Mit 18 Tafeln. 1852. 4 ℳ.
P. A. HANSEN, Entwickelung des Products einer Potenz des Radius Vectors mit dem Sinus oder Cosinus eines Vielfachen der wahren Anomalie in Reihen, die nach den Sinussen oder Cosinussen der Vielfachen der wahren, excentrischen oder mittleren Anomalie fortschreiten. 1853. 3 ℳ.
—— Entwickelung der negativen und ungraden Potenzen der Quadratwurzel der Function $r^2 + r'^2 - 2rr'(\cos U \cos U' + \sin U \sin U' \cos J)$. 1854. 3 ℳ.
O. SCHLÖMILCH, Ueber die Bestimmung der Massen und der Trägheitsmomente symmetrischer Rotationskörper von ungleichförmiger Dichtigkeit. 1854. 80 ₰.
—— Ueber einige allgemeine Reihenentwickelungen und deren Anwendung auf die elliptischen Functionen. 1854. 1 ℳ 60 ₰.
P. A. HANSEN, Die Theorie des Aequatoreals. 1855. 2 ℳ 40 ₰.
C. F. NAUMANN, Ueber die Rationalität der Tangenten-Verhältnisse tautozonaler Krystallflächen. 1855. 1 ℳ.
A. F. MÖBIUS, Die Theorie der Kreisverwandtschaft. 1855. 2 ℳ.

DRITTER BAND. (V. Bd.) Mit 15 Tafeln. hoch 4. 1857. brosch. Preis 19 ℳ 20 ₰.

M. W. DROBISCH, Nachträge zur Theorie der musik. Tonverhältnisse. 1855. 1 ℳ 20 ₰.
P. A. HANSEN, Auseinandersetzung einer zweckmässigen Methode zur Berechnung der absoluten Störungen der kleinen Planeten. 1856. 5 ℳ.
R. KOHLRAUSCH und W. WEBER, Elektrodynamische Maassbestimmungen, insbesondere Zurückführung der Stromintensitäts-Messungen auf mechanisches Maass. 1856. 1 ℳ 60 ₰.
H. D'ARREST, Resultate aus Beobachtungen der Nebelflecken und Sternhaufen. Erste Reihe. 1856. 2 ℳ 40 ₰.
W. G. HANKEL, Elektrische Untersuchungen. Erste Abhandlung: Ueber der Messung der atmosphärischen Elektricität nach absolutem Maasse. Mit 2 Tafeln. 1856. 6 ℳ.
W. HOFMEISTER, Beiträge zur Kenntniss der Gefässkryptogamen. No. II. Mit 13 Tafeln. 1857. 4 ℳ.

VIERTER BAND. (VI. Bd.) Mit 29 Tafeln. hoch 4. 1859. brosch. Preis 22 ℳ 50 ₰.

P. A. HANSEN, Auseinandersetzung einer zweckmässigen Methode zur Berechnung der absoluten Störungen der kleinen Planeten. Zweite Abhandlung. 1857. 4 ℳ.
W. G. HANKEL, Elektrische Untersuchungen. Zweite Abhandlung: Ueber die thermo-elektrischen Eigenschaften des Boracites. 1857. 2 ℳ 40 ₰.
—— Elektrische Untersuchungen. Dritte Abhandlung: Ueber Elektricitätserregung zwischen Metallen und erhitzten Salzen. 1858. 1 ℳ 60 ₰.
P. A. HANSEN, Theorie der Sonnenfinsternisse und verwandten Erscheinungen. Mit 2 Tafeln. 1858. 6 ℳ.
G. T. FECHNER, Ueber ein wichtiges psychophysisches Grundgesetz und dessen Beziehung zur Schätzung der Sterngrössen. 1858. 2 ℳ.
W. HOFMEISTER, Neue Beiträge zur Kenntniss der Embryobildung der Phanerogamen. I. Dikotyledonen mit ursprünglich einzelligem, nur durch Zellentheilung wachsendem Endosperm. Mit 27 Tafeln. 1859. 8 ℳ.

FÜNFTER BAND. (VII. Bd.) Mit 30 Tafeln. hoch 4. 1861. brosch. Preis 24 ℳ.

W. G. HANKEL, Elektrische Untersuchungen. Vierte Abhandlung: Ueber das Verhalten der Weingeistflamme in elektrischer Beziehung. 1859. 2 ℳ.
P. A. HANSEN, Auseinandersetzung einer zweckmässigen Methode zur Berechnung der absoluten Störungen der kleinen Planeten. Dritte Abhandlung. 1859. 7 ℳ 20 ₰.
G. T. FECHNER, Ueber einige Verhältnisse des binocularen Sehens. 1860. 5 ℳ 60 ₰.
G. METTENIUS, Zwei Abhandlungen: I. Beiträge zur Anatomie der Cycadeen. Mit 5 Tafeln. II. Ueber Seitenknospen bei Farnen. 1860. 3 ℳ.
W. HOFMEISTER, Neue Beiträge zur Kenntniss der Embryobildung der Phanerogamen. II. Monokotyledonen. Mit 25 Tafeln. 1861. 8 ℳ.

---

*) Die eingeklammerten römischen Ziffern geben die Zahl des Bandes in der Reihenfolge der Abhandlungen beider Classen an.

ÜBER

DIE PERIPOLAREN COORDINATEN

VON

C. NEUMANN,
MITGLIED DER KÖNIGL. SÄCHS. GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN.

Des XII. Bandes der Abhandlungen der mathematisch-physischen Classe der Königl. Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften

N° V.

LEIPZIG
BEI S. HIRZEL.
1880.

Vom Verfasser übergeben den 23. April 1880.
Der Abdruck vollendet den 25. Juli 1880.

ÜBER

DIE PERIPOLAREN COORDINATEN

VON

C. NEUMANN,

MITGLIED DER KÖNIGL. SÄCHS. GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN.

NB. Dieser Aufsatz, von welchem ein Auszug schon im Jahre 1877 in den Berichten der Königl. Sächsischen Ges. der Wissenschaften publicirt wurde (Berichte vom 30. Juli 1877. Seite 134) bildet eine Vorarbeit für den *unmittelbar folgenden*, ein Problem der Elektrostatik behandelnden Aufsatz.

Da ich in diesem Aufsatz auf die *Theorie der reciproken Radien* mich fast fortwährend stützen werde, so erscheint es angemessen, zunächst die wichtigsten Sätze dieser Theorie in Kürze zu recapituliren.

Es sei gegeben eine Kugelfläche (o, H), d. i. eine Kugelfläche mit dem Mittelpunkt o und dem Halbmesser H. Lässt man von o einen Strahl ausgehen, und markirt auf demselben irgend zwei der Relation

(I.) $$(o\xi)\,(ox) = H^2$$

entsprechende Punkte ξ, x, so heisst bekanntlich jeder von diesen beiden Punkten das *Spiegelbild* des andern in Bezug auf die Kugelfläche (o, H). Auch pflegt man die beiden Punkte kurzweg *correspondirende* oder *conjugirte* Punkte zu nennen.

Sind zwei Paare correspondirender Punkte ξ, x und η, y gegeben, so ist nach (I.):

(II.) $$(o\xi)\,(ox) = (o\eta)\,(oy) = H^2,$$

und folglich

(III.) $$\Delta\,(o\xi\eta) \sim \Delta\,(oyx)\,;$$

und aus der Aehnlichkeit dieser Dreiecke folgt sofort:

(IV.) $$\frac{(\xi\eta)}{(xy)} = \frac{(o\xi)}{(oy)} = \frac{(o\eta)}{(ox)} = \sqrt{\frac{(o\xi)\,(o\eta)}{(ox)\,(oy)}}\,.$$

Mit Hülfe dieser Formeln beweist man leicht*), *dass conjugirte Figuren in ihren kleinsten Theilen einander ähnlich sind.* Sind z. B. ξ, η, ζ drei einander unendlich nahe Puncte der einen Figur, und x, y, z die entsprechenden Puncte der andern, so werden die unendlich kleinen Dreiecke $\xi\eta\zeta$ und xyz einander ähnlich sein. Oder ein wenig anders ausgedrückt: *Sind irgend drei einander unendlich*

---

*) Vgl. z. B. mein Werk über *das Logarithmische und Newton'sche Potential* (Leipzig, Teubner 1877), daselbst Seite 356.

nahe Punkte ξ, η, ζ *gegeben, und bezeichnet man die denselben in Bezug auf* (o, H) *conjugirten Punkte mit* x, y, z, *so sind die beiden Dreiecke* $\xi\eta\zeta$ *und* xyz *einander ähnlich.* Versteht man ferner unter $d\lambda$, dl irgend zwei einander conjugirte Linienelemente, ebenso unter $d\sigma$, ds zwei conjugirte Flächenelemente, endlich unter $d\tau$, dt zwei conjugirte Raumelemente, so gelten die Formeln*):

$$\text{(V.)}\qquad \begin{aligned} d\lambda : dl &= \mathsf{P} : R, \\ d\sigma : ds &= \mathsf{P}^2 : R^2, \\ d\tau : dt &= \mathsf{P}^3 : R^3; \end{aligned}$$

falls man nämlich die Entfernung der Elemente $d\lambda$, $d\sigma$, $d\tau$ vom Punkte o mit P, andererseits die Entfernungen der Elemente dl, ds, dt ebenfalls vom Punkte o mit R bezeichnet.

Ist ferner von zwei in Bezug auf (o, H) *einander conjugirten Figuren die eine eine Kugelfläche, so gilt Gleiches auch von der andern. Und geht insbesondere die eine dieser Kugelflächen durch den Punkt* o, *so wird die andere eine unendlich grosse Kugelfläche, d. i. eine Ebene sein***).

Ohne auf den Beweis dieser bekannten Sätze hier weiter einzugehen, wollen wir sofort zu einer sich anlehnenden Betrachtung uns hinwenden. Sind — immer unter Zugrundelegung der Kugelfläche (o, H) — ξ, x zwei conjugirte Punkte und σ, s zwei conjugirte Kugelflächen, und construirt man die durch o, ξ, x gehende gemeinschaftliche Tangential-Ebene jener beiden Kugelflächen σ, s, so werden offenbar die beiden Berührungspunkte τ und t dieser Ebene ebenfalls einander conjugirt sein; so dass man also die Formeln (IV.) auf die beiden Punktpaare ξ, x und τ, t anzuwenden vermag. Hiedurch ergiebt sich:

$$\text{(VI.)}\qquad \frac{(\xi\tau)}{(xt)} = \frac{(o\xi)}{(o\,t)} = \frac{(o\,\tau)}{(o\,x)} = \sqrt{\frac{(o\xi)}{(ox)}\frac{(o\tau)}{(ot)}}.$$

Die hier auftretenden Grössen

$$(o\tau),\ (ot),\ (\xi\tau),\ (xt)$$

repräsentiren die von den Punkten o, ξ, x an die Kugelflächen σ, s gelegten *Tangenten*, jede Tangente gerechnet von ihrem Ausgangspunkt bis zu ihrem Berührungspunkt. Demgemäss mag es erlaubt

---

*) l. c. Seite 356, 357.
**) l. c. Seite 357, 358.

sein, die Buchstaben τ, t ganz zu unterdrücken, und diese vier Tangenten zu bezeichnen mit

$$(o\,\sigma)\,,\ (o\,s)\,,\ (\xi\,\sigma)\,,\ (x\,s)\,^{*}).$$

Diese neue Bezeichnungsweise in die Formeln (VI.) eingeführt, gelangt man zu folgendem Satz:

Sind — unter Zugrundelegung der gegebenen Kugelfläche (o, II) *—* ξ, x *zwei conjugirte Punkte und* σ, s *zwei conjugirte Kugelflächen, so finden die Relationen statt:*

$$\text{(VII.)} \qquad \frac{(\xi\,\sigma)}{(x\,s)} = \frac{(o\,\xi)}{(o\,s)} = \frac{(o\,\sigma)}{(o\,x)} = \sqrt{\frac{(o\,\xi)\,(o\,\sigma)}{(o\,x)\,(o\,s)}}.$$

Oder einfacher ausgedrückt: Die früher angegebenen Relationen (IV.) bleiben auch dann noch in Gültigkeit, wenn man daselbst statt der conjugirten *Punkte* η, y zwei einander conjugirte *Kugelflächen* σ, s substituirt; nur sind in diesem Falle unter $(o\,\sigma)$, $(o\,s)$, $(\xi\,\sigma)$, $(x\,s)$ nicht mehr Entfernungen, sondern die Längen der betreffenden *Tangenten* zu verstehen.

Die äusserst einfache Art und Weise, in welcher ich diesen schon früher**) von mir aufgestellten Satz hier abgeleitet habe, verdanke ich einer Mittheilung des Herrn Oberlehrer Dr. *Wolf*.

§ 1.

Definition der peripolaren Coordinaten in Bezug auf einen gegebenen Grundkreis.

In der Horizontalebene sei ein *Grundkreis* vom Radius B gegeben; und gleichzeitig mögen die beiden Theile, in welche die Horizontalebene durch diesen Kreis zerlegt wird, bezeichnet sein als die *innere* und *äussere Grundfläche;* so dass also die erstere identisch ist mit der Fläche des Grundkreises, während die letztere vom Grundkreise aus nach allen Seiten hin sich ins Unendliche erstreckt.

Vergegenwärtigen wir uns sämmtliche auf dem Grundkreise stehenden Kugelcalotten, d. i. all' diejenigen Kugelcalotten, welche

---

*) Unter dem Symbol $(\xi\,\sigma)$ soll also verstanden werden die *Länge der von* ξ *an die Kugelfläche* σ *gelegten Tangente.*

**) l. c. Seite 358.



den Grundkreis zum gemeinsamen Rande haben, so werden offenbar die *kleinste* und *grösste* dieser Calotten identisch sein resp. mit der *innern* und *äussern Grundfläche*. Zur Bestimmung einer jeden Calotte C des in Rede stehenden Systems bedienen wir uns ihrer *Inclination*, d. i. desjenigen Winkels ω, unter welchem dieselbe gegen die *obere Seite der äussern Grundfläche* G geneigt ist.

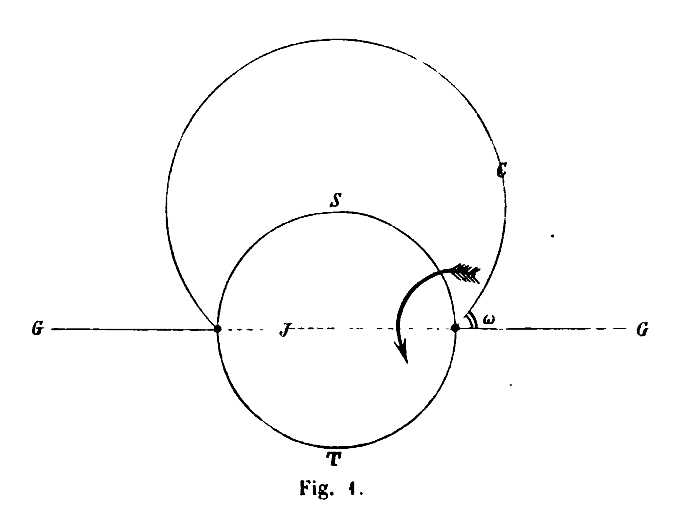


Fig. 1.

Alsdann wird z. B.

durch $\omega = 0$ die äussere Grundfläche G,

angedeutet sein, ferner

durch $\omega = \frac{1}{2}\pi$ eine über dem Grundkreis stehende Halbkugelfläche S,
durch $\omega = \pi$ die innere Grundfläche J,
durch $\omega = \frac{3}{2}\pi$ eine unter dem Grundkreis stehende Halbkugelfläche T,
durch $\omega = 2\pi$ dieselbe Fläche, wie durch $\omega = 0$, d. i. G,
durch $\omega = \frac{5}{2}\pi$ dieselbe Fläche, wie durch $\omega = \frac{1}{2}\pi$; d. i. S; u. s. w.

Die Mittelpunkte all' dieser Kugelcalotten liegen auf einer geraden Linie, — auf der *Axe* des Grundkreises; und alle durch diese Axe gehenden Ebenen, oder (besser ausgedrückt) alle an diese Axe sich anlehnenden *Halbebenen* mögen als *Meridianebenen* bezeichnet werden.

Solches festgesetzt, können, um die Lage irgend eines Raumpunktes ξ zu bestimmen, folgende drei Grössen benutzt werden: *erstens* das *Azimuth* φ, unter welchem die Meridianebene des Punktes ξ gegen eine bestimmte feste Meridianebene geneigt ist; *zweitens* die *Inclination* ω der auf dem Grundkreise stehenden und durch

ξ gehenden Kugelcalotte; endlich *drittens* der *Quotient* $\lambda = \frac{\varrho}{\varrho'}$, wo ϱ die kürzeste und ϱ' die längste Kante des von ξ nach dem Grundkreise gelegten Kegels vorstellen soll. Diese drei Grössen φ, λ, ω nennen wir die *peripolaren Coordinaten* des Punktes ξ in Bezug auf den gegebenen Grundkreis; und gleichzeitig nennen wir ϱ, ϱ' die *Hauptstrahlen* des Punktes, endlich

$$\Pi = \sqrt{\varrho\varrho'}$$

den *Parameter* des Punktes. — Will man sämmtliche Punkte des Raumes, und zwar jeden nur einmal erhalten, so hat man φ zwischen $0 \ldots 2\pi$, ferner ω ebenfalls zwischen $0 \ldots 2\pi$, endlich λ zwischen $0 \ldots 1$ variiren zu lassen. Doch werden wir, wie schon jetzt bemerkt sein mag, an diesen Grenzen *nicht* immer festhalten*).

λ allerdings soll stets zwischen $0 \ldots 1$ bleiben. Hingegen mögen φ und ω unbestimmt bleiben bis auf ganze Vielfache von 2π. Alsdann besitzt die Inclination ω einer gegebenen Calotte unendlich viele, theils positive theils negative Werthe. So z. B. wird die Inclination ω der oberen Halbkugelfläche S (Figur Seite 368) die unendlich vielen Werthe haben:

$$\ldots\ldots, \; -\tfrac{7}{2}\pi, \; -\tfrac{3}{2}\pi, \; +\tfrac{1}{2}\pi, \; +\tfrac{5}{2}\pi, \; +\tfrac{9}{2}\pi, \; \ldots\ldots$$

*Bei all' dieser Unbestimmtheit ist indessen festzuhalten, dass, ebenso wie φ, ebenso auch ω stets in ein und derselben Richtung***) *gerechnet werden soll. Und um solches zu betonen, wiederholen wir: es soll ω gerechnet werden von der obern Seite der äussern Grundfläche aus* (vgl. die Figur Seite 368).

Beiläufige Bemerkung. — Die drei Flächensysteme $\varphi = \text{Const.}$, $\omega = \text{Const.}$, $\lambda = \text{Const.}$ sind zu einander *orthogonal*. Das erste ist das System der *Meridianebenen*, das zweite das System der auf dem Grundkreise stehenden *Kugelcalotten*, endlich das dritte ein System ineinander geschachtelter *Ringflächen*.

---

*) Wollte man an jenen Grenzen festhalten, so würde dadurch die Uebersichtlichkeit und Einfachheit der zu exponirenden Gegenstände in unangenehmer Weise beeinträchtigt werden.

**) Diese Richtung ist diejenige, welche in der Figur Seite 368 durch einen gekrümmten Pfeil angedeutet ist.

§ 2.

Beziehung der peripolaren Coordinaten zu den rechtwinkligen Coordinaten.

Es sei ξ ein beliebiger Raumpunkt mit den peripolaren Coordinaten λ, ω, φ und den Hauptstrahlen ϱ, ϱ'. Ist nun δ derjenige Punkt, in welchem der Grundkreis von der Meridianebene des Punktes ξ, und ε derjenige, in welchem jener Kreis von der Fortsetzung dieser Meridianebene geschnitten wird, so wird offenbar der kürzere Hauptstrahl ϱ durch $(\xi\delta)$, und der längere ϱ' durch $(\xi\varepsilon)$ dargestellt sein; so dass man schreiben kann:

(1.) $$\lambda = \frac{\varrho}{\varrho'} = \frac{(\xi\delta)}{(\xi\varepsilon)}.$$

Ferner wird der Winkel $(\delta\xi\varepsilon)$ identisch sein mit der Inclination ω des Punktes ξ:

(2.) $$\omega = (\delta\xi\varepsilon).$$

Lässt man jetzt vom Mittelpunkt α_0 des Grundkreises zwei Linien $\alpha_0 x$ und $\alpha_0 r$ ausgehen, von denen die erstere die geometrische Axe des Grundkreises darstellt, während die letztere mit der Rich-

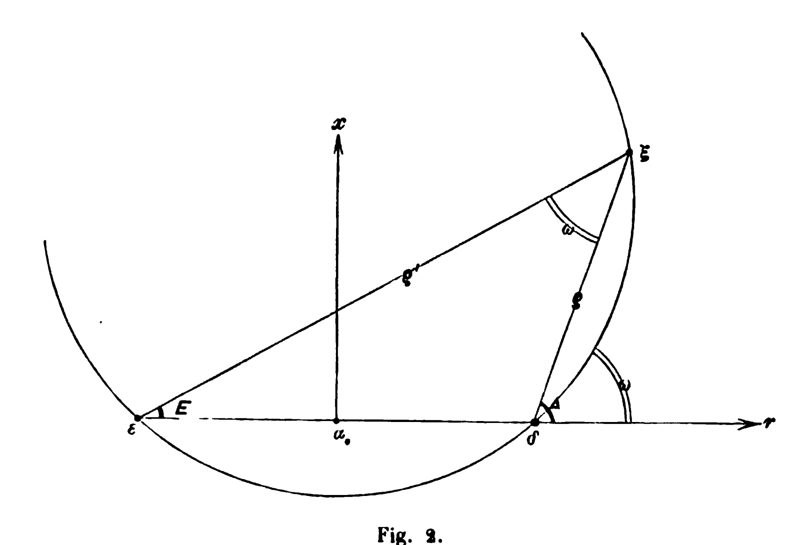


Fig. 2.

tung $\alpha_0\delta$ zusammenfällt, und bezeichnet man die rechtwinkligen Coordinaten des Punktes ξ in Bezug auf diese Axen $\alpha_0 x$, $\alpha_0 r$ mit x, r, so erhält man:

(3.) $$x = \varrho' \sin \mathsf{E}, \qquad x = \varrho \sin \Delta,$$
$$r + \mathsf{B} = \varrho' \cos \mathsf{E}, \qquad r - \mathsf{B} = \varrho \cos \Delta,$$

wo B den Radius des Grundkreises vorstellt, und E, Δ die Neigungswinkel der Strahlen $\varepsilon\xi$, $\delta\xi$ gegen die Richtung $\varepsilon\delta r$ bezeichnen.

Aus (3.) folgt sofort:

$$(r + \mathsf{B}) + ix = \varrho' e^{i\mathsf{E}}, \qquad (r - \mathsf{B}) + ix = \varrho e^{i\Delta}, \qquad (i = \sqrt{-1}),$$

und hieraus durch Division:

$$\frac{(r - \mathsf{B}) + ix}{(r + \mathsf{B}) + ix} = \frac{\varrho}{\varrho'} e^{i(\Delta - \mathsf{E})}.$$

Nach (1.), (2.) ist aber $\frac{\varrho}{\varrho'} = \lambda$, und $\Delta - \mathsf{E} = (\delta\xi\varepsilon) = \omega$. Also wird:

$$\frac{r + ix - \mathsf{B}}{r + ix + \mathsf{B}} = \lambda e^{i\omega},$$

und hieraus folgt:

$$r + ix = \mathsf{B}\frac{1 + \lambda e^{i\omega}}{1 - \lambda e^{i\omega}},$$

oder, falls man Reelles und Imaginäres sondert:

(4.) $$x = \mathsf{B}\frac{2\lambda \sin\omega}{1 - 2\lambda\cos\omega + \lambda^2},$$

(5.) $$r = \mathsf{B}\frac{1 - \lambda^2}{1 - 2\lambda\cos\omega + \lambda^2}.$$

Denkt man sich nun, in der Ebene des Grundkreises, von α_0 aus zwei aufeinander senkrechte Richtungen $\alpha_0 y$ und $\alpha_0 z$ festgesetzt, der Art, dass der Strahl $\alpha_0 r$ gegen $\alpha_0 y$ unter dem Winkel φ und gegen $\alpha_0 z$ unter dem Winkel $90^0 - \varphi$ geneigt ist, und bezeichnet man die Coordinaten des Punktes ξ im System $\alpha_0 x$, $\alpha_0 y$, $\alpha_0 z$ resp. mit x, y, z, so wird x identisch sein mit dem in (4.) angegebenen x, während y und z zu dem in (5.) angegebenen r in der Beziehung stehen:

$$y = r\cos\varphi,$$
$$z = r\sin\varphi.$$

Man erhält somit schliesslich für die rechtwinkligen Coordinaten x, y, z des Punktes ξ folgende Werthe:

$$x = \mathsf{B}\frac{2\lambda\sin\omega}{1 - 2\lambda\cos\omega + \lambda^2},$$

(6.) $$y = \mathsf{B}\frac{(1 - \lambda^2)\cos\varphi}{1 - 2\lambda\cos\omega + \lambda^2},$$

$$z = \mathsf{B}\frac{(1 - \lambda^2)\sin\varphi}{1 - 2\lambda\cos\omega + \lambda^2},$$

wo B *der Radius des Grundkreises ist, während* λ, ω, φ *die peripolaren Coordinaten des Punktes* ξ *vorstellen.*

Hieraus folgt durch einfache Rechnung:

(7.) $$dx^2 + dy^2 + dz^2 = \mathrm{B}^2 \frac{(2d\lambda)^2 + (2\lambda d\omega)^2 + [(1 - \lambda^2) d\varphi]^2}{(1 - 2\lambda\cos\omega + \lambda^2)^2},$$

und ferner:

(8.) $$(\xi\xi_1)^2 = 2\mathrm{B}^2 \frac{(1 + \lambda^2)(1 + \lambda_1^2) - (1 - \lambda^2)(1 - \lambda_1^2)\cos(\varphi - \varphi_1) - 4\lambda\lambda_1\cos(\omega - \omega_1)}{(1 - 2\lambda\cos\omega + \lambda^2)(1 - 2\lambda_1\cos\omega_1 + \lambda_1^2)};$$

und zwar bedeutet in der letzten Formel $(\xi\xi_1)$ den geradlinigen Abstand irgend zweier Punkte ξ und ξ_1 mit den Coordinaten λ, ω, φ und λ_1, ω_1, φ_1.

Anwendung dieser Formeln. — Markirt man *auf der x-Axe* (d. i. auf der geometrischen Axe des Grundkreises) einen beliebigen Punkt α, und bezeichnet man die Coordinaten dieses Punktes mit λ_α, ω_α, φ_α, so wird offenbar $\lambda_\alpha = 1$ sein; hingegen wird ω_α einen variablen Werth haben, der abhängt von der variablen Lage des Punktes auf der genannten Axe; endlich wird φ_α unbestimmt sein. Also:

$$\lambda_\alpha = 1, \qquad \omega_\alpha = \text{var.}, \qquad \varphi_\alpha = \text{unbest.}$$

Lässt man insbesondere den Punkt α zusammenfallen mit dem Mittelpunkte α_0 des Grundkreises, so ergiebt sich:

$$\lambda_{\alpha_0} = 1, \qquad \omega_{\alpha_0} = \pi, \qquad \varphi_{\alpha_0} = \text{unbest.}$$

Markirt man andererseits *auf der Peripherie des Grundkreises* einen beliebigen Punkt β, so ergeben sich für die Coordinaten λ_β, ω_β, φ_β dieses Punktes die Werthe:

$$\lambda_\beta = 0, \qquad \omega_\beta = \text{unbest.} \qquad \varphi_\beta = \text{var.}$$

Somit folgt aus (8.):

(9.) $$(\xi\alpha)^2 = 2\mathrm{B}^2 \frac{1 - 2\lambda\cos(\omega - \omega_\alpha) + \lambda^2}{(1 - 2\lambda\cos\omega + \lambda^2)(1 - \cos\omega_\alpha)},$$

(10.) $$(\xi\alpha_0)^2 = \mathrm{B}^2 \frac{1 + 2\lambda\cos\omega + \lambda^2}{1 - 2\lambda\cos\omega + \lambda^2},$$

(11.) $$(\xi\beta)^2 = 2\mathrm{B}^2 \frac{(1 + \lambda^2) - (1 - \lambda^2)\cos(\varphi - \varphi_\beta)}{1 - 2\lambda\cos\omega + \lambda^2}.$$

Hier bezeichnet ξ einen ganz beliebigen Punkt des Raumes mit den peripolaren Coordinaten λ, ω, φ.

Sind δ und ε diejenigen Punkte, in denen der Grundkreis von der Meridianebene des Punktes $\xi(\lambda, \omega, \varphi)$ geschnitten wird, oder (genauer ausgedrückt) bezeichnet δ denjenigen Punkt des Grundkreises,

welcher in der Meridianebene von ξ liegt, und ε denjenigen andern Punkte des Grundkreises, welcher in der Fortsetzung dieser Meridianebene liegt, so ist das Azimuth von δ identisch mit den von ξ, hingegen das Azimuth von ε um π grösser als das von ξ. Also:

$$\varphi_\delta = \varphi,$$
$$\varphi_\varepsilon = \varphi + \pi.$$

Nimmt man also in (11.) an Stelle von β die Punkte δ, ε, so folgt:

$$(12.)\quad \begin{aligned} (\xi\delta)^2 &= 4\,\mathrm{B}^2 \frac{\lambda^2}{1 - 2\lambda\cos\omega + \lambda^2}, \\ (\xi\varepsilon)^2 &= 4\,\mathrm{B}^2 \frac{1}{1 - 2\lambda\cos\omega + \lambda^2}. \end{aligned}$$

Offenbar sind $(\xi\delta)$ und $(\xi\varepsilon)$ nichts anderes als die beiden *Hauptstrahlen* ϱ, ϱ' des Punktes ξ. Also:

$$(13.)\quad \begin{aligned} \varrho &= \frac{2\mathrm{B}\lambda}{\sqrt{1 - 2\lambda\cos\omega + \lambda^2}}, \\ \varrho' &= \frac{2\mathrm{B}}{\sqrt{1 - 2\lambda\cos\omega + \lambda^2}}. \end{aligned}$$

Aus diesen Formeln ergiebt sich durch Division die Gleichung $\frac{\varrho}{\varrho'} = \lambda$, d. i. diejenige Gleichung, durch welche λ *definirt* wurde (vgl. Seite 369). Andererseits folgt durch Multiplication:

$$(14.)\quad \Pi = \sqrt{\varrho\varrho'} = \frac{2\mathrm{B}\sqrt{\lambda}}{\sqrt{1 - 2\lambda\cos\omega + \lambda^2}},$$

wo Π den *Parameter* des Punktes ξ vorstellt.

§ 3.

Einige sich anschliessende Aufgaben.

Erste Aufgabe: *Es sei gegeben eine auf dem Grundkreise stehende Calotte σ mit der Inclination ω_σ. Es soll die Länge der von irgend einem Punkt ξ $(\lambda, \omega, \varphi)$ an die Calotte gelegten Tangente ermittelt werden, die Tangente gerechnet von ihrem Ausgangspunkt ξ $(\lambda, \omega, \varphi)$ bis zum Berührungspunkt.*

Bezeichnet man diese Länge der Tangente mit $(\xi\sigma)$, und den räumlichen Mittelpunkt der Calotte σ, d. i. den Mittelpunkt derjenigen Kugelfläche, von welcher diese Calotte ein *Theil* ist, mit μ, so folgt aus dem Pythagoräischen Satz:

$$(15.)\quad (\xi\sigma)^2 = (\xi\mu)^2 - (\beta\mu)^2,$$

wo β einen beliebigen Punkt auf der Peripherie des Grundkreises bezeichnet.

Um in dieser Gleichung die Glieder rechts mittelst der Formel (9.) ausdrücken zu können, müssen wir zunächst die ω-Coordinate des Punktes μ berechnen. Zu diesem Zweck construiren wir eine neue durch μ gehende und wiederum auf dem Grundkreise stehende

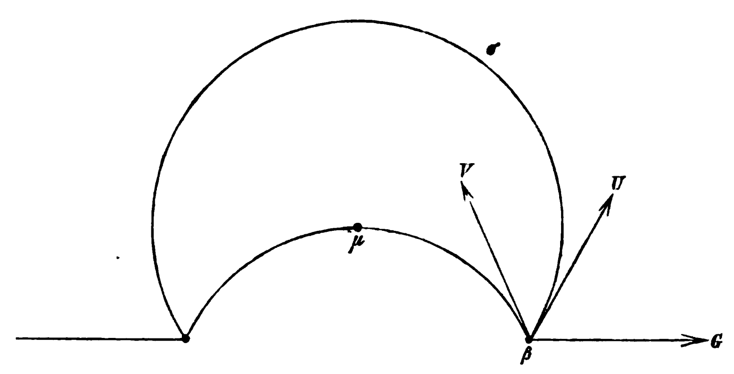


Fig. 3.

Calotte. Die Inclination dieser neuen Calotte, oder (was dasselbe besagen will) die Inclination des Punktes μ, hat alsdann den Werth:

$$\omega_\mu = (G\beta V)\text{, vgl. die Figur;}$$

während die Inclination ω_σ der von Hause aus gegebenen Calotte σ sich ausdrückt durch:

$$\omega_\sigma = (G\beta U).$$

Nach bekannten Sätzen über Peripherie- und Centriwinkel ist aber $(G\beta V) = 2(G\beta U)$, also $\omega_\mu = 2\omega_\sigma$. Diese letzte Formel ist, *weil die Inclinationen ω bis auf ganze Vielfache von 2π unbestimmt bleiben sollen* (vgl. die Festsetzungen Seite 369), folgendermassen zu schreiben:

$$(16.) \qquad \omega_\mu \equiv 2\omega_\sigma,\ (\text{mod } 2\pi).$$

Mit Rücksicht hierauf folgt aus (9.)

$$(17.) \qquad (\xi\mu)^2 = 2B^2 \frac{1 - 2\lambda\cos(\omega - 2\omega_\sigma) + \lambda^2}{(1 - 2\lambda\cos\omega + \lambda^2)(1 - \cos 2\omega_\sigma)}.$$

Da diese Formel gültig ist für jedweden Raumpunkt $\xi(\lambda, \omega, \varphi)$, so wird sie z. B. auch gültig sein für den Punkt β, dessen Coordinaten nach Seite 372 lauten:

$$\lambda_\beta = 0, \qquad \omega_\beta = \text{unbest.}, \qquad \varphi_\beta = \text{var.}$$

Somit erhält man:

$$(18.)\qquad (\beta\mu)^2 = 2B^2 \frac{1}{1-\cos 2\omega_\sigma}.$$

Durch Substitution dieser Werthe (17.), (18.) in (15.) erhält man schliesslich:

$$(\xi\sigma)^2 = \frac{4B^2\lambda}{1-2\lambda\cos\omega+\lambda^2}\,\frac{\cos\omega-\cos(\omega-2\omega_\sigma)}{1-\cos 2\omega_\sigma},$$

oder, was dasselbe ist:

$$(\xi\sigma)^2 = \frac{4B^2\lambda}{1-2\lambda\cos\omega+\lambda^2}\,\frac{\sin(\omega_\sigma-\omega)}{\sin\omega_\sigma},$$

oder mit Rücksicht auf (14.):

$$(19.)\qquad (\xi\sigma)^2 = \Pi^2\,\frac{\sin(\omega_\sigma-\omega)}{\sin\omega_\sigma}.$$

Hier repräsentiren λ, ω, φ, Π die Coordinaten und den Parameter des Punktes ξ, während ω_σ die Inclination der gegebenen Calotte σ vorstellt. Demgemäss kann man sich so ausdrücken:

Sind irgend zwei auf dem Grundkreise stehende Calotten gegeben, mit den Inclinationen ω und ω_σ, und legt man von irgend einem Punkt der erstern eine Tangente an die zweite, so wird das Quadrat dieser Tangente (dieselbe gerechnet vom Ausgangspunkt bis zum Berührungspunkt) *den Werth haben:*

$$(20.)\qquad \Pi^2\,\frac{\sin(\omega_\sigma-\omega)}{\sin\omega_\sigma},$$

wo Π den Parameter des Ausgangspunktes vorstellt. — Vertauscht man die Calotte, welche berührt werden soll, mit der supplementaren*), d. i. ω_σ mit $\omega_\sigma+\pi$, so bleibt der Ausdruck (20.) ungeändert, wie *a priori* zu erwarten stand.

Uebrigens wird die Formel (19.) auch dann gültig sein, wenn von dem gegebenen Punkt ξ aus eine Tangente an die gegebene Calotte σ, resp. an die supplementare Calotte *unmöglich* ist. Nur hat man in diesem Fall $(\xi\sigma)$ nicht als Länge einer Tangente, sondern durch die Formel (15.) zu definiren. Auch wird in diesem Fall $(\xi\sigma)^2$ *negativ* sein.

Zweite Aufgabe: *Es seien gegeben eine auf dem Grundkreise stehende Calotte σ mit der Inclination ω_σ, ferner zwei Punkte $\xi(\lambda, \omega, \varphi, \Pi)$ und $\xi'(\lambda', \omega', \varphi', \Pi')$, welche in Bezug auf σ zu einander conjugirt*

*) Ich nenne zwei Calotten zu einander *supplementar*, wenn sie zusammengenommen eine Kugelfläche ausmachen.



sind *). *Es sollen die Beziehungen zwischen* λ, ω, φ, Π *und* λ', ω', φ', Π' *näher untersucht werden.*

Construirt man die gemeinschaftliche Meridianebene der Punkte ξ, ξ', und bezeichnet man mit δ, resp. ε die beiden Punkte, in

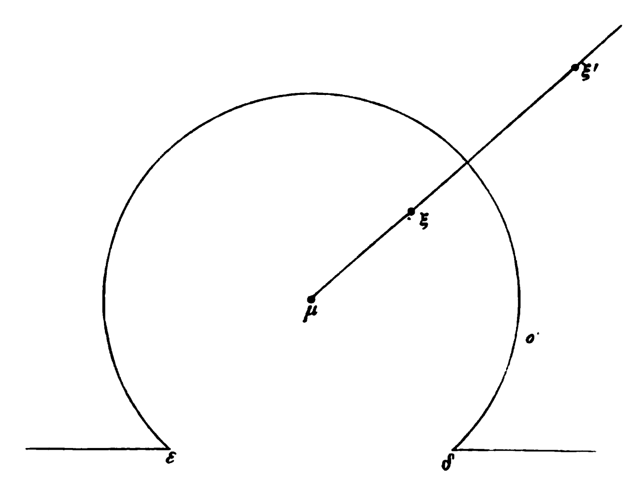


Fig. 1.

denen der Grundkreis von dieser Ebene resp. ihrer Fortsetzung getroffen wird, so ist offenbar:

$$(21.)\qquad \lambda = \frac{(\xi\delta)}{(\xi\varepsilon)}, \qquad \lambda' = \frac{(\xi'\delta)}{(\xi'\varepsilon)},$$
$$\Pi = \sqrt{(\xi\delta)\,(\xi\varepsilon)}, \qquad \Pi' = \sqrt{(\xi'\delta)\,(\xi'\varepsilon)}.$$

Sind nun η, η' irgend zwei Punkte, die (ebenso wie ξ, ξ') in Bezug auf σ zu einander conjugirt sind, so ist bekanntlich**):

$$(22.)\qquad \frac{(\xi\eta)}{\sqrt{(\mu\xi)\,(\mu\eta)}} = \frac{(\xi'\eta')}{\sqrt{(\mu\xi')\,(\mu\eta')}}.$$

wo μ den räumlichen Mittelpunkt der Calotte σ bezeichnet (vgl. die Figur). Nimmt man in dieser Formel für η einen Punkt der Calotte σ, z. B. irgend einen Punkt β des Grundkreises, mithin für η' ebendenselben Punkt, so folgt:

---

*) Ich nenne zwei Punkte in Bezug auf eine Kugelfläche vom Centrum μ *zu einander conjugirt*, wenn beide auf demselben von μ ausgehenden Strahl liegen, und wenn ausserdem das Produkt ihrer Centraldistanzen gleich dem Quadrat des Kugelradius ist. Und derselben Ausdrucksweise bediene ich mich auch dann, wenn von der Kugelfläche nur ein *Theil*, z. B. wie hier nur eine *Calotte* gegeben ist.

**) Vgl. (IV.) Seite 365.

(23.) $$\frac{(\xi\beta)}{\sqrt{(\mu\xi)}} = \frac{(\xi'\beta)}{\sqrt{(\mu\xi')}},$$

also, falls man β successive nach δ und ε rücken lässt:

(24.) $$\frac{(\xi\delta)}{\sqrt{(\mu\xi)}} = \frac{(\xi'\delta)}{\sqrt{(\mu\xi')}},$$
$$\frac{(\xi\varepsilon)}{\sqrt{(\mu\xi)}} = \frac{(\xi'\varepsilon)}{\sqrt{(\mu\xi')}}.$$

Hieraus folgt durch Division, mit Rücksicht auf (21.):

(25.) $$\lambda = \lambda';$$

andererseits durch Multiplication, wiederum mit Rücksicht auf (21.):

(26.) $$\frac{\Pi}{\sqrt{(\mu\xi)}} = \frac{\Pi'}{\sqrt{(\mu\xi')}}.$$

Ausserdem ist, weil die Punkte ξ, ξ' *dieselbe* Meridianebene haben, $\varphi = \varphi'$, oder genauer ausgedrückt:

(27.) $$\varphi \equiv \varphi', \pmod{2\pi}.$$

Es bleibt also nur noch die Beziehung zwischen ω und ω' zu untersuchen.

Unter *conjugirten Punkten* mögen hier stets solche verstanden werden, welche zu einander conjugirt sind in Bezug auf die gegebene Calotte σ, oder vielmehr in Bezug auf diejenige Kugelfläche, von welcher σ ein Theil ist. Denkt man sich nun im Raume eine beliebige Kugelfläche $\varkappa$ beschrieben, und sucht man zu allen Punkten dieser Kugelfläche die conjugirten Punkte auf, so wird bekanntlich *) die von diesen conjugirten Punkten gebildete Fläche wiederum eine Kugelfläche sein. Letztere heisst die zu $\varkappa$ conjugirte Kugelfläche, und mag mit $\varkappa'$ bezeichnet sein.

Geht $\varkappa$ durch den gegebenen Punkt ξ und durch irgend drei andere Punkte a, b, c, so wird $\varkappa'$ durch die zu ξ, a, b, c conjugirten Punkte ξ', a', b', c' hindurchgehen. Nimmt man nun für a, b, c irgend drei auf dem *Grundkreise* gelegene Punkte, so werden offenbar a', b', c' identisch mit a, b, c. Und man gelangt daher zu dem Satz: *Geht eine Kugelfläche $\varkappa$ durch den Punkt ξ und durch den Grundkreis, so geht die conjugirte Kugelfläche $\varkappa'$ durch den Punkt ξ' und ebenfalls durch den Grundkreis.* Auch bemerkt man, dass jede

*) Vgl. Seite 366.

dieser beiden Kugelflächen durch den Grundkreis in zwei Calotten zerlegt wird, und dass diese Calotten einzeln einander conjugirt sind.

Construirt man also eine auf dem Grundkreise stehende Calotte τ, welche durch ξ geht, und eine zweite ebenfalls auf dem Grundkreise stehende Calotte τ', welche durch ξ' geht, so werden diese beiden Calotten τ und τ' zu einander conjugirt sein. Gleiches gilt daher, weil σ sich selber conjugirt ist, auch von den Figuren σ, τ und σ, τ'. Conjugirte Figuren sind aber in ihren kleinsten Theilen *einander ähnlich* *). Folglich ist, was jene Figuren σ, τ und σ, τ' betrifft, *der Neigungswinkel, unter welchem die Calotten σ und τ am Grundkreise zusammenstossen, ebensogross wie derjenige Neigungswinkel, welchen σ und τ' daselbst bilden.*

Beachtet man nun, dass die durch $\xi(\lambda, \omega, \varphi)$ und $\xi'(\lambda', \omega', \varphi')$ gehenden Calotten τ und τ' die Inclinationen ω und ω' haben, und dass andererseits die Inclination der Calotte σ mit ω_σ bezeichnet wurde, so erkennt man sofort, dass jene beiden Neigungswinkel die Werthe haben $\varepsilon(\omega - \omega_\sigma)$ und $\varepsilon(\omega_\sigma - \omega')$, wo $\varepsilon = \pm 1$ ist. Aus der Gleichheit jener beiden Neigungswinkel ergiebt sich also die Formel: $\omega - \omega_\sigma = \omega_\sigma - \omega'$, d. i. $\omega + \omega' = 2\omega_\sigma$, oder genauer ausgedrückt:

$$(28.) \qquad \omega + \omega' \equiv 2\omega_\sigma, \pmod{2\pi}.$$

Dem Mittelpunkte μ der Calotte σ ist (immer in Bezug auf σ) ein Punkt μ' conjugirt, der im Unendlichen liegt. Lässt man also τ durch μ gehen, so wird gleichzeitig τ' durch den unendlich fernen Punkt μ' gehen, also sich verwandeln in die *äussere Grundfläche*. Mit andern Worten: Lässt man ω in das dem Punkte μ entsprechende ω_μ sich verwandeln, so verwandelt sich ω' in 0. Somit folgt aus Formel (28.):

$$(29.) \qquad \omega_\mu \equiv 2\omega_\sigma, \pmod{2\pi},$$

in voller Uebereinstimmung mit der früher gefundenen Formel (16.).

Um die Hauptresultate zusammenzufassen: *Sind zwei Punkte $\xi(\lambda, \omega, \varphi, \Pi)$ und $\xi'(\lambda', \omega', \varphi', \Pi')$ in Bezug auf eine über dem Grundkreise stehende Calotte σ zu einander conjugirt, so finden die Relationen statt:*

---

*) Vgl. Seite 365.

(30.)
$$\lambda = \lambda',$$
$$\omega + \omega' \equiv 2\,\omega_\sigma\,, \ (\mathrm{mod}\ 2\pi)\,,$$
$$\varphi \equiv \varphi', \ (\mathrm{mod}\ 2\pi)\,,$$
$$\frac{\Pi}{\sqrt{(\mu\,\xi)}} = \frac{\Pi'}{\sqrt{(\mu\,\xi')}};$$

hier bezeichnet μ den räumlichen Mittelpunkt der Calotte σ, ferner ω_σ die Inclination der Calotte σ, endlich ω_μ die Inclination derjenigen auf dem Grundkreise stehenden Calotte, welche durch μ geht.

(31.) . . . . . Ausserdem ist mit Bezug auf die Formel (29.) noch folgender Satz hinzuzufügen: *Errichtet man über dem gegebenen Grundkreis zwei Calotten, von welchen die zweite durch den räumlichen Mittelpunkt der ersten geht, so wird die Inclination dieser zweiten Calotte* (abgesehen von ganzen Vielfachen von 2π) *doppelt so gross sein als die der ersten.*

Beiläufige Bemerkung. — Betrachtet man *zwei* Paare conjugirter Punkte ξ, ξ' und η, η', und bezeichnet die Parameter derselben resp. mit Π, Π' und P, P', so ist nach (30.)

(32.)
$$\frac{\Pi}{\sqrt{(\mu\,\xi)}} = \frac{\Pi'}{\sqrt{(\mu\,\xi')}} \quad \text{und} \quad \frac{\mathrm{P}}{\sqrt{(\mu\,\eta)}} = \frac{\mathrm{P}'}{\sqrt{(\mu\,\eta')}};$$

wodurch die allgemeine Formel (22.) die Gestalt gewinnt:

(33.)
$$\frac{(\xi\,\eta)}{\Pi\,\mathrm{P}} = \frac{(\xi'\,\eta')}{\Pi'\,\mathrm{P}'},$$

eine Gestalt, in welcher sie, wie später gezeigt werden soll, einer bedeutenden Verallgemeinerung fähig ist.

§ 4.

Betrachtung zweier peripolaren Coordinatensysteme, deren Grundkreise in Bezug auf eine gegebene Kugelfläche einander conjugirt sind.

Ein Punkt ξ und ein Kreis β seien beliebig im Raume gegeben, und die peripolaren Coordinaten von ξ in Bezug auf β als Grundkreis seien bezeichnet mit λ, ω, φ. Lässt man nun diese Figur β, ξ an einer *gegebenen Ebene* sich spiegeln, so entsteht als Spiegelbild eine congruente Figur b, x. Und bezeichnet man, was diese neue Figur betrifft, die peripolaren Coordinaten des Punktes x in Bezug

auf b als Grundkreis mit l, w, v, so wird, wie aus der Congruenz beider Figuren folgt,

$$\lambda = l, \qquad \omega = w, \qquad \varphi = v$$

sein.

Weniger einfach werden offenbar diese Relationen ausfallen, wenn wir die ursprüngliche Figur β, ξ nicht an einer Ebene, sondern an einer *Kugelfläche* sich spiegeln lassen, oder (mit andern Worten) wenn wir unter b, x diejenige Figur verstehen, welche zur ursprünglichen Figur β, ξ conjugirt ist in Bezug auf jene gegebene *Kugelfläche*. Und die Ermittelung der in diesem complicirtern Fall stattfindenden Relationen bildet den Gegenstand, mit dem wir uns hier beschäftigen wollen.

Die zu behandelnde Aufgabe *ist also folgende: Beliebig im Raume sind gegeben ein Punkt ξ, ein Kreis β und eine Kugelfläche (o, H), d. h. eine Kugelfläche vom Centrum o und Halbmesser H. Gleichzeitig sei die zur Figur β, ξ in Bezug auf (o, H) conjugirte Figur mit b, x benannt. Endlich seien die peripolaren Coordinaten des Punktes ξ in Bezug auf β als Grundkreis mit λ, ω, φ, und die peripolaren Coordinaten des Punktes x in Bezug auf b als Grundkreis mit l, w, v, bezeichnet. — Es sollen ermittelt werden die zwischen λ, ω, φ und l, w, v stattfindenden Relationen.*

β und b liegen offenbar auf ein und demselben von o ausgehenden Kegelmantel, und können also bezeichnet werden als zwei nichtparallele Kreisschnitte dieses Mantels. Bezeichnet man die Symmetrie-Ebene dieses elliptischen Kegelmantels, d. h. diejenige durch o gehende Ebene, gegen welche die Ebenen der beiden Kreise β und b senkrecht stehen, mit E, und bezeichnet man ferner die Punkte, in denen die Kreislinien β und b von der Ebene E geschnitten werden*), resp. mit δ, ε und d, e, und zwar in solcher Weise, dass

$$(o\delta) < (o\varepsilon),$$
$$(od) < (oe)$$

ist, so werden die Punkte o, δ, e in gerader Linie liegen, desgleichen die Punkte o, ε, d. Oder genauer ausgedrückt: es werden

*) Die nebenstehende Figur ist gezeichnet zu denken *in* der Ebene E. In dieser Ebene E liegen offenbar auch die *geometrischen Axen* der beiden Grundkreise β und b. Dieselben sind in der Figur durch Pfeile angedeutet.

δ, e einander conjugirt sein in Bezug auf die gegebene Kugelfläche (o, H), desgleichen ε, d. Somit folgt:

$$H^2 = (o\delta)\,(oe) = (o\varepsilon)\,(od). \tag{34.}$$

Bezeichnet man ferner den Parameter des Punktes o in Bezug auf den Grundkreis β mit Π_o, und den Parameter eben desselben Punktes

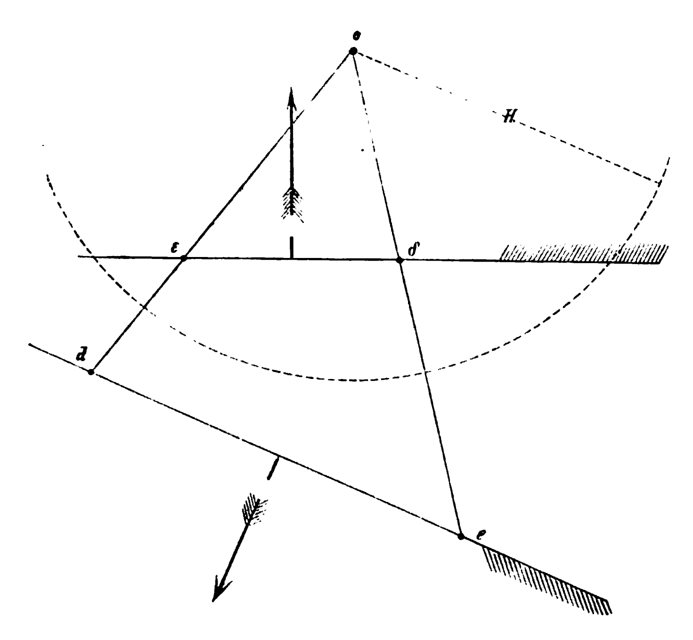


Fig. 5.

o in Bezug auf den Grundkreis b mit P_o, so ergiebt sich (vgl. die Definition des Parameters, Seite 369):

$$\begin{aligned} \Pi_o &= \sqrt{(o\delta)\,(o\varepsilon)}, \\ P_o &= \sqrt{(od)\,(oe)}, \end{aligned} \tag{35.}$$

also mit Rücksicht auf (34.):

$$\Pi_o\,P_o = H^2. \tag{36.}$$

Bezeichnet man die Radien der Kreise β und b mit den entsprechenden grossen Buchstaben B und B, so ist offenbar:

$$(\delta\varepsilon) = 2\mathrm{B}, \quad \text{und} \quad (de) = 2B. \tag{37.}$$

Ferner sind, wie z. B. aus (34.) folgt, die Dreiecke $o\delta\varepsilon$ und ode einander ähnlich, mithin ihre Seiten einander proportional, also:

$$\frac{(o\delta)}{\mathrm{B}} = \frac{(od)}{B}, \quad \text{und} \quad \frac{(o\varepsilon)}{\mathrm{B}} = \frac{(oe)}{B}.$$

Hieraus aber folgt durch Multiplication und mit Rücksicht auf (35.):

$$\frac{\Pi_0}{\mathrm{B}} = \frac{P_0}{B}. \tag{38.}$$

Solches vorangeschickt, gehen wir über zur

Ermittelung der zwischen ω und w stattfindenden Beziehung. — Ebenso wie die Inclination ω gerechnet werden soll von der *oberen* Seite der *äusseren* Grundfläche des Kreises β aus (vgl. Seite 369), ebenso soll auch die Inclination w gerechnet werden von der *oberen* Seite der *äusseren* Grundfläche des Kreises b aus. *Die oberen Seiten dieser äusseren Grundflächen mögen aber in solcher Weise festgesetzt sein, dass sie entweder einander zugekehrt, oder von einander abgewendet sind. Und zwar wollen wir, um die Vorstellung zu fixiren, uns für das letztere entscheiden, also als obere Seiten diejenigen ansehen, welche in Fig. Seite 381 schraffirt sind.*

Construirt man eine auf dem Grundkreise β stehende und durch ξ gehende Calotte $C_{\beta\xi}$, und ferner eine auf b stehende und durch x gehende Calotte C_{bx}, so werden weil ξ und x, ebenso β und b in Bezug auf die gegebene Kugelfläche (o, H) einander conjugirt sind, diese Calotten derselben Conjunction sich erfreuen; was angedeutet sein mag durch die Formel:

$$C_{\beta\xi} \text{ conj } C_{bx}. \tag{39.}$$

Lässt man ξ nach ∞, d. i. nach einem unendlich fernen Ort wandern, so geht gleichzeitig x nach o. Und umgekehrt: lässt man ξ nach o wandern, so geht x nach ∞. Somit ergeben sich aus der vorstehenden Formel (39.) die specielleren Formeln:

$$C_{\beta\infty} \text{ conj } C_{bo}, \tag{40.}$$

$$C_{\beta o} \text{ conj } C_{b\infty}. \tag{41.}$$

Nun sind offenbar $C_{\beta\infty}$ und $C_{b\infty}$ nichts anderes als die *äusseren Grundflächen* der Kreise β und b; und die Formeln (40.), (41.) sagen also aus, *dass die äussere Grundfläche von β der Calotte C_{bo}, und die äussere Grundfläche von b der Calotte $C_{\beta o}$ conjugirt ist**). Bezeichnet man ferner die Werthe der Coordinaten ω und w für den Punkt o mit ω_0 und w_0, oder (mit andern Worten) versteht man unter ω_0 und

---

*) Beiläufig folgt hieraus, dass die *innere* Grundfläche von β der zu $C_{\beta o}$ *supplementaren* Calotte conjugirt ist. U. s. w.

w_0 die Inclinationen der Calotten $C_{\beta 0}$ und C_{b0} in Bezug auf die Grundkreise β und b, so folgt aus den Formeln (40.), (41.), dass die Werthe

(42.) $$\omega = 0 \quad \text{und} \quad w = w_0$$

correspondirende Werthe der Variablen ω und w sind, und dass Gleiches auch gilt von den Werthen:

(43.) $$\omega = \omega_0 \quad \text{und} \quad w = 0.$$

Geben wir dem variablen Punkt ξ eine unendlich kleine Verrückung $\xi\xi'$, und dem correspondirenden (d. i. conjugirten) Punkt x die entsprechende Verrückung xx', so erhalten wir im Ganzen vier Calotten, entsprechend den Punkten ξ, ξ', x, x'. Diese Calotten mögen bezeichnet werden mit σ, σ', s, s', so dass also

(44.) $$\begin{aligned} \sigma &= C_{\beta\xi}, \qquad & s &= C_{bx}, \\ \sigma' &= C_{\beta\xi'}, & s' &= C_{bx'}. \end{aligned}$$

Sind nun (ebenso wie bisher) ω und w die Inclinationen der Calotten σ und s, ferner $\omega + d\omega$ und $w + dw$ die Inclinationen der Calotten σ' und s', so repräsentirt offenbar $d\omega$ den Neigungswinkel, unter welchem σ und σ' am Grundkreise β zusammenstossen, desgleichen dw denjenigen Neigungswinkel, unter welchem s und s' am Grundkreise b zusammenstossen. Diese Neigungswinkel aber müssen, weil die einander conjugirten Figuren σ, σ' und s, s' in ihren kleinsten Theilen einander ähnlich sind, von gleicher Grösse sein. Somit folgt:

(45.) $$d\omega = dw,$$

und hieraus durch Integration:

(46.) $$\omega = w + Const.$$

Um die *Const.* zu bestimmen, können wir uns entweder der in (42.) oder der in (43.) angegebenen correspondirenden Werthe von ω und w bedienen. Nehmen wir die erstern, so folgt: $0 = w_0 + Const.$, also $Const. = - w_0$; wodurch unsere allgemeine Formel (46.) die Gestalt erhält:

(47.) $$\omega = w - w_0.$$

Erinnern wir uns schliesslich daran, dass die Inclinationen *immer nur bestimmt sein sollen bis auf ganze Vielfache von* 2π, so werden wir die Formel (47.) folgendermassen zu schreiben haben:

(48. a) $$\omega \equiv w - w_0, \quad (\text{mod } 2\pi).$$

Uebrigens können wir die *Const.* in (46.) auch mit Hülfe der in (43.) angegebenen correspondirenden Werthe bestimmen. Alsdann erhalten wir die Relation zwischen ω und w in folgender Gestalt:

(48. b) $$\omega - \omega_0 \equiv w, \quad (\text{mod } 2\pi).$$

Um endlich der Relation eine mehr *symmetrische* Gestalt zu geben, brauchen wir nur die Formeln (48. a, b) zu addiren, und erhalten alsdann:

(48. c) $$2\omega - \omega_0 \equiv 2w - w_0, \quad (\text{mod } 2\pi),$$

oder, was dasselbe ist:

(48. d) $$\omega - \tfrac{1}{2}\omega_0 \equiv w - \tfrac{1}{2}w_0, \quad (\text{mod } \pi).$$

Schliesslich sei noch notirt die aus (48. a, b) durch Subtraction resultirende Formel:

(49.) $$\omega_0 + w_0 \equiv 0, \quad (\text{mod } 2\pi).$$

Nachdem wir die Relation zwischen ω und w durch die Formeln (48. a, b, c, d) *in vier verschiedenen Gestalten angegeben haben*, bleibt uns noch übrig diejenigen Relationen zu finden, welche zwischen λ, φ und l, v stattfinden. Zuvor aber wird es angemessen sein, die schon gefundenen Resultate weiter zu entwickeln; und hierbei werden wir zu merkwürdigen geometrischen Sätzen gelangen.

§ 5.

Einige geometrische Sätze.

Sind ξ, η, ζ irgend drei Puncte, und x, y, z die in Bezug auf die Kugelfläche (o, H) conjugirten Puncte, so ist nach bekanntem Satz*):

(50.) $$\frac{(\xi\eta)}{\sqrt{(o\xi)\,(o\eta)}} = \frac{(xy)}{\sqrt{(ox)\,(oy)}}, \quad \frac{(\xi\zeta)}{\sqrt{(o\xi)\,(o\zeta)}} = \frac{(xz)}{\sqrt{(ox)\,(oz)}}, \quad \frac{(\eta\zeta)}{\sqrt{(o\eta)\,(o\zeta)}} = \frac{(yz)}{\sqrt{(oy)\,(oz)}},$$

woraus durch Multiplication und Division folgt:

(51.) $$\frac{(\xi\eta)\,(o\zeta)}{(\xi\zeta)\,(\eta\zeta)} = \frac{(xy)\,(oz)}{(xz)\,(yz)}.$$

*) Vgl. (IV.) Seite 365.

Nach einem von mir aufgestellten Satz*) bleiben diese Formeln (50.), (51) in Gültigkeit, wenn man statt der conjugirten *Puncte* ζ, z zwei einander conjugirte *Kugelflächen* σ, s nimmt; nur sind alsdann unter den Symbolen (p, σ), (p, s) die Längen der von p an σ und s gelegten *Tangenten* zu verstehen, jede solche Tangente gerechnet vom Ausgangspunct p bis zu ihrem Berührungspunct. Somit folgt z. B. aus (51.), falls man gleichzeitig zum Quadrat erhebt:

$$(52.)\qquad \frac{(\xi\eta)^2\,(o\,\sigma)^2}{(\xi\,\sigma)^2\,(\eta\,\sigma)^2} = \frac{(x\,y)^2\,(o\,s)^2}{(x\,s)^2\,(y\,s)^2}.$$

Nimmt man endlich statt der *Kugelflächen* σ, s zwei über den Grundkreisen β, b errichtete, einander conjugirte *Kugelcalotten* σ, s, so ist nach (19.):

$$(53.)\qquad \begin{aligned} (\xi\,\sigma)^2 &= \frac{\sin(\omega_\sigma - \omega_\xi)}{\sin\omega_\sigma}\,\Pi_\xi^2, & (x\,s)^2 &= \frac{\sin(w_s - w_x)}{\sin w_s}\,P_x^2,\\ (\eta\,\sigma)^2 &= \frac{\sin(\omega_\sigma - \omega_\eta)}{\sin\omega_\sigma}\,\Pi_\eta^2, & (y\,s)^2 &= \frac{\sin(w_s - w_y)}{\sin w_s}\,P_y^2,\\ (o\,\sigma)^2 &= \frac{\sin(\omega_\sigma - \omega_o)}{\sin\omega_\sigma}\,\Pi_o^2, & (o\,s)^2 &= \frac{\sin(w_s - w_o)}{\sin w_s}\,P_o^2. \end{aligned}$$

Hier repräsentirt ω_σ die Inclination der Calotte σ in Bezug auf den Grundkreis β. Ferner bezeichnen ω_ξ, ω_η, ω_o die Inclinationen der Puncte ξ, η, o in Bezug auf den Grundkreis β, oder (was dasselbe) die Inclinationen derjenigen drei auf β stehenden Calotten, welche resp. durch ξ, η, o gehen. Ferner bezeichnen Π_ξ, Π_η, Π_o die Parameter der Puncte ξ, η, o wiederum in Bezug auf den Grundkreis β. Endlich haben w_s und w_x, w_y, w_o und P_x, P_y, P_o analoge Bedeutungen für die Calotte s und die Puncte x, y, o mit Bezug auf den Grundkreis b. — Durch Substitution der Werthe (53.) in die Formel (52.) folgt:

$$(54.)\qquad \left(\frac{(\xi\eta)\,\Pi_o}{\Pi_\xi\,\Pi_\eta}\right)^2 \frac{\sin(\omega_\sigma - \omega_o)\,.\,\sin\omega_\sigma}{\sin(\omega_\sigma - \omega_\xi)\,.\,\sin(\omega_\sigma - \omega_\eta)} = \left(\frac{(x\,y)\,P_o}{P_x\,P_y}\right)^2 \frac{\sin(w_s - w_o)\,.\,\sin w_s}{\sin(w_s - w_x)\,.\,\sin(w_s - w_y)}.$$

Nun ist aber nach (48. a):

$(\alpha.)$ . . . . $\omega_\sigma \equiv w_s - w_o$, (mod 2π),

ferner nach (48. b):

$(\beta.)$ . . . . $\omega_\sigma - \omega_o \equiv w_s$, (mod 2π),

$\omega_\xi - \omega_o \equiv w_x$, (mod 2π),

$\omega_\eta - \omega_o \equiv w_y$, (mod 2π),

*) Vgl. Seite 367.

und wie hieraus durch Subtraction folgt:

$(\gamma.)$ .... $\omega_\sigma - \omega_\xi \equiv w_s - w_x$, (mod 2π),

$(\delta.)$ .... $\omega_\sigma - \omega_\eta \equiv w_s - w_y$, (mod 2π).

Mit Rücksicht auf die vier Relationen $(\alpha.)$, $(\beta.)$, $(\gamma.)$, $(\delta.)$ gewinnt die Formel (54.) die einfachere Gestalt:

$$(55.)\qquad \left(\frac{(\xi\eta)\,\Pi_o}{\Pi_\xi\,\Pi_\eta}\right)^2 = \left(\frac{(xy)\,P_o}{P_x\,P_y}\right)^2;$$

so dass wir also zu folgendem Satz gelangen:

Sind zwei Kreislinien β, b und vier Puncte ξ, η, x, y in solcher Weise gegeben, dass β, ξ, η zu b, x, y conjugirt sind in **Bezug** *auf irgend eine Kugelfläche (o, H), so findet zwischen den Entfernungen $(\xi\eta)$ und (xy) die Relation statt:*

$$(56.)\qquad \frac{(\xi\eta)\,\Pi_o}{\Pi_\xi\,\Pi_\eta} = \frac{(xy)\,P_o}{P_x\,P_y},$$

wo Π_ξ, Π_η, Π_o die Parameter der Puncte ξ, η, o in Bezug auf den Kreis β, und P_x, P_y, P_o die Parameter der Puncte x, y, o in Bezug auf den Kreis b vorstellen).*

Sich anschliessende Sätze. Lässt man η nach o gehen, so wandert y nach ∞, d. i. nach einem unendlich fernen Punct. Somit folgt aus (56.):

$$\frac{(\xi o)}{\Pi_\xi} = \frac{(x\infty)\,P_o}{P_x\,P_\infty},$$

oder, falls man beachtet, dass nach der Definition des Parameters (Seite 369) $\frac{(x\infty)}{P_\infty} = 1$ ist:

---

*) Bezeichnet man die kürzeste und längste Kante des von ξ nach dem Kreise β gelegten Kegels resp. mit $(\xi\Delta)$ und $(\xi\mathsf{E})$, andererseits die kürzeste und längste Kante des von x nach dem Kreise b gelegten Kegels resp. mit (xD) und (xE), so ist offenbar:

$$\Pi_\xi = \sqrt{(\xi\Delta)\,(\xi\mathsf{E})},$$

$$P_x = \sqrt{(xD)\,(xE)}.$$

Aeusserst einfach würde nun der Beweis unseres Satzes (56.) sich führen lassen, wenn sich nachweisen liesse, dass die Puncte Δ und E, ebenso E und D einander conjugirt seien in Bezug auf die Kugelfläche (o, H). Das aber ist, wie aus der Betrachtung speciellerer Fälle leicht hervorgeht, im Allgemeinen *nicht* der Fall.

Jedenfalls unterliegt es wohl keinem Zweifel, dass wir hier zu dem Satze (56.) auf *bedeutenden Umwegen* gelangt sind, und dass eine einfache rein geometrische Ableitung desselben sich werde finden lassen. Eine solche werde ich im letzten § dieses Aufsatzes zu geben mich bemühen.

(57. a) $$\frac{(\xi o)}{\Pi_\xi} = \frac{P_o}{P_x};$$

und in analoger Weise ergiebt sich:

(57. b) $$\frac{(x o)}{P_x} = \frac{\Pi_o}{\Pi_\xi}.$$

Endlich erhält man durch Division der Formeln (57. a, b):

$$\frac{(\xi o)\, P_x}{(x o)\, \Pi_\xi} = \frac{P_o\, \Pi_\xi}{\Pi_o\, P_x},$$

oder, was dasselbe ist:

(57. c) $$\frac{(\xi o)\, \Pi_o}{\Pi_\xi^2} = \frac{(x o)\, P_o}{P_x^2}.$$

Unter diesen Sätzen (57. a, b, c) ist namentlich der letzte durch seine Einfachheit und Symmetrie beachtenswerth. Auch ist es leicht, zu zeigen, dass der ursprüngliche Satz (56.), falls man will, als eine *unmittelbare Folge* dieses letzten Satzes (57. c) angesehen werden kann.

Schlussbemerkung. Liegt der Kreis β mit all' seinen Puncten *auf* der gegebenen Kugelfläche (o, H), so wird b mit β, folglich auch P mit Π identisch. In diesem speciellen Fall gewinnt also die Formel (56.) folgende Gestalt:

$$\frac{(\xi \eta)\, \Pi_o}{\Pi_\xi\, \Pi_\eta} = \frac{(x y)\, \Pi_o}{\Pi_x\, \Pi_y},$$

oder, wenn man durch Π_o dividirt, folgende:

(58.) $$\frac{(\xi \eta)}{\Pi_\xi\, \Pi_\eta} = \frac{(x y)}{\Pi_x\, \Pi_y}.$$

Dies aber ist der schon früher in (33.) erhaltene Satz, nur in etwas anderer Bezeichnungsweise.

§ 6.

Weitere Behandlung der im vorletzten Paragraph (Seite 380) unternommenen Aufgabe.

Nachdem in (48. a, b, c, d) die Relation zwischen ω und w gefunden ist, bleibt zur vollständigen Lösung unserer damaligen Aufgabe (Seite 380) noch übrig, die Relationen zwischen λ, φ und l, v zu ermitteln.

Was die Azimuthe φ und v betrifft, so sei bemerkt, dass die *Anfangsmeridiane*, von denen aus dieselben zu rechnen sind, *unab-*

hängig von einander, *in ganz beliebiger Weise* festgesetzt sein sollen; und dass dieselbe gegenseitige Unabhängigkeit auch stattfinden soll hinsichtlich der *Richtungen*, in denen diese Azimuthe gerechnet werden. Denken wir uns also die Puncte ξ und x in beliebiger Bewegung begriffen, jedoch der Art, dass sie stets zu einander conjugirt bleiben in Bezug auf die gegebene Kugelfläche (o, H), und denken wir uns etwa, um die Vorstellung mehr zu fixiren, ξ längs der Kreislinie β, und x längs der Kreislinie b fortschreitend, so soll völlig dahingestellt bleiben, ob während einer solchen Bewegung die Azimuthe φ und v dieser Puncte beide im Wachsen begriffen sind, oder aber das eine im Wachsen, das andere im Abnehmen begriffen ist.

Was ferner die früher von uns construirten Puncte δ, ε, d, e (Figur, Seite 381) betrifft, so liegen offenbar o und δ in *ein und derselben* Meridianebene des Grundkreises β, während ε in der *diametral entgegengesetzten* Meridianebene gelegen ist. Somit ergiebt sich:

(59.) $$\varphi_\delta \equiv \varphi_o, \ (\text{mod } 2\pi), \qquad \varphi_\varepsilon \equiv \varphi_o + \pi, \ (\text{mod } 2\pi).$$

Analoges gilt offenbar für die Puncte o, d, e. Also:

(60.) $$v_d \equiv v_o, \ (\text{mod } 2\pi), \qquad v_e \equiv v_o + \pi, \ (\text{mod } 2\pi).$$

Diese Bemerkungen vorangeschickt, wenden wir uns nun zu unserer eigentlichen Aufgabe, indem wir dabei ausgehen von den in (56.) und (57. a) aufgestellten geometrischen Sätzen:

$$\frac{(\xi\eta)\,\Pi_o}{\Pi_\xi\,\Pi_\eta} = \frac{(xy)\,P_o}{P_x\,P_y},$$

$$\frac{(\eta o)}{\Pi_\eta} = \frac{P_o}{P_y} \quad {}^{*)}.$$

Aus diesen beiden Formeln folgt durch Division:

(61.) $$\frac{(\xi\eta)}{\Pi_\xi}\,\frac{\Pi_o}{(o\eta)} = \frac{(xy)}{P_x},$$

oder, falls man für η, y zwei auf den Kreislinien β, b gelegene Puncte β, b substituirt**):

*) Statt des in (57. a) auftretenden conjugirten Punctpaares ξ, x ist hier das conjugirte Punctpaar η, y genommen.

**) Es wird kein Missverständniss hervorrufen, wenn wir hier die *Puncte* mit denselben Buchstaben wie die *Kreislinien* bezeichnen.

(62.) $$\frac{(\xi\beta)}{\Pi_\xi}\,\frac{\Pi_o}{(o\beta)} = \frac{(x\,b)}{P_x}.$$

Bezeichnen wir nun, wie zum Theil schon früher geschehen, die Coordinaten*)

von ξ mit $\lambda,\ \omega,\ \varphi$, von x mit $l,\ w,\ v$,
von β mit $0,\ *,\ \varphi_\beta$, von b mit $0,\ *,\ v_b$,
von o mit $\lambda_o,\ \omega_o,\ \varphi_o$, von o mil $l_o,\ w_o,\ v_o$,

so folgt aus (11.) und (14.):

$$(\xi\beta)^2 = 2\,B^2\,\frac{(1+\lambda^2)-(1-\lambda^2)\cos(\varphi-\varphi_\beta)}{1-2\lambda\cos\omega+\lambda^2},$$

$$\Pi_\xi^2 = 2\,B^2\,\frac{2\lambda}{1-2\lambda\cos\omega+\lambda^2},$$

und hieraus durch Division:

(A.) $$\left(\frac{(\xi\beta)}{\Pi_\xi}\right)^2 = \frac{1+\lambda^2}{2\lambda} - \frac{1-\lambda^2}{2\lambda}\cos(\varphi-\varphi_\beta),$$

also, falls man ξ für einen Augenblick nach o rücken lässt:

(B.) $$\left(\frac{(o\beta)}{\Pi_o}\right)^2 = \frac{1+\lambda_o^2}{2\lambda_o} - \frac{1-\lambda_o^2}{2\lambda_o}\cos(\varphi_o-\varphi_\beta).$$

Ferner ergiebt sich die mit (A.) analoge Formel:

(C.) $$\left(\frac{(x\,b)}{P_x}\right)^2 = \frac{1+l^2}{2l} - \frac{1-l^2}{2l}\cos(v-v_b).$$

Durch Substitution dieser Werthe (A.), (B.), (C.) in (62.) folgt:

(63.) $$\frac{\lambda_o}{\lambda}\,\frac{(1+\lambda^2)-(1-\lambda^2)\cos(\varphi-\varphi_\beta)}{(1+\lambda_o^2)-(1-\lambda_o^2)\cos(\varphi_o-\varphi_\beta)} = \frac{(1+l^2)-(1-l^2)\cos(v-v_b)}{2l}.$$

β und b sind irgend zwei conjugirte Puncte auf den gleichnamigen Kreisperipherien, also zwei Puncte, welche mit o in gerader Linie liegen, und können also z. B. in die speciellen Lagen δ und e, oder auch in die speciellen Lagen ε und d versetzt werden (vgl. Figur Seite 381). Im ersten Falle wird, wie die unmittelbare geometrische Anschauung zeigt [vgl. auch (59.), (60.)]:

$$\varphi_\beta \equiv \varphi_o,\ (\mathrm{mod}\ 2\pi),\quad \text{und}\quad v_b \equiv v_o + \pi,\ (\mathrm{mod}\ 2\pi);$$

und andererseits wird im zweiten Fall:

$$\varphi_\beta \equiv \varphi_o + \pi,\ (\mathrm{mod}\ 2\pi),\quad \text{und}\quad v_b \equiv v_o,\ (\mathrm{mod}\ 2\pi).$$

Somit erhält man aus (63.) die specielleren Formeln:

*) Die ω-Coordinate von β und die w-Coordinate von b sind *unbestimmt*, und deswegen durch einen * bezeichnet.



$$(64.)\quad \begin{aligned} \frac{\lambda_0}{\lambda}\,\frac{(1+\lambda^2)-(1-\lambda^2)\cos(\varphi-\varphi_0)}{2\lambda_0^2} &= \frac{(1+l^2)+(1-l^2)\cos(v-v_0)}{2l}, \\ \frac{\lambda_0}{\lambda}\,\frac{(1+\lambda^2)+(1-\lambda^2)\cos(\varphi-\varphi_0)}{2} &= \frac{(1+l^2)-(1-l^2)\cos(v-v_0)}{2l}; \end{aligned}$$

aus denen durch Addition und Subtraction folgt:

$$(65.)\quad \begin{aligned} \left(\frac{1+\lambda_0^2}{2\lambda_0}\right)\left(\frac{1+\lambda^2}{2\lambda}\right)-\left(\frac{1-\lambda_0^2}{2\lambda_0}\right)\left(\frac{1-\lambda^2}{2\lambda}\right)\cos(\varphi-\varphi_0) &= \left(\frac{1+l^2}{2l}\right), \\ \left(\frac{1-\lambda_0^2}{2\lambda_0}\right)\left(\frac{1+\lambda^2}{2\lambda}\right)-\left(\frac{1+\lambda_0^2}{2\lambda_0}\right)\left(\frac{1-\lambda^2}{2\lambda}\right)\cos(\varphi-\varphi_0) &= \left(\frac{1-l^2}{2l}\right)\cos(v-v_0). \end{aligned}$$

Diese Formeln (65.) *repräsentiren die gesuchten Relationen zwischen den Variablen* λ, φ *und* l, v. Die in denselben enthaltenen Constanten λ_0, φ_0, v_0 hängen ab von der relativen Lage der beiden Grundkreise β, b zur Kugelfläche (o, H).

§ 7.

Prüfung der erhaltenen Resultate durch Anwendung auf einen speciellen Fall.

Die zwischen λ, ω, φ und l, w, v erhaltenen Relationen lauten nach (48. b) und (65.) folgendermassen:

$$w \equiv \omega - \omega_0, \ (\mathrm{mod}\ 2\pi),$$

$$(66.)\quad \begin{aligned} \left(\frac{1+\lambda_0^2}{2\lambda_0}\right)\left(\frac{1+\lambda^2}{2\lambda}\right)-\left(\frac{1-\lambda_0^2}{2\lambda_0}\right)\left(\frac{1-\lambda^2}{2\lambda}\right)\cos(\varphi-\varphi_0) &= \left(\frac{1+l^2}{2l}\right), \\ \left(\frac{1-\lambda_0^2}{2\lambda_0}\right)\left(\frac{1+\lambda^2}{2\lambda}\right)-\left(\frac{1+\lambda_0^2}{2\lambda_0}\right)\left(\frac{1-\lambda^2}{2\lambda}\right)\cos(\varphi-\varphi_0) &= \left(\frac{1-l^2}{2l}\right)\cos(v-v_0). \end{aligned}$$

Wir wollen nun diese Relationen auf den speciellen Fall in Anwendung bringen, dass die Kreislinie β mit all' ihren Puncten *auf* der Kugelfläche (o, H) liegt. Dann wird b mit β identisch, und $\lambda_0 = 1$; so dass die Relationen (66.) übergehen in

$$(67.)\quad \begin{aligned} w &\equiv \omega - \omega_0, \ (\mathrm{mod}\ 2\pi), \\ \left(\frac{1+\lambda^2}{2\lambda}\right) &= \left(\frac{1+l^2}{2l}\right), \\ -\left(\frac{1-\lambda^2}{2\lambda}\right)\cos(\varphi-\varphi_0) &= \left(\frac{1-l^2}{2l}\right)\cos(v-v_0). \end{aligned}$$

Aus der *zweiten* folgt $\lambda + \lambda^{-1} = l + l^{-1}$, mithin entweder $\lambda = l$, oder $\lambda = l^{-1}$. Letzteres aber ist unmöglich, weil λ sowohl wie l

ihrer Definition nach stets zwischen 0 . . . 1 liegen. Somit ergiebt sich also:

(A.) $$\lambda = l;$$

und mit Rücksicht hierauf nimmt die *dritte* Relation die Gestalt an: $\cos(\varphi - \varphi_0) + \cos(v - v_0) = 0$, oder (was dasselbe ist) die Gestalt:

(B.) $$(\varphi - \varphi_0) \equiv \pm (v - v_0) + \pi, \pmod{2\pi}.$$

Ueber die Rechnungsweise der Azimuthe φ, v ist im Allgemeinen keinerlei Regel festgesetzt worden. Macht man für den gegenwärtigen Specialfall, wo β und b identisch sind, die Festsetzung, dass beide Azimuthe in *gleicher Richtung* gerechnet werden sollen, so ist in Formel (B.) das *obere* Vorzeichen zu nehmen, also zu setzen:

(C.) $$(\varphi - \varphi_0) \equiv (v - v_0) + \pi, \pmod{2\pi}.$$

Setzt man ferner fest, dass beide Azimuthe φ und v, mithin z. B. auch φ_0 und v_0 von *ein und demselben* Anfangsmeridian aus gerechnet werden sollen, so wird

(D.) $$\varphi_0 \equiv v_0 + \pi, \pmod{2\pi};$$

denn φ_0 war (vgl. (59.)] das Azimuth von δ, und v_0 dasjenige von d [vgl. (60.)], und man übersieht sofort, dass δ und d beim Uebergange vom allgemeinen Fall zum gegenwärtigen Specialfall sich in zwei *einander diametral gegenüberliegende* Puncte verwandeln (vgl. die Figur Seite 381). Durch Addition von (C.), (D.) folgt:

(E.) $$\varphi \equiv v, \pmod{2\pi}.$$

Die dem betrachteten Specialfall entsprechenden Relationen (67.) können also mit Rücksicht darauf, dass die *zweite* und *dritte* dieser Relationen die Gestalten (A.) und (E.) angenommen haben, folgendermassen dargestellt werden:

(68.) $$\begin{aligned} \omega + (-w) &\equiv \omega_0, \pmod{2\pi}, \\ \lambda &= l, \\ \varphi &\equiv v, \pmod{2\pi}. \end{aligned}$$

Vergleicht man diese Relationen mit den früher *direct* für diesen Specialfall abgeleiteten Relationen (30.):

$$\begin{aligned} \omega + \omega' &\equiv \omega_\mu, \pmod{2\pi}, ^{*)} \\ \lambda &= \lambda', \\ \varphi &\equiv \varphi', \pmod{2\pi}, \end{aligned}$$

*) Statt $2\omega_0$ kann nämlich ω_μ gesetzt werden, zufolge (29.).

so bemerkt man völlige Uebereinstimmung, nur dass $(-w)$ statt ω' steht. Dieser Unterschied erklärt sich daraus, dass die *oberen* Seiten der äusseren Grundflächen der Kreise β und b, von denen aus die Inclinationen ω und w zu rechnen sind, *entgegengesetzte Lagen* haben (vgl. Seite 382), und dass dieser Gegensatz auch auf den hier betrachteten Specialfall, wo beide Kreise zusammenfallen, sich übertragen hat. Mit andern Worten, der in Rede stehende Unterschied erklärt sich daraus, dass das damalige ω' und das gegenwärtige w in verschiedenen Richtungen gerechnet sind, nämlich ω' in derselben Richtung wie ω, andererseits aber w in der zu ω entgegengesetzten Richtung.

§ 8.

Einfachere Ableitung der im Vorhergehenden (Seite 386, 387) gefundenen geometrischen Sätze.

Aufstellung einiger Hülfssätze. — Wir betrachten zunächst Figuren, die einander conjugirt sind in Bezug auf eine gegebene Kugelfläche σ. Sind ξ, ξ' zwei in solcher Weise conjugirte Puncte, und legt man durch ξ beliebig viele Kugelflächen α, β, γ, ..., so werden die conjugirten Kugelflächen α', β' γ', ... sämmtlich durch ξ' gehen. Auch werden je zwei solche Kugelflächen wie α und α' die gegebene Kugelfläche σ in *ein und demselben* Kreise schneiden. Nimmt man nun insbesondere für die durch ξ gehenden Flächen α, β, γ, ... lauter zu σ *orthogonale* Kugelflächen, so werden offenbar α', β', γ', ... mit α, β, γ, ... *identisch**). Somit ergiebt sich der Satz:

(1.) ... *Legt man durch einen Punct ξ unendlich viele Kugelflächen α, β, γ, ..., welche sämmtlich orthogonal sind zu einer gegebenen Kugelfläche σ, so werden alle jene Kugelflächen α, β, γ, ... noch durch einen zweiten Punct ξ' gehen. Dieser letztere ist der zu ξ in Bezug auf σ conjugirte Punct.*

Fügt man eine neue Kugelfläche (o, H) hinzu, d. i. eine Kugelfläche, die mit beliebigem Radius H um einen beliebigen Punct o

*) Denn die Kugelfläche σ wird z. B. von α und α' (wie schon bemerkt wurde) in *ein und demselben* Kreise geschnitten. Ist nun ausserdem α zu σ *orthogonal*, so gilt offenbar, (nämlich nach dem Satze der Aehnlichkeit, Seite 365) Gleiches auch von α'. Und es wird also in diesem Fall α' mit α *identisch* sein. W. z. z. w.

beschrieben ist, und construirt man zu der im Satze (1.) betrachteten Figur:

$$\sigma,\ \xi,\ \xi',\ \alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \ldots$$

die in Bezug auf $(o,\ H)$ conjugirte Figur:

$$s,\ x,\ x',\ a,\ b,\ c,\ \ldots,$$

und beachtet man, dass die Kugelflächen α, β, γ, ... sämmtlich orthogonal sein sollen zur Kugelfläche σ, so ergiebt sich aus dem Satze der Aehnlichkeit sofort, dass auch die Kugelflächen a, b, c, ... orthogonal zur Kugelfläche s sind. Hieraus aber folgt, mit Rücksicht auf den Satz (1.) sofort, dass die Puncte x, x' einander conjugirt sind in Bezug auf die Kugelfläche s. Also der Satz:

(2.) ... *Sind zwei Puncte ξ, ξ' einander conjugirt in Bezug auf eine Kugelfläche σ, und construirt man in Bezug auf eine im Raume beliebig gegebene Kugelfläche $(o,\ H)$ die zu σ, ξ, ξ' conjugirte Figur s, x, x', so werden x, x' einander conjugirt sein in Bezug auf s.*

Man kann diesen Satz unmittelbar von *Puncten* auf beliebige *Figuren* ausdehnen, und hat alsdann sich folgendermassen auszudrücken:

(3.) ... *Sind zwei Figuren Φ, Φ' einander conjugirt in Bezug auf eine Kugelfläche σ, und construirt man in Bezug auf eine im Raume beliebig gegebene Kugelfläche $(o,\ H)$ die zu σ, Φ, Φ' conjugirte Figur s, F, F', so werden F, F' einander conjugirt sein in Bezug auf s.*

Denkt man sich die eben genannten Figuren und Kugelflächen

Φ	σ	Φ'
	$(o,\ H)$	
F	s	F'

sämmtlich construirt *mit alleiniger Ausnahme von F'*, so wird man offenbar [nämlich auf Grund des Satzes (3.)] diese Lücke in doppelter Weise beseitigen können, nämlich entweder dadurch, dass

man F an s, oder dadurch, dass man Φ' an (o, H) sich spiegeln lässt. Denn im einen wie im andern Fall wird die durch eine solche Spiegelung entstehende Figur identisch mit F' sein. Man erkennt somit leicht, dass man den Satz (3.) auch so aussprechen kann:

(4.) . . . *Sind zwei Figuren Φ, Φ' conjugirt in Bezug auf eine Kugelfläche σ, sind ferner irgend zwei andere Figuren F, F' einander conjugirt in Bezug auf eine Kugelfläche s, und sind endlich σ, Φ zu s, F conjugirt in Bezug auf eine Kugelfläche (o, H), so wird in Bezug auf diese letztere auch Φ' conjugirt sein zu F'.*

Zu diesen Hülfssätzen mag endlich noch folgender hinzugefügt werden, der aus (36.), (38.) Seite 381 sich sofort ablesen lässt:

(5.) . . . *Sind zwei Kreislinien β und b, deren Radien resp. mit* B *und B bezeichnet sein mögen, einander conjugirt in Bezug auf eine gegebene Kugelfläche (o, H), und bezeichnet man die Parameter des Punctes o in Bezug auf β und b resp. mit Π_o und P_o, so gelten die Formeln:*

$$\Pi_o P_o = H^2,$$

$$\Pi_o : P_o = \mathrm{B} : B.$$

Selbstverständlich sind hier unter o und H der Mittelpunct und der Halbmesser der Kugelfläche (o, H) zu verstehen. Die auf Seite 381, 382 für diesen Satz gegebene Begründung ist eine äusserst einfache und rein geometrische.

Diese Hülfssätze vorangeschickt, wenden wir uns nun zu unserer eigentlichen Aufgabe, d. i. zur

Ableitung des Satzes Seite 386. — Es handelt sich hier um zwei *Kreislinien* β, b, die einander conjugirt sind in Bezug auf eine gegebene Kugelfläche (o, H), ferner um zwei *Puncte*, die derselben Conjunction sich erfreuen. An Stelle dieser Puncte wollen wir zunächst zwei *unendlich kleine Kugeln* σ, s nehmen, und jene Kreislinien β, b an diesen Kugeln sich spiegeln lassen. Die so entstehenden neuen Kreislinien β', b' sind alsdann ebenfalls *unendlich klein*, und (ebenso wie β, b selber) einander conjugirt in Bezug auf die Kugelfläche (o, H), — nach Satz (4.).

Einander conjugirte *unendlich kleine* Figuren sind aber einander *ähnlich* *). Bringt man diesen Satz in Anwendung auf die unendlich kleinen Figuren σ, β' und s, b', so gelangt man zu einer gewissen Formel **), welche ohne Schwierigkeit auf die ursprünglichen Kreise β, b sich übertragen lässt. Und hiedurch gelangt man zu dem abzuleitenden Satz.

Genaueres. — Wir construiren irgend zwei in Bezug auf (o, H) zu einander conjugirte *unendlich kleine* Kugeln σ und s, deren Mittelpuncte ξ, x, und deren Radien ϱ, r heissen mögen. Die Puncte

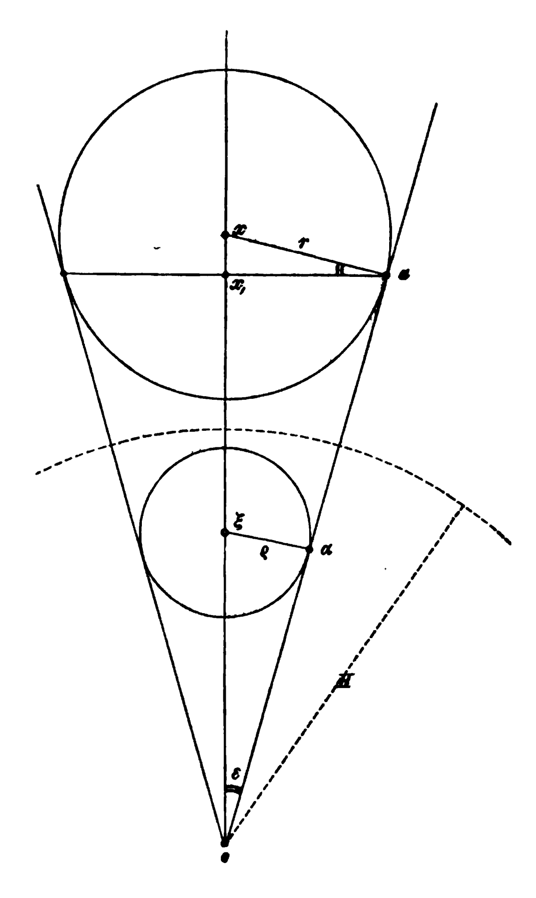


Fig. 6.

ξ und x liegen alsdann auf ein und demselben von o ausgehenden Strahl. Legt man von o aus eine Tangente $o\alpha a$ an die beiden

*) Satz Seite 365.
**) Es ist dies die Formel (F.) Seite 396.

Kugeln, und fällt sodann von a ein Perdendikel $a x_1$ auf die Linie $o \xi x$, so ist offenbar*):

$$(o\xi)\,(o x_1) = (o\alpha)\,(o a), \text{ d. i. } = H^2;$$

woraus folgt, dass *die Puncte* ξ *und* x_1 *einander conjugirt sind* in Bezug auf die gegebene Kugelfläche (o, H). Bezeichnet man ferner den Neigungswinkel der beiden Strahlen $o\xi x$ und $o\alpha a$ mit ε, so ergiebt sich:

$$(a x_1) = (a x) \cos \varepsilon.$$

Der Winkel ε aber ist, weil die beiden Kugeln unendlich klein sein sollen, ebenfalls unendlich klein; sodass man also erhält:

(6.) $$(a x_1) = (a x).$$

Auch ergiebt sich aus der Aehnlichkeit der Dreiecke $o\alpha\xi$ und oax die Formel:

(7.) $$\frac{\varrho}{(o\xi)} = \frac{r}{(o x)}.$$

Diese elementaren Formeln vorangeschickt, wollen wir nun in unsere Vorstellung mit hineinziehen irgend zwei (in der Figur *nicht* gezeichnete) Kreise β und b, die zu einander conjugirt sind in Bezug auf (o, H). Lassen wir β an σ und b an s sich spiegeln, so erhalten wir zwei *unendlich kleine* Kreise β' und b', die [zufolge des Satzes (4.)] wiederum einander conjugirt sind in Bezug auf (o, H). Gleichzeitig mögen die Radien der vier Kreise β, b, β', b' bezeichnet sein mit B, B, B', B'.

Da die in Bezug auf (o, H) einander conjugirten Figuren σ, β' und s, b' *unendlich klein*, mithin *einander ähnlich* sind, so werden die correspondirenden Linienelemente in diesen Figuren einander proportional sein. Hieraus folgt z. B.:

(F.) $$\frac{(\alpha\xi)}{2\mathsf{B}'} = \frac{(a x_1)}{2B'}, \qquad **)$$

---

*) nämlich weil $(a\alpha\xi x_1)$ ein Kreis-Viereck ist.

**) Die beiden Kreislinien β', b' liegen, weil sie in Bezug auf (o, H) conjugirt sind, auf ein und demselben von o ausgehenden Kegelmantel. Ist nun E die Symmetrie-Ebene dieses Mantels, d. i. diejenige Ebene, welche zu den Ebenen der beiden Kreise β' und b' senkrecht steht, und bezeichnet man ähnlich wie früher (Figur Seite 381) die Puncte, in denen die Kreise β' und b' von der Symmetrie-Ebene E geschnitten werden, mit δ', ε' und d', e', so ist offenbar $(\delta'\,\varepsilon') = 2\,\mathsf{B}'$ und $(d'\,e') = 2\,B'$. Diese beiden Durchmesser sind aber (ebenso wie die Kreise selber) unendlich klein, und repräsentiren daher *zwei einander conjugirte Linienelemente*. Dies sind die Nenner der obigen Formel (F.).

Dass andererseits die Zähler $(\alpha\xi)$ und $(a x_1)$ der Formel (F.) ebenfalls *zwei einander conjugirte Linienelemente* vorstellen, bedarf keiner weiteren Erläuterung.

oder mit Rücksicht auf (6.):

$$\frac{(\alpha\xi)}{2\mathrm{B}'} = \frac{(a x)}{2 B'},$$

d. i.

(8.) $$\frac{\varrho}{\mathrm{B}'} = \frac{r}{B'},$$

oder, falls man mit (7.) multiplicirt:

(9.) $$\frac{\varrho^2}{(o\xi)\,\mathrm{B}'} = \frac{r^2}{(o x)\,B'}.$$

Diese Formel wollen wir nun auf die ursprünglichen Kreise, d. i. auf β, b zu übertragen suchen. — Nach (5.) ist $H^2 = \Pi_0 P_0$, und hiemit analog: $\varrho^2 = \Pi\Pi'$, und $r^2 = PP'$, falls man nämlich unter Π, Π' die Parameter des Punctes ξ in Bezug auf β, β', andererseits unter P, P' die Parameter des Punctes x in Bezug auf b, b' versteht. Somit folgt aus (9.):

(10.) $$\frac{\Pi\Pi'}{(o\xi)\,\mathrm{B}'} = \frac{P P'}{(o x)\,B'}.$$

Ferner ist nach (5.): $\Pi_0 : \mathrm{B} = P_0 : B$, und hiemit analog: $\Pi' : \mathrm{B}' = \Pi : \mathrm{B}$, und $P' : B' = P : B$, wo Π, Π', P, P' die schon genannten Bedeutungen haben. Somit folgt aus (10.):

(11.) $$\frac{\Pi\,\Pi}{(o\xi)\,\mathrm{B}} = \frac{P\,P}{(o x)\,B}.$$

Diese Formel aber führt, falls man die unendlich kleinen Kugeln σ, s geradezu in *Puncte* sich verwandeln lässt, und beachtet, dass alsdann zwischen diesen Kugeln σ, s und ihren Mittelpuncten ξ, x kein Unterschied mehr stattfindet, zu folgendem Resultat:

Sind zwei Kreislinien β, b mit den Radien B, B *und zwei Puncte ξ, x in solcher Weise gegeben, dass β, ξ zu b, x conjugirt sind in Bezug auf eine gegebene Kugelfläche* (o, H), *so findet die Relation statt:*

(12.) $$\frac{\Pi^2}{(o\xi)\,\mathrm{B}} = \frac{P^2}{(o x)\,B},$$

wo Π *den Parameter von ξ in Bezug auf β, und P den Parameter von x in Bezug auf b vorstellt.*

Dieser Satz aber ist identisch mit unserem früheren Satze (57. c) auf Seite 387. Nur ist dort statt Π, P die genauere Bezeichnungsweise Π_ξ, P_x angewendet.

Bedient man sich dieser genaueren Bezeichnungsweise, und denkt man sich ausser dem Punctpaar ξ, x noch ein zweites in

Bezug auf (o, H) conjugirtes Punctpaar η, y, so erhält man aus (12.) successive die Gleichungen:

$$\frac{\Pi_\xi^2}{(o\xi)\,\mathrm{B}} = \frac{P_x^2}{(ox)\,B},$$

$$\frac{\Pi_\eta^2}{(o\eta)\,\mathrm{B}} = \frac{P_y^2}{(oy)\,B},$$

und hieraus durch Multiplication, und mit Rücksicht auf (5.):

(13.) $$\frac{(\Pi_\xi\,\Pi_\eta)^2}{(o\xi)\,(o\eta)\,\Pi_o^2} = \frac{(P_x\,P_y)^2}{(ox)\,(oy)\,P_o^2},$$

oder, weil nach bekanntem Satz $(o\xi)\,(o\eta) : (ox)\,(oy) = (\xi\eta)^2 : (xy)^2$ ist*):

(14.) $$\frac{\Pi_\xi\,\Pi_\eta}{(\xi\eta)\,\Pi_o} = \frac{P_x\,P_y}{(xy)\,P_o}.$$

Dies aber ist derjenige Satz, um dessen Beweis es sich handelte, (Seite 386).

*) Vgl. die Formel (IV.) Seite 365.

Inhalts-Uebersicht.

SECHSTER BAND. (IX. Bd.) Mit 10 Tafeln. hoch 4. 1864. brosch. Preis 19 *M* 20 *Pf*.

W. G. HANKEL, Elektrische Untersuchungen. Fünfte Abhandlung: Maassbestimmungen der elektromotorischen Kräfte. Erster Theil. 1861. 1 *M* 60 *Pf*.

—— Messungen über die Absorption der chemischen Strahlen des Sonnenlichtes. 1862. 1 *M* 20 *Pf*.

P. A. HANSEN, Darlegung der theoretischen Berechnung der in den Mondtafeln angewandten Störungen. Erste Abhandlung. 1862. 9 *M*.

G. METTENIUS, Ueber den Bau von Angiopteris. Mit 10 Tafeln. 1863. 4 *M* 40 *Pf*.

W. WEBER, Elektrodynamische Maassbestimmungen, insbesondere über elektrische Schwingungen. 1864. 3 *M*.

SIEBENTER BAND. (XI. Bd.) Mit 5 Tafeln. hoch 4. 1865. brosch. 17 *M*.

P. A. HANSEN, Darlegung der theoretischen Berechnung der in den Mondtafeln angewandten Störungen. Zweite Abhandlung. 1864. 9 *M*.

G. METTENIUS, Ueber die Hymenophyllaceae. Mit 5 Tafeln. 1864. 3 *M* 60 *Pf*.

P. A. HANSEN, Relationen einestheils zwischen Summen und Differenzen und anderntheils zwischen Integralen und Differentialen. 1865. 2 *M*.

W. G. HANKEL, Elektrische Untersuchungen. Sechste Abhandlung: Maassbestimmungen der elektromotorischen Kräfte. Zweiter Theil. 1865. 2 *M* 80 *Pf*.

ACHTER BAND. (XIII. Bd.) Mit 3 Tafeln. hoch 4. 1868. brosch. Preis 24 *M*.

P. A. HANSEN, Geodätische Untersuchungen. 1865. 5 *M* 60 *Pf*.

—— Bestimmung des Längenunterschiedes zwischen den Sternwarten zu Gotha und Leipzig, unter seiner Mitwirkung ausgeführt von Dr. Auwers und Prof. Bruhns im April des Jahres 1865. Mit 1 Figurentafel. 1866. 2 *M* 80 *Pf*.

W. G. HANKEL, Elektrische Untersuchungen. Siebente Abhandlung: Ueber die thermoelektrischen Eigenschaften des Bergkrystalles. Mit 2 Tafeln. 1866. 2 *M* 40 *Pf*.

P. A. HANSEN, Tafeln der Egeria mit Zugrundelegung der in den Abhandlungen der Königl. Sächs. Gesellschaft der Wissenschaften in Leipzig veröffentlichten Störungen dieses Planeten berechnet und mit einleitenden Aufsätzen versehen. 1867. 6 *M* 80 *Pf*.

—— Von der Methode der kleinsten Quadrate im Allgemeinen und in ihrer Anwendung auf die Geodäsie. 1867. 6 *M*.

NEUNTER BAND. (XIV. Bd.) Mit 6 Tafeln. hoch 4. 1871. brosch. Preis 18 *M*.

P. A. HANSEN, Fortgesetzte geodätische Untersuchungen, bestehend in zehn Supplementen zur Abhandlung von der Methode der kleinsten Quadrate im Allgemeinen und in ihrer Anwendung auf die Geodäsie. 1868. 5 *M* 40 *Pf*.

—— Entwickelung eines neuen veränderten Verfahrens zur Ausgleichung eines Dreiecksnetzes mit besonderer Betrachtung des Falles, in welchem gewisse Winkel vorausbestimmte Werthe bekommen sollen. 1869. 3 *M*.

—— Supplement zu der geodätische Untersuchungen benannten Abhandlung, die Reduction der Winkel eines sphäroidischen Dreiecks betr. 1869. 2 *M*.

W. G. HANKEL, Elektrische Untersuchungen. Achte Abhandlung: Ueber die thermoelektrischen Eigenschaften des Topases. Mit 4 Tafeln. 1870. 2 *M* 40 *Pf*.

P. A. HANSEN, Bestimmung der Sonnenparallaxe durch Venusvorübergänge vor der Sonnenscheibe mit besonderer Berücksichtigung des im Jahre 1874 eintreffenden Vorüberganges. Mit zwei Planigloben. 1870. 3 *M*.

G. T. FECHNER, Zur experimentalen Aesthetik. Erster Theil. 1871. 3 *M*.

ZEHNTER BAND. (XV. Bd.) Mit 7 Tafeln. hoch 4. 1874. brosch. Preis 21 *M*.

W. WEBER, Elektrodynamische Maassbestimmungen, insbesondere über das Princip der Erhaltung der Energie. 1871. 1 *M* 60 *Pf*.

P. A. HANSEN, Untersuchung des Weges eines Lichtstrahls durch eine beliebige Anzahl von brechenden sphärischen Oberflächen. 1871. 3 *M* 60 *Pf*.

C. BRUHNS, Bestimmung der Längendifferenz zwischen Leipzig und Wien. 1872. 2 *M*.

W. G. HANKEL, Elektrische Untersuchungen. Neunte Abhandlung: Ueber die thermoelektrischen Eigenschaften des Schwerspathes. Mit 4 Tafeln. 1872. 2 *M*.

—— Elektrische Untersuchungen. Zehnte Abhandlung: Ueber die thermoelektrischen Eigenschaften des Aragonites. Mit 3 Tafeln. 1872. 2 *M*.

C. NEUMANN, Ueber die den Kräften elektrodynamischen Ursprungs zuzuschreibenden Elementargesetze. 1873. 3 *M* 80 *Pf*.

P. A. HANSEN, Von der Bestimmung der Theilungsfehler eines gradlinigen Maassstabes. 1874. 4 *M*.

—— Ueber die Darstellung der graden Aufsteigung und Abweichung des Mondes in Function der Länge in der Bahn und der Knotenlänge. 1874. 1 *M*.

—— Dioptrische Untersuchungen mit Berücksichtigung der Farbenzerstreuung und der Abweichung wegen Kugelgestalt. Zweite Abhandlung. 1874. 2 *M*.

ELFTER BAND. (XVIII. Bd.) Mit 8 Tafeln. hoch 4. 1878. brosch. Preis 21 *M*.

G. T. FECHNER, Ueber den Ausgangswerth der kleinsten Abweichungssumme, dessen Bestimmung, Verwendung und Verallgemeinerung. 1874. 2 *M*.

C. NEUMANN, Ueber das von Weber für die elektrischen Kräfte aufgestellte Gesetz. 1874. 3 *M*.

W. G. HANKEL, Elektrische Untersuchungen. Elfte Abhandlung: Ueber die thermoelektrischen Eigenschaften des Kalkspathes, des Berylles, des Idocrases und des Apophyllites. Mit 3 Tafeln. 1875. 2 *M*.

P. A. HANSEN, Ueber die Störungen der grossen Planeten, insbesondere des Jupiter. 1875. 6 *M*.

W. G. HANKEL, Elektrische Untersuchungen. Zwölfte Abhandlung: Ueber die thermoelektrischen Eigenschaften des Gypses, des Diopsids, des Orthoklases, des Albits und des Periklins. Mit 4 Tafeln. 1875. 2 *M*.

W. SCHEIBNER, Dioptrische Untersuchungen, insbesondere über das Hansen'sche Objectiv. 1876. 3 *M*.

C. NEUMANN, Das Webersche Gesetz bei Zugrundelegung der unitarischen Anschauungsweise. 1876. 1 *M*.

W. WEBER, Elektrodynamische Maassbestimmungen, insbesondere über die Energie der Wechselwirkung. Mit 1 Tafel. 1878. 2 *M*.

ZWÖLFTER BAND. (XIX. Bd.) hoch 4.

W. G. HANKEL, Elektrische Untersuchungen. Dreizehnte Abhandlung: Ueber die thermoelektrischen Eigenschaften des Apatits, Brucits, Coelestins, Prehnits, Natroliths, Skolezits, Datoliths und Axinits. Mit 3 Tafeln. 1878. 2 *M*.

W. SCHEIBNER, Zur Reduction elliptischer Integrale in reeller Form. 1879. 5 *M*.

W. G. HANKEL, Elektrische Untersuchungen. Vierzehnte Abhandlung: Ueber die photo- und thermoelektrischen Eigenschaften des Flussspathes. Mit 3 Tafeln. 1879. 2 *M*.

C. BRUHNS, Neue Bestimmung der Längendifferenz zwischen der Sternwarte in Leipzig und der neuen Sternwarte auf der Türkenschanze in Wien. 1880. 2 *M* 40 *Pf*.

C. NEUMANN, Ueber die peripolaren Coordinaten. 1880. 1 *M* 50 *Pf*.

Leipzig, August 1880. **S. Hirzel.**

SITZUNGSBERICHTE
DER
KÖNIGL. SÄCHSISCHEN GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN.
KLEINERE ABHANDLUNGEN.

BERICHTE über die Verhandlungen der Königlich Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig. Erster Band. Aus den Jahren 1846 und 1847. Mit Kupfern. gr. 8. 12 Hefte.

—— Zweiter Band. Aus dem Jahre 1848. Mit Kupfern. gr. 8. 6 Hefte.

Vom Jahre 1849 an sind die Berichte der beiden Classen getrennt erschienen.

—— Mathematisch-physische Classe. 1849 (3) 1850 (3) 1851 (2) 1852 (2) 1853 (3) 1854 (3) 1855 (2) 1856 (2) 1857 (3) 1858 (3) 1859 (4) 1860 (3) 1861 (2) 1862 (1) 1863 (2) 1864 (1) 1865 (1) 1866 (5) 1867 (4) 1868 (3) 1869 (4) 1870 (5) 1871 (7) 1872 (4 mit Beiheft) 1873 (7) 1874 (5) 1875 (4) 1876 (2) 1877 (2) 1878 (1) 1879 (1) 1880 (1).

—— Philologisch-historische Classe. 1849 (5) 1850 (4) 1851 (5) 1852 (4) 1853 (5) 1854 (6) 1855 (4) 1856 (4) 1857 (2) 1858 (2) 1859 (4) 1860 (4) 1861 (4) 1862 (1) 1863 (3) 1864 (3) 1865 (1) 1866 (4) 1867 (2) 1868 (3) 1869 (3) 1870 (3) 1871 (1) 1872 (1) 1873 (1) 1874 (2) 1875 (2) 1876 (1) 1877 (2) 1878 (3) 1879 (2).

Jedes Heft der Berichte ist einzeln zu dem Preise von 1 Mark zu haben.

SCHRIFTEN
DER FÜRSTLICH-JABLONOWSKI'SCHEN GESELLSCHAFT ZU LEIPZIG.

ABHANDLUNGEN bei Begründung der Königl. Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften am Tage der zweihundertjährigen Geburtsfeier Leibnizens herausgegeben von der Fürstl. Jablonowski'schen Gesellschaft. Mit dem Bildnisse von Leibniz in Medaillon und zahlreichen Holzschnitten und Kupfertafeln. 61 Bogen in hoch 4⁰. 1846. broch. Preis 15 ℳ.

PREISSCHRIFTEN gekrönt und herausgegeben von der Fürstlich Jablonowski'schen Gesellschaft.

1. H. GRASSMANN, Geometrische Analyse geknüpft an die von Leibniz erfundene geometrische Charakteristik. Mit einer erläuternden Abhandlung von *A. F. Möbius.* (Nr. I der mathematisch-physischen Section.) hoch 4⁰. 1847. 2 ℳ.
2. H. B. GEINITZ, Das Quadergebirge oder d. Kreideformation in Sachsen, mit Berücks. der glaukonitreichen Schichten. Mit 1 color. Tafel. (Nr. II d. math.-phys. Sect.) hoch 4⁰. 1850. 1 ℳ 60 ₰.
3. J. ZECH, Astronomische Untersuchungen über die Mondfinsternisse des Almagest. (Nr. III d. math.-phys. Sect.) hoch 4⁰. 1851. 1 ℳ.
4. J. ZECH, Astron. Untersuchungen üb. die wichtigeren Finsternisse, welche v. d. Schriftstellern des class. Alterthums erwähnt werden. (No. IV d. math.-phys. Sect.) hoch 4⁰. 1853. 2 ℳ.
5. H. B. GEINITZ, Darstellung der Flora des Hainichen-Ebersdorfer und des Flöhaer Kohlenbassins. (Nr. V d. math.-phys. Sect.) hoch 4⁰. Mit 14 Kupfertafeln in gr. Folio. 1854. 24 ℳ.
6. TH. HIRSCH, Danzigs Handels- und Gewerbsgeschichte unter der Herrschaft des deutschen Ordens. (Nr. I der historisch-nationalökonomischen Section.) hoch 4⁰. 1858. 8 ℳ.
7. H. WISKEMANN, Die antike Landwirthschaft und das von Thünensche Gesetz, aus den alten Schriftstellern dargelegt. (Nr. II d. hist.-nat. ök. Sect.) 1859. 2 ℳ 40 ₰.
8. K. WERNER, Urkundliche Geschichte der Iglauer Tuchmacher-Zunft. (Nr. III d. hist.-nat. ök. Sect.) 1861. 3 ℳ.
9. V. BÖHMERT, Beiträge zur Gesch. d. Zunftwesens. (Nr. IV d. hist.-nat. ök. Sect.) 1862. 4 ℳ.
10. H. WISKEMANN, Darstellung der in Deutschland zur Zeit der Reformation herrschenden nationalökonomischen Ansichten. (Nr. V d. hist.-nat. ök. Sect.) 1862. 4 ℳ.
11. E. L. ETIENNE LASPEYRES, Geschichte der volkswirthschaftl. Anschauungen der Niederländer und ihrer Litteratur zur Zeit der Republik. (Nr. VI d. hist.-nat. ök. Sect.) 1863. 8 ℳ.
12. J. FIKENSCHER, Untersuchung der metamorphischen Gesteine der Lunzenauer Schieferhalbinsel. (Nr. VI d. math.-phys. Sect.) 1867. 2 ℳ.
13. JOH. FALKE, Die Geschichte des Kurfürsten August von Sachsen in volkswirthschaftlicher Beziehung. (Nr. VII d. hist.-nat. ök. Sect.) 1868. 8 ℳ.
14. B. BÜCHSENSCHÜTZ, Die Hauptstätten des Gewerbfleisses im classischen Alterthume. (Nr. VIII d. hist.-nat. ök. Sect.) 1869. 2 ℳ 80 ₰.
15. DR. HUGO BLÜMNER, Die gewerbliche Thätigkeit der Völker des classischen Alterthums. (Nr. IX d. hist.-nat. ök. Sect.) 1869. 4 ℳ.
16. HERMANN ENGELHARDT, Flora der Braunkohlenformation im Königreich Sachsen. (Nr. VII d. math.-phys. Sect.) Mit 15 Tafeln. 1870. 12 ℳ.
17. H. ZEISSBERG, Die polnische Geschichtschreibung des Mittelalters. (Nr. X d. hist.-nat. ök. Sect.) 1873. 12 ℳ.
18. ALBERT WANGERIN, Reduction der Potentialgleichung für gewisse Rotationskörper auf eine gewöhnliche Differentialgleichung. (Nr. VIII d. math.-phys. Sect.) 1875. 1 ℳ 20 ₰.
19. A. LESKIEN, Die Declination im Slavisch-Litauischen und Germanischen. (Nr. XI d. hist.-nat. ök. Sect.) 1876. 5 ℳ.
20. DR. R. HASSENCAMP, Ueber den Zusammenhang des lettoslavischen und germanischen Sprachstammes. (Nr. XII d. hist.-nat. ök. Sect.) 1876. 3 ℳ.
21. DR. PÖHLMANN, Die Wirthschaftspolitik der Florentiner Renaissance und das Princip der Verkehrsfreiheit. (Nr. XIII d. hist.-nat. ök. Sect.) 1878. 4 ℳ 20 ₰.
22. DR. ALEXANDER BRÜCKNER, Die slavischen Ansiedelungen in der Altmark und im Magdeburgischen. (Nr. XIV d. hist.-nat. ök. Sect.) 1879. 4 ℳ 20 ₰.

Leipzig. S. Hirzel.

Druck von Breitkopf & Härtel in Leipzig.

C. NEUMANN,
MITGLIED DER KÖNIGL. SÄCHS. GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN.

DIE VERTHEILUNG DER ELEKTRICITÄT AUF EINER KUGELCALOTTE.

Des XII. Bandes der Abhandlungen der mathematisch-physischen Classe der Königl. Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften

Nº VI.

LEIPZIG
BEI S. HIRZEL.
1880.

ABHANDLUNGEN

DER

KÖNIGL. SÄCHS. GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN

ZU LEIPZIG.

MATHEMATISCH-PHYSISCHE CLASSE.

ERSTER BAND. (I. Bd.)*) Mit 3 Tafeln. hoch 4. 1852. brosch. Preis 13 M 60 Pf.

A. F. MÖBIUS, Ueber die Grundformen der Linien der dritten Ordnung. Mit 1 Tafel. 1849. 2 M 40 Pf.

P. A. HANSEN, Auflösung eines beliebigen Systems von linearischen Gleichungen. — Ueber die Entwickelung der Grösse $(1-2\alpha H+\alpha\alpha)^{-\frac{1}{2}}$ nach den Potenzen von α. 1849. 1 M 20 Pf.

A. SEEBECK, Ueber die Querschwingungen elastischer Stäbe. 1849. 1 M.

C. F. NAUMANN, Ueber die cyclocentrische Conchospirale und über das Windungsgesetz von Planorbis Corneus. 1849. 1 M.

W. WEBER, Elektrodynamische Maassbestimmungen (Widerstandsmessungen). 1851. 3 M.

F. REICH, Neue Versuche mit der Drehwaage. 1852. 2 M.

M. W. DROBISCH, Zusätze zum Florentiner Problem. Mit 1 Tafel. 1852. 1 M 60 Pf.

W. WEBER, Elektrodynamische Maassbestimmungen (Diamagnetismus). Mit 1 Tafel. 1852. 2 M.

ZWEITER BAND. (IV. Bd.) Mit 19 Tafeln. hoch 4. 1855. brosch. Preis 20 M.

M. W. DROBISCH, Ueber musikalische Tonbestimmung und Temperatur. 1852. 3 M.

W. HOFMEISTER, Beiträge zur Kenntniss der Gefässkryptogamen. Mit 18 Tafeln. 1852. 4 M.

P. A. HANSEN, Entwickelung des Products einer Potenz des Radius Vectors mit dem Sinus oder Cosinus eines Vielfachen der wahren Anomalie in Reihen, die nach den Sinussen oder Cosinussen der Vielfachen der wahren, excentrischen oder mittleren Anomalie fortschreiten. 1853. 3 M.

—— Entwickelung der negativen und ungraden Potenzen der Quadratwurzel der Function $r^2 + r'^2 - 2rr'(\cos U \cos U' + \sin U \sin U' \cos J)$. 1854. 3 M.

O. SCHLÖMILCH, Ueber die Bestimmung der Massen und der Trägheitsmomente symmetrischer Rotationskörper von ungleichförmiger Dichtigkeit. 1854. 80 Pf.

—— Ueber einige allgemeine Reihenentwickelungen und deren Anwendung auf die elliptischen Functionen. 1854. 1 M 60 Pf.

P. A. HANSEN, Die Theorie des Aequatoreals. 1855. 2 M 40 Pf.

C. F. NAUMANN, Ueber die Rationalität der Tangenten-Verhältnisse tautozonaler Krystallflächen. 1855. 1 M.

A. F. MÖBIUS, Die Theorie der Kreisverwandtschaft. 1855. 2 M.

DRITTER BAND. (V. Bd.) Mit 15 Tafeln. hoch 4. 1857. brosch. Preis 19 M 20 Pf.

M. W. DROBISCH, Nachträge zur Theorie der musik. Tonverhältnisse. 1855. 1 M 20 Pf.

P. A. HANSEN, Auseinandersetzung einer zweckmässigen Methode zur Berechnung der absoluten Störungen der kleinen Planeten. 1856. 5 M.

R. KOHLRAUSCH und W. WEBER, Elektrodynamische Maassbestimmungen, insbesondere Zurückführung der Stromintensitäts-Messungen auf mechanisches Maass. 1856. 1 M 60 Pf.

H. D'ARREST, Resultate aus Beobachtungen der Nebelflecken und Sternhaufen. Erste Reihe. 1856. 2 M 40 Pf.

W. G. HANKEL, Elektrische Untersuchungen. Erste Abhandlung: Ueber der Messung der atmosphärischen Elektricität nach absolutem Maasse. Mit 2 Tafeln. 1856. 6 M.

W. HOFMEISTER, Beiträge zur Kenntniss der Gefässkryptogamen. No. II. Mit 13 Tafeln. 1857. 4 M.

VIERTER BAND. (VI. Bd.) Mit 29 Tafeln. hoch 4. 1859. brosch. Preis 22 M 50 Pf.

P. A. HANSEN, Auseinandersetzung einer zweckmässigen Methode zur Berechnung der absoluten Störungen der kleinen Planeten. Zweite Abhandlung. 1857. 4 M.

W. G. HANKEL, Elektrische Untersuchungen. Zweite Abhandlung: Ueber die thermo-elektrischen Eigenschaften des Boracites. 1857. 2 M 40 Pf.

—— Elektrische Untersuchungen. Dritte Abhandlung: Ueber Elektricitätserregung zwischen Metallen und erhitzten Salzen. 1858. 1 M 60 Pf.

P. A. HANSEN, Theorie der Sonnenfinsternisse und verwandten Erscheinungen. Mit 2 Tafeln. 1858. 6 M.

G. T. FECHNER, Ueber ein wichtiges psychophysisches Grundgesetz und dessen Beziehung zur Schätzung der Sterngrössen. 1858. 2 M.

W. HOFMEISTER, Neue Beiträge zur Kenntniss der Embryobildung der Phanerogamen. I. Dikotyledonen mit ursprünglich einzelligem, nur durch Zellentheilung wachsendem Endosperm. Mit 27 Tafeln. 1859. 8 M.

FÜNFTER BAND. (VII. Bd.) Mit 30 Tafeln. hoch 4. 1861. brosch. Preis 24 M.

W. G. HANKEL, Elektrische Untersuchungen. Vierte Abhandlung: Ueber das Verhalten der Weingeistflamme in elektrischer Beziehung. 1859. 2 M.

P. A. HANSEN, Auseinandersetzung einer zweckmässigen Methode zur Berechnung der absoluten Störungen der kleinen Planeten. Dritte Abhandlung. 1859. 7 M 20 Pf.

G. T. FECHNER, Ueber einige Verhältnisse des binocularen Sehens. 1860. 5 M 60 Pf.

G. METTENIUS, Zwei Abhandlungen: I. Beiträge zur Anatomie der Cycadeen. Mit 5 Tafeln. II. Ueber Seitenknospen bei Farnen. 1860. 3 M.

W. HOFMEISTER, Neue Beiträge zur Kenntniss der Embryobildung der Phanerogamen. II. Monokotyledonen. Mit 25 Tafeln. 1861. 8 M.

---

*) Die eingeklammerten römischen Ziffern geben die Zahl des Bandes in der Reihenfolge der Abhandlungen beider Classen an.

DIE

VERTHEILUNG DER ELEKTRICITÄT

AUF EINER KUGELCALOTTE

VON

C. NEUMANN,

MITGLIED DER KÖNIGL. SÄCHS. GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN.

Des XII. Bandes der Abhandlungen der mathematisch-physischen Classe der Königl. Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften

Nº VI.

LEIPZIG

BEI S. HIRZEL.

1880.

Vom Verfasser übergeben den 23. April 1880.
Der Abdruck vollendet den 3. September 1880.

DIE

VERTHEILUNG DER ELEKTRICITÄT

AUF EINER KUGELCALOTTE

VON

C. NEUMANN,

MITGLIED DER KÖNIGL. SÄCHS. GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN.

Die elektrische Vertheilung auf einer Kugelcalotte ist sowohl für den Fall, dass die Calotte sich selber überlassen ist, als auch für den allgemeinern Fall, dass gegebene äussere Kräfte auf dieselbe einwirken, von *W. Thomson* *) und später von *Lipschitz* **) behandelt worden. Ich werde im Folgenden im Wesentlichen den von *Lipschitz* eingeschlagenen Weg von Neuem verfolgen, nur mit dem Unterschiede, dass ich, an Stelle der von *Lipschitz* angewandten *elliptischen Coordinaten*, diejenigen Coordinaten benutzen werde, welche in meiner Abhandlung über die elektrische Vertheilung auf einer Ringfläche ***) von mir benutzt worden sind. Diese letztern Coordinaten sind dieselben, welche ich im vorhergehenden Aufsatz einer genauern Betrachtung unterworfen, und daselbst als *peripolare Coordinaten* bezeichnet habe. — Zunächst jedoch mögen (in den beiden ersten §§) einige allgemeine Bemerkungen vorangeschickt werden.

§ 1.

Die Methode der reciproken Radien, als Hülfsmittel zur Auffindung der Green'schen Function und der Green'schen Belegung.

Es bezeichne (o, H) eine Kugelfläche vom Mittelpunkt o und Halbmesser H. Ferner seien s, σ zwei *beliebige Flächen*, die in Bezug auf (o, H) einander conjugirt sind, und ds, $d\sigma$ zwei conjugirte Elemente derselben. Denkt man sich nun auf jeder der beiden Flächen eine Massenbelegung ausgebreitet, und nimmt man

---

*) *W. Thomson: Papers on Electrostatics and Magnetism*, London. 1872. pag. 178—191.

**) *Lipschitz* in zwei Abhandlungen im Crelle'schen Journal, Bd. 58, Seite 152 und Bd. 61. Seite 1.

***) *C. Neumann: Theorie der Elektricitäts- und Wärme-Vertheilung in einem Ringe*. Halle, Verlag der Buchhandlung des Waisenhauses. 1864.

an, dass die Dichtigkeiten D, Δ dieser Belegungen der Relation entsprechen:

(1.) $$K\frac{D\,ds}{\sqrt{(os)}} = \mathrm{K}\frac{\Delta\,d\sigma}{\sqrt{(o\sigma)}},$$

wo K, K beliebig gegebene Constanten, und (os), $(o\sigma)$ die Entfernungen der Elemente ds, $d\sigma$ von o vorstellen, — so werden die von jenen Massenbelegungen auf zwei einander conjugirte Punkte x und ξ ausgeübten Potentiale F_x und Φ_ξ in der Beziehung stehen:

(2.) $$K\sqrt{(ox)}\,F_x = \mathrm{K}\sqrt{(o\xi)}\,\Phi_\xi. \quad *)$$

Da $ds : d\sigma = (os)^2 : (o\sigma)^2$ ist [vgl. (V.) Seite 366], und da ferner $\sqrt{(os)}\,\sqrt{(o\sigma)} = H$, und $\sqrt{(ox)}\,\sqrt{(o\xi)}$ ebenfalls $= H$ ist, so können die Formeln (1.), (2.) auch so geschrieben werden:

(1. a) $$K\,(os)^{\frac{3}{2}}\,D = \mathrm{K}\,(o\sigma)^{\frac{3}{2}}\,\Delta,$$

(2. a) $$K\sqrt{(ox)}\,F_x = \mathrm{K}\sqrt{(o\xi)}\,\Phi_\xi,$$

oder auch so:

(1. b) $$KH^3D = \mathrm{K}\,(o\sigma)^3\,\Delta,$$

(2. b) $$KHF_x = \mathrm{K}\,(o\xi)\,\Phi_\xi.$$

Und der Satz selber kann daher, falls man $K = 1$ und $\mathrm{K} = H$ macht, folgendermassen ausgesprochen werden:

Entsprechen die Dichtigkeiten D, Δ der beiden Belegungen in je zwei einander correspondirenden Elementen ds, $d\sigma$ der Relation:

(3.) $$H^2D = (o\sigma)^3\,\Delta,$$

so werden die von diesen Belegungen auf correspondirende Punkte x nnd ξ ausgeübten Potentiale F_x und Φ_ξ in der Beziehung stehen:

(4.) $$F_x = (o\xi)\,\Phi_\xi.$$

Aus dieser Formel (4.) folgt, falls man für x und ξ zwei einander conjugirte *Flächenpunkte* s und σ **) nimmt, sofort: $F_s = (o\sigma)\,\Phi_\sigma$, d. i.

(5.) $$\Phi_\sigma = \frac{F_s}{(o\sigma)}.$$

---

*) Dieser Satz ergiebt sich unmittelbar aus meinem Werke *über das Logarithmische und Newton'sche Potential* (Teubner. 1877), nämlich aus dem daselbst Seite 361 aufgestelltem Fundamentalsatz, unter Berücksichtigung der daselbst auf Seite 360 gegebenen Note.

**) D. h. zwei Punkte s und σ, die gelegen sind auf den *gegebenen Flächen* s und σ.

Denkt man sich also die Belegung D der Fläche s so eingerichtet, dass ihr Potential F für alle auf dieser Fläche liegende Punkte s den Werth *Eins* hat, so wird [wie aus (5.) ersichtlich] Φ die *Green'sche Function* der Fläche σ für den Centralpunkt o vorstellen.

Bezeichnet man daher die Green'sche Function und die Green'sche Belegung nicht mit Φ und Δ, sondern mit G und η, so ergiebt sich folgende

Regel. — *Soll für eine gegebene Fläche σ und einen gegebenen Centralpunkt o sowohl die Green'sche Function G^o, als auch die Dichtigkeit η^o der Green'schen Belegung gefunden werden, so beschreibe man um o mit beliebigem Radius H eine Kugelfläche (o, H), und construire die in Bezug auf (o, H) zur Fläche σ conjugirte Fläche s.*

Denkt man sich nun auf dieser neuen Fläche s eine Massenbelegung ausgebreitet, deren Dichtigkeit mit D_s, und deren Potential auf beliebige Raumpunkte x mit F_x bezeichnet sein mag, und gelingt es, durch irgend welche Mittel diese Belegung in solcher Weise einzurichten, dass F_x für alle auf der Fläche gelegenen Punkte x gleich Eins wird; — so bestimmen sich die vorhin genannten Functionen G^o und η^o mittelst der [aus (4.) und (3.) entspringenden] *Formeln:*

$$G^o_\xi = \frac{1}{(o\,\xi)} F_x, \tag{6.}$$

$$\eta^o_\sigma = \frac{H^2}{(o\,\sigma)^3} D_s. \tag{7.}$$

Hier bezeichnet ξ den in Bezug auf (o, H) zu x conjugirten Punkt. Desgleichen sind σ und s conjugirte Punkte der gleichnamigen Flächen.

§ 2.

Die Methode der reciproken Radien in ihrer Anwendung auf Doppelbelegungen.

Ist eine Kugelfläche mit irgend welcher (gleichförmigen oder ungleichförmigen) *Massenbelegung versehen, und sind x und ξ zwei in Bezug auf diese Fläche zu einander conjugirte Punkte, so werden die von jener Belegung auf x und ξ ausgeübten Potentiale F_x und F_ξ der Relation entsprechen:*

$$\sqrt{(o\,x)}\, F_x = \sqrt{(o\,\xi)}\, F_\xi. \tag{1.}$$

Dabei ist es gleichgültig, ob die ganze Kugelfläche oder nur ein Theil derselben mit Masse belegt ist.

So lautet ein schon früher*) von mir ausgesprochener Satz. Und aus der damals gegebenen Ableitung *scheint* hervorzugehen, dass derselbe gültig ist nicht nur für *einfache*, sondern auch für *Doppel*-Belegungen.

Eine genauere Ueberlegung lässt indessen das Irrthümliche einer solchen Vermuthung erkennen**). In der That werde ich im Folgenden zeigen, dass der Satz für den Fall einer *Doppel*-Belegung durch einen ganz *anderen* Satz zu ersetzen ist. Dabei wird es angemessen sein, mit etwas allgemeineren Betrachtungen zu beginnen.

Unter Zugrundelegung einer gegebenen Kugelfläche (o, H) seien s, σ zwei conjugirte Flächen von beliebiger Beschaffenheit, ferner ds, $d\sigma$ zwei conjugirte Elemente derselben, endlich x, ξ zwei conjugirte Punkte. Alsdann ist [nach (IV.) Seite 365]:

$$(2.)\qquad \frac{\sqrt{(os)\,(ox)}}{(sx)} = \frac{\sqrt{(o\sigma)\,(o\xi)}}{(\sigma\xi)},$$

wo s und σ die *Orte* der beiden Elemente ds und $d\sigma$ vorstellen sollen. Setzt man zur Abkürzung $(sx)^{-1} = T$ und $(\sigma\xi)^{-1} = \mathsf{T}$, so kann die Formel auch so geschrieben werden:

$$(3.)\qquad T\sqrt{(os)\,(ox)} = \mathsf{T}\sqrt{(o\sigma)\,(o\xi)}\,.$$

Errichtet man nun auf den gegebenen Flächen in den correspondirenden Punkten s, σ und auf correspondirenden Seiten die Normalen N, N, und bezeichnet man die ersten Elemente derselben mit $(ss') = dN$ und $(\sigma\sigma') = d\mathsf{N}$, und zwar in solcher Weise, dass die Punkte s' und σ' wiederum zu einander conjugirt sind, — so wird offenbar die Formel (2.), (3.) nicht nur gültig sein für s, σ, sondern ebenso auch für s', σ'. Bezeichnet man also die linke und rechte Seite jener Formel resp. mit $f(s)$ und $\varphi(\sigma)$, so ergeben sich die Gleichungen:

---

*) In meinem Werke *über das Logarithmische und Newton'sche Potential* (Teubner 1877), daselbst Seite 362.

**) Man erkennt das Irrthümliche dieser Vermuthung sofort, wenn man auf der Kugelfläche eine Doppelbelegung von überall *constantem* Moment sich vorstellt. Denn alsdann ist, falls man unter x die äussern, unter ξ die innern Punkte versteht, F_x gleich *Null*, hingegen F_ξ gleich einer bestimmten von Null verschiedenen Constanten (l. c. Seite 134); sodass also von der Gültigkeit des Satzes (1.) im Falle von Doppelbelegungen nicht weiter die Rede sein kann.



$$f(s) = \varphi(\sigma),$$
$$f(s') = \varphi(\sigma');$$

woraus sofort folgt:

$$\frac{f(s') - f(s)}{dN}\, dN = \frac{\varphi(\sigma') - \varphi(\sigma)}{d\mathsf{N}}\, d\mathsf{N},$$

oder, weil [nach (V.) Seite 366] $dN : d\mathsf{N} = (os) : (o\sigma)$ ist:

$$\frac{f(s') - f(s)}{dN}\,(os) = \frac{\varphi(\sigma') - \varphi(\sigma)}{d\mathsf{N}}\,(o\sigma),$$

oder, was dasselbe:

$$(os)\,\frac{df(s)}{dN} = (o\sigma)\,\frac{d\varphi(\sigma)}{d\mathsf{N}}.$$

Andererseits ist, was die conjugirten *Flächenelemente* ds, $d\sigma$ betrifft, [wiederum nach (V.) Seite 366]:

$$\frac{ds}{(os)^2} = \frac{d\sigma}{(o\sigma)^2}.$$

Multiplicirt man diese Formel mit der vorhergehenden, so folgt:

$$\frac{df(s)}{dN}\,\frac{ds}{(os)} = \frac{d\varphi(\sigma)}{d\mathsf{N}}\,\frac{d\sigma}{(o\sigma)}.$$

Und substituirt man hier endlich für $f(s)$ und $\varphi(\sigma)$ ihre eigentlichen Bedeutungen, und führt die Differentiationen nach N und N wirklich aus, so ergiebt sich:

$$(4.)\qquad \sqrt{(ox)}\left(\sqrt{(os)}\,\frac{dT}{dN} + \frac{1}{2\sqrt{(os)}}\,\frac{d(os)}{dN}\,T\right)\frac{ds}{(os)} = \text{etc.},$$

oder, was dasselbe:

$$(5.)\qquad \sqrt{(ox)}\left(\frac{1}{\sqrt{(os)}}\,\frac{dT}{dN}\,ds + \frac{1}{2\,(os)^{\frac{3}{2}}}\,\frac{d(os)}{dN}\,T\,ds\right) = \text{etc.},$$

wo die *rechten* Seiten hinzuschreiben überflüssig sein würde, weil sie aus den *linken* unmittelbar hervorgehen durch Vertauschung der lateinischen Buchstaben mit den entsprechenden griechischen.

Denken wir uns nun auf der Fläche s eine beliebige Function $\mathfrak{F}$ ausgebreitet, und dieselbe Function auch auf der Fläche σ ausgebreitet, und zwar der Art, dass auf correspondirende Punkte stets *einerlei* Werth fällt, was angedeutet sein mag durch die Formel:

$$(6.)\qquad \mathfrak{F} = \mathfrak{F}_s = \mathfrak{F}_\sigma,$$

so ergiebt sich, falls man die Gleichung (5.) mit $\mathfrak{F}$ multiplicirt, und sodann über die gegebenen Flächen integrirt:

$$(7.)\qquad \sqrt{(ox)}\left(\int\frac{\mathfrak{F}}{\sqrt{(os)}}\,\frac{dT}{dN}\,ds + \tfrac{1}{2}\int\frac{\mathfrak{F}}{(os)^{\frac{3}{2}}}\,\frac{d(os)}{dN}\,T\,ds\right) = \text{etc.}$$



Die hier (links und rechts) auftretenden *vier* Integrale sind Potentiale, welche theils von Doppelbelegungen, theils von einfachen Belegungen herrühren, und theils auf x, theils auf ξ ausgeübt werden. Demgemäss mögen dieselben in folgender Weise bezeichnet werden:

$$(8.)\qquad V_x = \int \frac{\mathfrak{F}}{(os)^{\frac{1}{2}}} \frac{d(os)}{dN} T\,ds, \qquad V'_\xi = \int \frac{\mathfrak{F}}{(o\sigma)^{\frac{1}{2}}} \frac{d(o\sigma)}{d\mathsf{N}} \mathsf{T}\,d\sigma,$$

$$(9.)\qquad W_x = \int \frac{\mathfrak{F}}{\sqrt{(os)}} \frac{dT}{dN} ds, \qquad W'_\xi = \int \frac{\mathfrak{F}}{\sqrt{(o\sigma)}} \frac{d\mathsf{T}}{d\mathsf{N}} d\sigma.$$

Alsdann lautet die Formel (7.) folgendermassen:

$$(\mathfrak{A}.)\qquad \sqrt{(ox)}\,(W_x + \tfrac{1}{2} V_x) = \sqrt{(o\xi)}\,(W'_\xi + \tfrac{1}{2} V'_\xi).$$

Leicht übersieht man nun, dass zwischen diesen Potentialen noch eine zweite Relation stattfindet. Offenbar ist nämlich

$$\frac{d(os)}{dN} = \cos(N, os) = \cos(N, sq),$$

$$\frac{d(o\sigma)}{d\mathsf{N}} = \cos(\mathsf{N}, o\sigma) = -\cos(\mathsf{N}, \sigma o),$$

wo in der ersten Formel q den unendlich fernen Punkt des von o ausgehenden Strahles (os) vorstellen soll. Nun sind aber die von s ausgehenden Richtungen N und sq conjugirt zu den von σ aus-

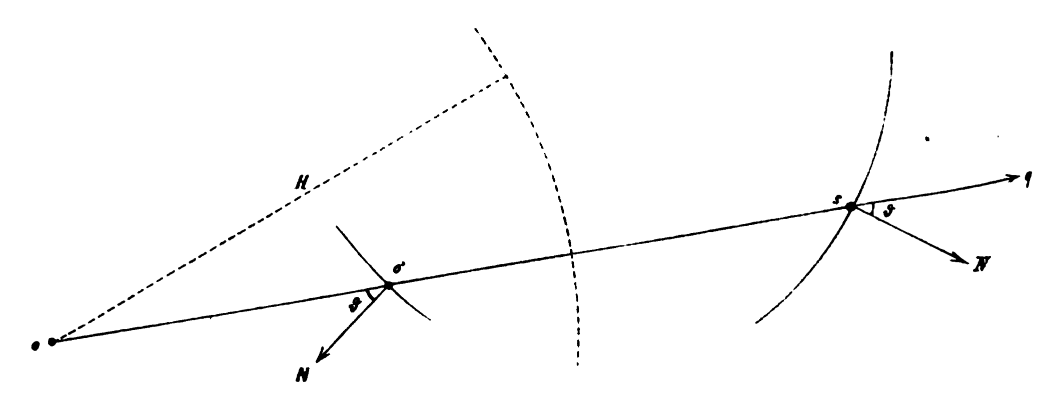


Fig. 7.

gehenden Richtungen N und σo. Folglich ist nach dem Satze der Aehnlichkeit (Seite 365):

$$\text{Winkel } (N, sq) = \text{Winkel } (\mathsf{N}, \sigma o).$$

Bezeichnet man den gemeinschaftlichen Werth dieser Winkel mit ϑ, so ergiebt sich also:

(10.) $$\frac{d(os)}{dN} = \cos\vartheta, \qquad \frac{d(o\sigma)}{dN} = -\cos\vartheta,$$

mithin:

(11.) $$V_x = \int \frac{\mathfrak{F}\cos\vartheta}{(os)^{\frac{1}{2}}}\,T\,ds, \qquad V'_\xi = -\int \frac{\mathfrak{F}\cos\vartheta}{(o\sigma)^{\frac{1}{2}}}\,\mathrm{T}\,d\sigma.$$

Demgemäss sind V_x und V'_ξ Potentiale gewisser einfacher Belegungen, deren Dichtigkeiten D_s und Δ_σ der Relation entsprechen:

$$(os)^{\frac{1}{2}}\,D_s = -(o\sigma)^{\frac{1}{2}}\,\Delta_\sigma.$$

Und hieraus folgt [mit Hinblick auf Seite 402*)], dass zwischen diesen Potentialen die Beziehung obwaltet:

(𝔅.) $$\sqrt{(ox)}\;V_x = -\sqrt{(o\xi)}\;V'_\xi.$$

Dies ist die gesuchte zweite Relation.

Eliminirt man aus den beiden Relationen (𝔄.), (𝔅.) einmal V_x, das andere Mal V'_ξ, so folgt:

(ℭ.) $$\sqrt{(ox)}\;W_x = \sqrt{(o\xi)}\;(W'_\xi + V'_\xi),$$

(𝔇.) $$\sqrt{(o\xi)}\;W'_\xi = \sqrt{(ox)}\;(W_x + V_x).$$

Diese Betrachtungen vorangeschickt, stellen wir uns nun folgende

Allgemeine Aufgabe: *Die Fläche s sei versehen mit einer willkürlich gegebenen Massenbelegung L, die ganz nach Belieben einfach oder doppelt, oder gemischt**) sein kann. Es soll der correspondirenden Fläche σ eine Massenbelegung Λ von solcher Art zuertheilt werden, dass die von L und Λ auf correspondirende Punkte x und ξ ausgeübten Potentiale F_x und Φ_ξ der Relation entsprechen:*

(12.) $$\sqrt{(ox)}\;F_x = \sqrt{(o\xi)}\;\Phi_\xi.$$

Diese Aufgabe kann man leicht lösen mit Hülfe der Relationen (𝔄.), (𝔅.), (ℭ.), (𝔇.), wobei die in (8.), (9.), (10.), (11.) angegebene Bedeutung der Potentiale V, W und V', W' im Auge zu behalten ist. Um genauer hierauf einzugehen, unterscheiden wir drei Fälle.

(I.) .... Die Belegung L sei eine *einfache*. Alsdann wird die gesuchte Belegung Λ ebenfalls *einfach* sein. Die nähere Be-

---

*) Es kommen dabei namentlich die dortigen Formeln (1.a), (2.a) in Betracht; und zwar hat man in diesen $K = 1$ und $\mathrm{K} = -1$ zu machen.

**) Unter einer *gemischten* Belegung soll eine solche verstanden werden, welche sich ergiebt durch Superposition einer *einfachen* und einer *Doppel*-Belegung.

stimmung von Λ ist zu bewerkstelligen mittelst der Relation ($\mathfrak{B}$.), welche durch Substitution der Werthe (11.) übergeht in:

$$\sqrt{(o x)} \int \frac{\mathfrak{F} \cos \vartheta}{(o s)^{\frac{3}{2}}} T ds = \sqrt{(o \xi)} \int \frac{\mathfrak{F} \cos \vartheta}{(o \sigma)^{\frac{3}{2}}} \mathrm{T} d\sigma.$$

Und hieraus folgt sofort, dass die beiden Belegungen L und Λ die vorgeschriebene Relation (12.) erfüllen werden, sobald man ihren Dichtigkeiten D und Δ die Werthe zuertheilt:

$$D = \frac{\mathfrak{F} \cos \vartheta}{(o s)^{\frac{3}{2}}},$$

$$\Delta = \frac{\mathfrak{F} \cos \vartheta}{(o \sigma)^{\frac{3}{2}}},$$

wo $\mathfrak{F}$ eine beliebige Function sein kann. Mit andern Worten: Der gestellten Anforderung wird entsprochen werden, sobald man die Dichtigkeiten D und Δ der Belegungen L und Λ der Relation unterwirft:

(I. a) $$(o s)^{\frac{3}{2}} D = (o \sigma)^{\frac{3}{2}} \Delta.$$

Etwas kürzer hätte man zu diesem Resultat gelangen können durch Anwendung eines früher (Seite 402) besprochenen Satzes.

(II.) . . . Die Belegung L sei eine *doppelte*, und ihr Moment, gerechnet in der Richtung der Normale N, sei $= M$. Alsdann wird die gesuchte Belegung Λ, wie aus ($\mathfrak{C}$.) folgt, im Allgemeinen eine *gemischte* sein, also zusammengesetzt sein aus einer *einfachen* Belegung, deren Dichtigkeit Δ heissen mag, und aus einer Doppelbelegung, deren Moment, gerechnet in der Richtung der Normale N, mit M bezeichnet werden mag. — Denkt man sich M gegeben in der Gestalt

$$M = \frac{\mathfrak{F}}{\sqrt{(o s)}},$$

wo $\mathfrak{F}$ eine beliebige Function vorstellt, so kann man die Werthe der zu bestimmenden Grössen M, Δ unmittelbar entnehmen aus den Formeln ($\mathfrak{C}$.), (8.), (9.). Man erhält:

$$\mathrm{M} = \frac{\mathfrak{F}}{\sqrt{(o \sigma)}},$$

$$\Delta = \frac{\mathfrak{F}}{(o \sigma)^{\frac{3}{2}}} \frac{d (o \sigma)}{d \mathrm{N}}.$$

Es bestimmen sich also, falls man $\mathfrak{F}$ eliminirt, die Grössen M, Δ aus M mittelst der Formeln:

(II. a) $$M\sqrt{(os)} = \mathsf{M}\sqrt{(o\sigma)}, \qquad \Delta = \frac{\mathsf{M}}{(o\sigma)}\frac{d(o\sigma)}{d\mathsf{N}}.$$

Dabei sei erinnert, dass die Richtungen N und N, in welchen die Momente M und M gerechnet sind, conjugirte Richtungen sind.

(III.) . . . Die Belegung L ist eine *gemischte*. Alsdann wird die gesuchte Belegung Λ im Allgemeinen ebenfalls eine *gemischte* sein. Und wie man dieselbe zu finden vermag, bedarf nach Absolvirung der Fälle (I.) und (II.) keiner weiteren Erläuterung.

Specieller Fall. — Wir wollen die Flächen s und σ mit einander zusammenfallen lassen, also identisch werden lassen mit der gegebenen Kugelfläche (o, H), resp. mit einem *Theil* derselben. Alsdann wird $(os) = (o\sigma) = H$, und $\vartheta = 0$*) (vgl. die Figur Seite 406); sodass also die Formeln (11.) und (9.), falls man zur Abkürzung

(13.) $$\frac{\mathfrak{F}}{H^{\frac{1}{2}}} = f$$

setzt, folgende Gestalt annehmen:

(14.) $$V_x = \int f\,T\,ds, \qquad V'_\xi = -\int f\,\mathsf{T}\,d\sigma,$$

(15.) $$W_x = H\int f\frac{dT}{dN}\,ds, \qquad W'_\xi = H\int f\frac{d\mathsf{T}}{d\mathsf{N}}\,d\sigma.$$

Auch bemerkt man, dass im gegenwärtigen Specialfall $ds = d\sigma$ ist, und die Richtungen N und N *einander entgegengesetzt* sind. Hingegen bleiben T und T wesentlich von einander verschieden; denn T repräsentirt die reciproke Entfernung irgend eines Punktes x vom Elemente $ds = d\sigma$, während T die reciproke Entfernung des *conjugirten* Punktes ξ von jenem Element bezeichnet. Somit folgt aus (14.), (15.), dass die Functionen V_x, W_x in Bezug auf den Punkt x genau ebenso gebildet sind, wie die Functionen V'_ξ, W'_ξ in Bezug auf ξ, — abgesehen von den entgegengesetzten Vorzeichen. In der That ist:

(16.) $$V'_\xi = -V_\xi,$$

(17.) $$W'_\xi = -W_\xi.$$

---

*) ϑ geht über in 0, und gleichzeitig verwandelt sich N in die *äussere*, und N in die *innere* Normale der Kugelfläche (o, H).

Eliminirt man V', W' mittelst dieser Formeln (16.), (17.), so gewinnen die Relationen ($\mathfrak{A}$.), ($\mathfrak{B}$.), ($\mathfrak{C}$.), ($\mathfrak{D}$.) die Gestalt:

$$(\mathfrak{A}.)\qquad \sqrt{(o\,x)}\;(W_x + \tfrac{1}{2}V_x) = -\sqrt{(o\,\xi)}\;(W_\xi + \tfrac{1}{2}V_\xi),$$

$$(\mathfrak{B}.)\qquad \sqrt{(o\,x)}\;V_x = +\sqrt{(o\,\xi)}\;V_\xi,$$

$$(\mathfrak{C}.)\qquad \sqrt{(o\,x)}\;W_x + \sqrt{(o\,\xi)}\;W_\xi = -\sqrt{(o\,\xi)}\;V_\xi,$$

$$(\mathfrak{D}.)\qquad \sqrt{(o\,x)}\;W_x + \sqrt{(o\,\xi)}\;W_\xi = -\sqrt{(o\,x)}\;V_x.$$

Diese Relationen ($\mathfrak{A}$.), ($\mathfrak{B}$.), ($\mathfrak{C}$.), ($\mathfrak{D}$.), von denen zwei eine unmittelbare Folge der beiden andern sind, *finden also statt für je zwei Punkte x und ξ, die in Bezug auf eine gegebene Kugelfläche* (o, H) *zu einander conjugirt sind. Dabei bezeichnen V_x, V_ξ und W_x, W_ξ gewisse auf jene Punkte ausgeübte Potentiale. Und zwar rühren V_x, V_ξ her von einer auf der Kugelfläche ausgebreiteten einfachen Belegung, deren Dichtigkeit f in ganz beliebiger Weise gegeben ist* [vgl. (14.)]; *während W_x, W_ξ von einer auf der Kugelfläche ausgebreiteten Doppelbelegung herrühren, deren Moment, gerechnet in der Richtung der äussern Normale, $= Hf$ ist* [vgl. (15.)].

Mit Hülfe der Formeln ($\mathfrak{A}$.), ($\mathfrak{B}$.), ($\mathfrak{C}$.), ($\mathfrak{D}$.) wird man die allgemeine Aufgabe (Seite 407) *für den gegenwärtigen Specialfall* mit Leichtigkeit zu lösen im Stande sein. Wir begnügen uns damit, folgenden Satz [der unmittelbar aus (III.) Seite 409 sich ergiebt] hier aufzuführen.

Bezeichnet s eine gegebene Kugelfläche, repräsentiren ferner x und ξ zwei variable Puncte, die in Bezug auf die Fläche s einander conjugirt sind, und denkt man sich endlich die Fläche s behaftet mit einer willkürlich gegebenen gemischten Belegung L, so wird man stets eine gewisse andere gemischte Belegung Λ der Fläche s anzugeben im Stande sein, von solcher Beschaffenheit, dass die von L und Λ resp. auf x und ξ ausgeübten Potentiale F_x und Φ_ξ der Relation entsprechen:

$$(18.)\qquad \sqrt{(o\,x)}\;F_x = \sqrt{(o\,\xi)}\;\Phi_\xi;$$

wo o den Mittelpunkt der Fläche s bezeichnet.

Beschränkt sich die gegebene Belegung L auf einen Theil der Kugelfläche s (z. B. auf eine Calotte derselben), *so wird sich die zugehörige Belegung Λ beschränken auf eben denselben Theil.* — Von diesem Satz wird späterhin Gebrauch gemacht werden.

Beiläufige Bemerkung. — Lässt man, was die Relationen ($\mathfrak{A}$.), ($\mathfrak{B}$.), ($\mathfrak{C}$.), ($\mathfrak{D}$.) betrifft, die Punkte x und ξ miteinander zusammenfallen, also identisch werden mit irgend einem *auf* der Kugelfläche (o, H) gelegenen Punkte s, so folgt aus ($\mathfrak{D}$.): $W_s + W_s = -V_s$, oder, genauer ausgedrückt:

(19.) $$W_{is} + W_{as} = -V_s,$$

wo W_{is} und W_{as} diejenigen *Grenzwerthe* vorstellen, gegen welche das auf einen variablen Punkt bezogene W convergirt, sobald man diesen Punkt von Innen, resp. von Aussen her dem Punkt s unendlich nahe rücken lässt.

Zwischen denselben Grenzwerthen findet aber nach einem allgemeinen Satz*) auch folgende Relation statt:

$$W_{is} - W_{as} = 4\pi\mu_s,$$

wo μ das Moment der dem Potential W zu Grunde liegenden Doppelbelegung vorstellt, dieses Moment gerechnet in der Richtung der *innern* Normale. Nun haben wir das Moment jener Doppelbelegung, gerechnet nach der Richtung der äussern Normale, mit Hf bezeichnet, [vgl. (15.)]. Folglich ist $\mu = -Hf$, mithin:

(20.) $$W_{is} - W_{as} = -4\pi Hf_s.$$

Aus (19.), (20.) erhält man:

(21.) $$2W_{is} = -V_s - 4\pi Hf_s,$$

(22.) $$2W_{as} = -V_s + 4\pi Hf_s;$$

und diese Formeln lassen sich leicht controliren durch Anwendung auf den speciellen Fall $f = 1$. Denn in diesem Falle wird:

$$V_s = 4\pi H,$$

und ferner**):

$$W_i = -4\pi H, \text{ mithin auch: } W_{is} = -4\pi H,$$

$$W_a = 0, \qquad \text{mithin auch: } W_{as} = 0;$$

und durch diese Werthe wird in der That den Relationen (21.), (22.) Genüge geleistet.

---

*) Vgl. mein Werk *über das Logarithmische und Newton'sche Potential* (Teubner 1877), daselbst Seite 140, Formel (48. ϑ).

**) l. c. Seite 134; wobei zu beobachten ist, dass im gegenwärtigen Fall das Moment $\mu = -Hf$ ist.

§ 3.

Die Vertheilung der Elektricität auf einer Kreisfläche (d. i. auf einer unendlich dünnen Kreisscheibe), falls keine äussern Kräfte einwirken.

Man kann bekanntlich die *unendlich dünne Kreisscheibe* als Grenzfall eines abgeplatteten Rotationsellipsoides ansehen, und auf diese Weise z. B. *diejenige Vertheilung* ermitteln, welche eine der isolirten Kreisscheibe mitgetheilte Elektricitätsmenge M in *dem* Falle annehmen wird, dass *keine* äussern Kräfte einwirken. Und gleichzeitig kann man auf diesem Wege auch das *Potential* F finden, welches jene Elektricitätsmenge M während der genannten Vertheilung auf einen variablen Raumpunkt ausübt. — Diese bekannten Betrachtungen, auf welche ich mich hier nicht näher einlassen will, führen zu folgenden Sätzen.

Erster Satz. *Denkt man sich einen Punkt α beweglich längs der geometrischen Axe der Kreisscheibe, so wird das auf diesen Punkt α ausgeübte Potential F_α proportional sein mit demjenigen Winkel, unter welchem der Radius der Kreisscheibe, von α aus gesehen, erscheint**). *Bezeichnet man also jenen Radius mit $(o\delta)$, und den eben genannten Winkel $(o\alpha\delta)$ mit ϑ, so ist:*

$$F_\alpha = C\vartheta, \tag{1.}$$

wo C eine Constante vorstellt.

Lässt man α längs der Axe der Kreisscheibe ins Unendliche rücken, so muss $F_\alpha = \frac{M}{R}$, d. i. $= \frac{M}{(o\alpha)}$ werden, wo M die auf der Kreisfläche vorhandene Elektricitätsmenge, und $R = (o\alpha)$ die unendlich grosse Entfernung des Punktes p von o vorstellt**). Für diesen Fall des unendlich fernen Punktes p geht aber ϑ über in $\frac{(o\delta)}{(o\alpha)}$, wodurch unsere allgemeine Formel (1.) die Gestalt gewinnt $F_\alpha = \frac{C(o\delta)}{(o\alpha)}$. Vergleicht man diesen Werth mit dem vorhin gefundenen, so folgt sofort: $M = C(o\delta)$, d. i.

$$C = \frac{M}{(o\delta)} = \frac{M}{B}, \tag{1.a}$$

---

*) Dieser Definition zufolge bleibt der Winkel ϑ stets zwischen den Grenzen 0 und $\frac{1}{2}\pi$.

**) Vgl. die Seite 414.

wo B = $(o\delta)$ der *Radius* der Scheibe ist. Nachdem in dieser Weise die Constante C gefunden ist, kann man leicht auch den speciellen Werth finden, welchen F im Punkte o (d. i. im Mittelpunkt der Scheibe) besitzt. Lässt man nämlich in (1.) den Punkt α nach o wandern, so verwandelt sich ϑ in $\frac{1}{2}\pi$; und man erhält also:

(1. b) $$F_0 = \tfrac{1}{2} C\pi.$$

Zweiter Satz. *Die Flächen* $F = Const.$ (d. i. die sogenannten Niveauflächen) *sind dargestellt durch diejenigen Ellipsoidflächen, welche die gegebene Kreisscheibe zur gemeinsamen Brennebene haben. Legt man also z. B. eine solche Ellipsoidfläche*) durch den Punkt* α, *so wird das auf irgend einen Punkt* ξ *dieser Fläche ausgeübte Potential* F_ξ *gleichgross sein mit* F_α. *Also*

(2.) $$F_\xi = F_\alpha = C\vartheta.$$

Mittelst dieser Sätze ist man das *Potential F* für jeden beliebigen Raumpunkt anzugeben, und folglich auch die *elektrische Dichtigkeit* auf der Scheibe zu berechnen im Stande. Wir werden nun im Folgenden zeigen, wie man von der *Kreisscheibe* aus, mittelst der Methode der reciproken Radien und unter Anwendung der peripolaren Coordinaten, zur Lösung der analogen Aufgabe für eine beliebige *Kugelcalotte* gelangen kann. Zu diesem Zweck ist zunächst die

Einführung der peripolaren Coordinaten in die Formel (2.) erforderlich. Es handelt sich also darum, das Potential F_ξ (2) auszudrücken durch die peripolaren Coordinaten λ, ω, φ, Π des Punktes ξ, diese Coordinaten bezogen gedacht auf die gegebene Kreisfläche.

Sind δ und ε diejenigen Punkte, in denen der Rand der Kreisscheibe von der Meridianebene des Punktes ξ, resp. der Fortsetzung derselben geschnitten wird, so ist:

$$\lambda = \frac{(\xi\delta)}{(\xi\varepsilon)}, \qquad \Pi = \sqrt{(\xi\delta)\ (\xi\varepsilon)}.$$

Gleichzeitig ist φ derjenige Winkel, unter welchem die Meridianebene des Punktes ξ gegen irgend eine feste Meridianebene geneigt ist. Und endlich bezeichnet ω die Inclination einer über dem Kreisrande stehenden und durch ξ gehenden Kugelcalotte, d. i. denjenigen Winkel, unter welchen diese Calotte gegen die *obere* Seite der *äussern*

*) Vgl. die Figur Seite 414.

Grundfläche geneigt ist. Demgemäss ergeben sich die Formeln (vgl. Seite 373):

$$(4.)\qquad \begin{aligned}(\xi\delta) &= \frac{2B\lambda}{\sqrt{1-2\lambda\cos\omega+\lambda^2}},\\ (\xi\varepsilon) &= \frac{2B}{\sqrt{1-2\lambda\cos\omega+\lambda^2}},\\ \Pi &= \frac{2B\sqrt{\lambda}}{\sqrt{1-2\lambda\cos\omega+\lambda^2}},\end{aligned}$$

wo $B = (o\delta)$ den Radius der gegebenen Kreisscheibe vorstellt.

Beschreibt man in der Meridianebene des Punktes ξ eine durch ξ gehende Ellipse mit den Brennpunkten δ, ε, und bezeichnet man

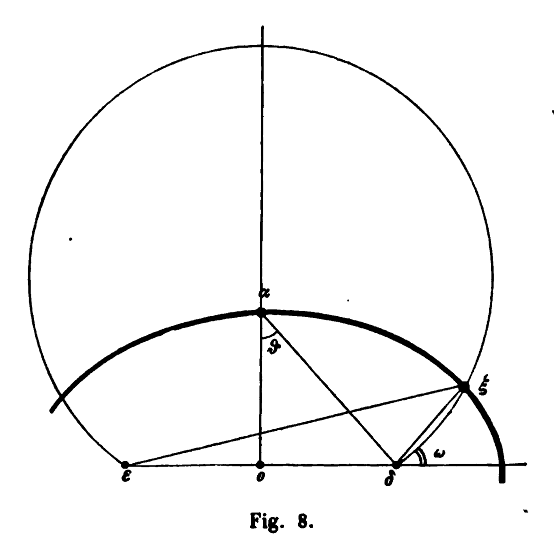


Fig. 8.

den Punkt, in welchem diese Ellipse von der Axe der Kreisscheibe geschnitten wird, mit α, so ist nach (2.):

$$(5.)\qquad F_\xi = F_\alpha = C\vartheta,$$

wo $\vartheta = (o\alpha\delta)$. Um nun dieses ϑ durch die peripolaren Coordinaten λ, ω, φ, Π des Punktes ξ auszudrücken, notiren wir zunächst die aus dem rechtwinkligen Dreieck $o\alpha\delta$ sich ergebende Gleichung:

$$\mathrm{tg}^2\,\vartheta = \frac{(o\delta)^2}{(o\alpha)^2} = \frac{(o\delta)^2}{(\alpha\delta)^2-(o\delta)^2} = \frac{B^2}{(\alpha\delta)^2-B^2}.$$

Diese Gleichung aber können wir, weil in der von uns construirten Ellipse die Summe der Brennstrahlen für den Punkt α eben so gross wie für den Punkt ξ sein muss, mithin $2(\alpha\delta) = (\xi\delta) + (\xi\varepsilon)$ ist, auch so schreiben:

$$\mathrm{tg}^2\,\vartheta = \frac{4B^2}{[(\xi\delta)+(\xi\varepsilon)]^2-4B^2},$$

oder, indem wir für $(\xi\delta)$, $(\xi\varepsilon)$ die Werthe (4.) substituiren, auch so:

$$\mathrm{tg}^2\,\vartheta = \frac{1 - 2\lambda\cos\omega + \lambda^2}{4\lambda\,(\cos\frac{1}{2}\omega)^2}.$$

Hieraus endlich folgt, weil ϑ seiner Definition nach zwischen $0 \ldots \frac{1}{2}\pi$ liegt (vgl. die Note Seite 412), mithin $\mathrm{tg}\,\vartheta$ stets *positiv* ist:

$$\mathrm{tg}\,\vartheta = \mathrm{abs}\left(\frac{\sqrt{1 - 2\lambda\cos\omega + \lambda^2}}{2\sqrt{\lambda}\,.\,\cos\frac{1}{2}\omega}\right),$$

oder, was dasselbe *):

(6.) $$\mathrm{tg}\,\vartheta = \frac{\sqrt{1 - 2\lambda\cos\omega + \lambda^2}}{2\sqrt{\lambda}\,.\,\mathrm{abs}\,(\cos\frac{1}{2}\omega)},$$

mithin:

(7.) $$\vartheta = \underset{(0\,..\,\pi)}{\mathrm{Arctg}}\left(\frac{\sqrt{1 - 2\lambda\cos\omega + \lambda^2}}{2\sqrt{\lambda}\,.\,\mathrm{abs}\,(\cos\frac{1}{2}\omega)}\right),$$

wo das Zeichen $\underset{(0\,..\,\pi)}{\mathrm{Arctg}}$ andeutet, dass der Werth dieser Function stets zwischen den Grenzen $0 \ldots \pi$ gerechnet werden soll **).

Substituiren wir endlich den Ausdruck (7.) in (5.), so haben wir unsere Aufgabe gelöst, nämlich F_ξ ausgedrückt durch die peripolaren Coordinaten λ, ω, φ, Π des Punktes ξ.

Bemerkung. — *Von Wichtigkeit für den weitern Fortgang unserer Untersuchungen ist es, dass man in den Formeln* (6.), (7.) *das Zeichen* abs *vermeiden kann, mittelst einer besondern Festsetzung über die Rechnung von* ω. Um solches näher darzulegen, betrachten wir die Gesammtheit der über dem gegebenen Grundkreise (d. i. über dem Rande der Kreisscheibe) stehenden Kugelcalotten, von denen jede bestimmt wird durch ihre Inclination ω (vgl. die Figur Seite 368).

Offenbar wird man all' diese Calotten erhalten, wenn man ω von 0 bis 2π wachsen lässt; sodann wird man all' diese Calotten zum zweiten Mal erhalten, wenn man ω weiter von 2π bis 4π wachsen lässt; u. s. w. Andererseits kann man all' diese Calotten, jedoch in umgekehrter Aufeinanderfolge, auch dadurch erhalten, dass

*) Unter dem Zeichen $\sqrt{U}$ soll nämlich in dieser Abhandlung stets die *positive* Wurzel von U verstanden werden.

**) Die so definirte Function:

$$\underset{(0\,..\,\pi)}{\mathrm{Arctg}}\,(V)$$

wird offenbar, falls ihr Argument V *positiv* ist, stets zwischen den Grenzen $0 \ldots \frac{1}{2}\pi$ liegen. — Ist ferner W eine *ganz beliebige* (positive oder negative) Grösse, so wird die Gleichung stattfinden:

$$\underset{(0\,..\,\pi)}{\mathrm{Arctg}}\,(W) + \underset{(0\,..\,\pi)}{\mathrm{Arctg}}\,(-W) = \pi.$$

man ω von 0 bis -2π abnehmen lässt, und von Neuem erhalten, indem man ω weiter abnehmen lässt von -2π bis -4π; u. s. w.

Für unsere Zwecke ist es angemessen, diese schrankenlose Willkür zu beseitigen, *nämlich bei der Rechnung von ω die gegebene Kreisfläche als eine Scheidewand festzusetzen, welche nicht überschritten werden darf.* Alsdann können wir die Gesammtheit jener Calotten nur noch dadurch erhalten, dass wir ω von 0 bis π wachsen, und andererseits von 0 bis $-\pi$ abnehmen lassen. *Und zwar wollen wir das in solcher Weise beschränkte ω durch das Zeichen $[\omega]$ andeuten*).*

Dieses eingeschränkte $[\omega]$ liegt stets zwischen $-\pi \ldots +\pi$, mithin $\frac{1}{2}[\omega]$ stets zwischen $-\frac{1}{2}\pi \ldots + \frac{1}{2}\pi$; und hieraus folgt, dass

(A.) . . . . $\cos\frac{1}{2}[\omega]$ *stets positiv* ist.

Das *un*beschränkte ω steht zu dem beschränkten $[\omega]$ in der Beziehung:

$$\text{(B.)} \qquad \omega = [\omega] + 2N\pi,$$

wo N eine unbestimmte (positive oder negative) ganze Zahl vorstellt. Hieraus folgt:

$$\text{(C.)} \qquad \cos\tfrac{1}{2}\omega = \pm \cos\tfrac{1}{2}[\omega],$$

also mit Rücksicht auf (A.):

$$\text{(D.)} \qquad \text{abs}\,(\cos\tfrac{1}{2}\omega) = \cos\tfrac{1}{2}[\omega].$$

Demgemäss kann man die Formeln (6.), (7.) folgendermassen schreiben:

$$\text{(8.)} \qquad \operatorname{tg}\vartheta = \frac{\sqrt{1-2\lambda\cos\omega+\lambda^2}}{2\sqrt{\lambda}\,.\cos\frac{1}{2}[\omega]},$$

$$\text{(9.)} \qquad \vartheta = \underset{(0\,..\,\pi)}{\operatorname{Arctg}}\left(\frac{\sqrt{1-2\lambda\cos\omega+\lambda^2}}{2\sqrt{\lambda}\,.\cos\frac{1}{2}[\omega]}\right).$$

Substituirt man endlich diesen Werth von ϑ in die Formel (5.), so folgt mit Rücksicht auf (4.):

$$\text{(10.)} \qquad F_\xi = C\,.\underset{(0\,..\,\pi)}{\operatorname{Arctg}}\left(\frac{\sqrt{1-2\lambda\cos\omega+\lambda^2}}{2\sqrt{\lambda}\,.\cos\frac{1}{2}[\omega]}\right) = C\,.\underset{(0\,..\,\pi)}{\operatorname{Arctg}}\left(\frac{\mathrm{B}}{\Pi\cos\frac{1}{2}[\omega]}\right).$$

*) Man kann sich auch so ausdrücken: Die Inclination ω hat für jeden gegebenen Raumpunkt ξ unendlich viele Werthe, die von einander verschieden sind um ganze Vielfache von 2π, und ist also zu bezeichnen als eine *vieldeutige* Function von ξ. Dem gegenüber soll unter dem eingeklammerten $[\omega]$ diejenige *eindeutige* Function von ξ verstanden werden, in welche ω sich verwandelt, sobald man die *Kreisfläche* als eine nicht zu überschreitende *Scheidewand* [oder, nach Riemann, als einen nicht zu überschreitenden *Querschnitt* ansieht], und als Anfangswerth der Function auf der äussern Grundfläche den Werth 0 festsetzt.

§ 4.

Die elektrische Vertheilung auf einer Kugelcalotte für den Fall, dass keine äusseren Kräfte einwirken.

Die bisher betrachtete Kreisscheibe mag durch stetige Umformung in irgend eine der *confinen* Kugelcalotten*), z. B. in die Calotte σ (Fig. Seite 418), umgewandelt werden. Und hiemit gleichzeitig mag die Function F_ξ (10.) in eine andere Function

$$(11.)\qquad U_\xi = C \,.\, \underset{(0\,..\,\pi)}{\mathrm{Arctg}} \left(\frac{\sqrt{1 - 2\lambda \cos\omega + \lambda^2}}{2\sqrt{\lambda}\,.\,\cos\frac{1}{2}[\omega]} \right) = C \,.\, \underset{(0\,..\,\pi)}{\mathrm{Arctg}} \left(\frac{\mathsf{B}}{\Pi \cos\frac{1}{2}[\omega]} \right)$$

umgewandelt werden, welche von jener früheren Function F_ξ (10.) nur dadurch sich unterscheiden soll, *dass bei Rechnung des Winkels* $[\omega]$ *jetzt nicht mehr die Kreisfläche, sondern die Kugelcalotte* σ *als Scheidewand dient* **). Ist z. B. die Inclination der gegebenen Kugelcalotte $\sigma = \frac{2}{3}\pi$, so soll $[\omega]$ einerseits wachsen dürfen von 0 bis $\frac{2}{3}\pi$, andererseits abnehmen von 0 bis $-\frac{4}{3}\pi$, also beschränkt sein auf das Werthintervall $-\frac{4}{3}\pi \cdots + \frac{2}{3}\pi$. Ist ferner, um ein zweites Beispiel anzuführen, die Inclination der gegebenen Calotte $\sigma = \frac{3}{2}\pi$ (die Calotte selber also eine Halbkugel), so soll $[\omega]$ beschränkt sein auf das Werthintervall $-\frac{1}{2}\pi \cdots + \frac{3}{2}\pi$.

Bezeichnet man (Fig. Seite 418) die Inclination der gegebenen Calotte σ mit ω_σ, und sind a, b zwei durch diese Calotte getrennte, einander unendlich nahe Punkte, so wird der mit $[\omega]$ bezeichnete Winkel für diese Punkte a und b *verschiedene* Werthe haben. Es wird nämlich

$$\text{für } a\colon\ [\omega] = \omega_\sigma, \qquad \text{mithin: } \cos\tfrac{1}{2}[\omega] = \cos\tfrac{1}{2}\omega_\sigma,$$
$$\text{hingegen für } b\colon\ [\omega] = -(2\pi - \omega_\sigma), \quad \text{mithin: } \cos\tfrac{1}{2}[\omega] = -\cos\tfrac{1}{2}\omega_\sigma.$$

Somit folgt aus (11.):

---

*) d. i. derjenigen Kugelcalotten, welche mit der Kreisscheibe *ein und denselben Rand* haben.

**) Man kann sich auch so ausdrücken: In der vorliegenden Formel (11.), und überhaupt bei der gegenwärtigen Betrachtung soll unter dem eingeklammerten $[\omega]$ eine *eindeutige* Function von ξ verstanden werden, und zwar diejenige, in welche die *vieldeutige* Function ω sich verwandelt, sobald man *die gegebene Calotte* σ als eine nicht zu überschreitende *Scheidewand* ansieht, und als Anfangswerth der Function auf der äussern Grundfläche den Werth 0 festsetzt.

$$U_a = C \cdot \underset{(0\,..\,\pi)}{\text{Arctg}} \left(\frac{\mathsf{B}}{\Pi_a \cos \frac{1}{2} \omega_\sigma} \right);$$

$$U_b = C \cdot \underset{(0\,..\,\pi)}{\text{Arctg}} \left(- \frac{\mathsf{B}}{\Pi_b \cos \frac{1}{2} \omega_\sigma} \right),$$

wo $\Pi_a = \Pi_b$, weil a und b einander unendlich nahe liegen. Aus diesen beiden Formeln folgt daher sofort*):

(11. a) $$U_a + U_b = C\pi.$$

Die physikalische Bedeutung von U_ξ. — Diese Function U_ξ (11.) ist entstanden aus der früheren Function F_ξ (10.); und

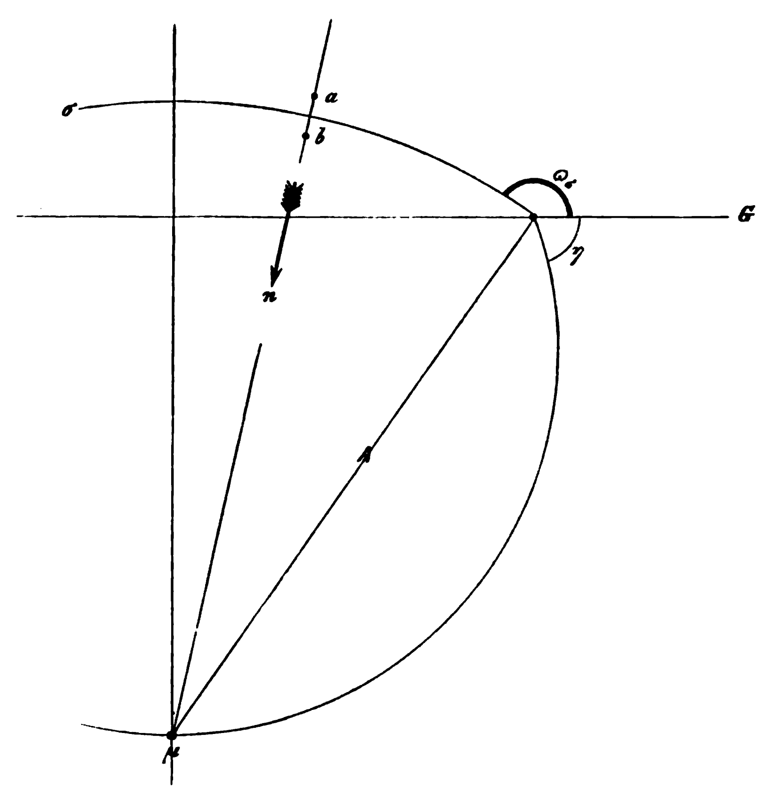


Fig. 9.

man erkennt leicht, dass sie dieselben Potential-Eigenschaften wie jene besitzt, nur mit dem Unterschiede, dass die *Unstetigkeitsfläche* der Function U_ξ und ihrer Ableitungen nicht mehr die Kreisfläche, sondern die Calotte σ ist. Folglich kann die Function U_ξ angesehen werden als das Potential einer auf der Calotte σ ausgebreiteten

---

*) Vgl. die Note Seite 415.

Massenbelegung, welche im Allgemeinen zusammengesetzt sein wird aus einer *einfachen* und einer *Doppel*-Belegung. Wie aber diese Belegung L auch beschaffen sein mag, immer wird man (zufolge des Satzes, Seite 410) eine zweite Belegung Λ der Calotte σ sich vorstellen können von solcher Beschaffenheit, dass die von L und Λ ausgeübten Potentiale U und Ω der Relation entsprechen:

(A.) $$\sqrt{(\mu\xi)}\; U_\xi = \sqrt{(\mu\xi')}\; \Omega_{\xi'}\,;$$

hier bezeichnet ξ (nach wie vor) einen beliebigen Raumpunkt, und ξ' sein Spiegelbild in Bezug auf die Calotte σ. Ausserdem bezeichnet μ den räumlichen Mittelpunkt der Calotte σ.

Vertauscht man in der Formel (A.) die Punkte ξ und ξ' mit einander, so erhält man:

(B.) $$\sqrt{(\mu\xi')}\; U_{\xi'} = \sqrt{(\mu\xi)}\; \Omega_\xi\,.$$

Nimmt man ferner in diesen Formeln (A.), (B.) für ξ, ξ' die Punkte a, b (Figur Seite 418), so folgt:

(C.) $$\sqrt{(\mu a)}\; U_a = \sqrt{(\mu b)}\; \Omega_b\,,$$

(D.) $$\sqrt{(\mu b)}\; U_b = \sqrt{(\mu a)}\; \Omega_a\,,$$

oder, weil $(\mu a) = (\mu b)$ ist:

(E.) $$U_a = \Omega_b\,,$$

(F.) $$U_b = \Omega_a\,.$$

Demgemäss kann die Formel (11.a) auch so geschrieben werden:

(G.) $$U_a + \Omega_a = C\pi\,,$$

oder auch so:

(H.) $$U_b + \Omega_b = C\pi\,.$$

Da U_ξ und Ω_ξ diejenigen Potentiale sind, welche zwei *auf der Calotte σ ausgebreitete* Massenbelegungen L und Λ auf den Punkt ξ ausüben, so ist offenbar

(J.) $$U_\xi + \Omega_\xi$$

dasjenige Potential, welches von beiden Belegungen zusammengenommen ausgeübt wird. Jene Belegungen L und Λ sind nicht näher bekannt; und wir haben also vorläufig den Ausdruck (J.) zu bezeichnen als ein Potential, welches auf den variablen Punkt ξ ausgeübt wird von einer gewissen *unbekannten, auf der Calotte σ ausgebreiteten Belegung*. Dieses Potential besitzt aber, wie aus (G.) und

(H.) ersichtlich, *auf* der Calotte, und zwar auf *beiden* Seiten der Calotte *ein und denselben constanten Werth*, nämlich den Werth $C\pi$. Hieraus folgt, dass jene unbekannte Belegung eine *einfache*, und zugleich auch diejenige ist, welche dem elektrischen Gleichgewicht entspricht.

Mit andern Worten: *Denkt man sich die Calotte σ als eine isolirte leitende Fläche, die mit Elektricität geladen und der Einwirkung äusserer Kräfte entzogen ist, so wird das von dieser Calotte, nach Eintritt des Gleichgewichtszustandes, auf irgend einen Punkt ξ ausgeübte elektrische Potential F_ξ den Werth besitzen:*

(12.) $$F_\xi = K\,(U_\xi + \Omega_\xi)\,,$$

wo K eine willkürliche Constante vorstellt. Und gleichzeitig wird alsdann dieses Potential auf der Fläche σ den Werth $KC\pi$ besitzen; was angedeutet sein mag durch die Formel:

(12. a) $$\overline{F} = KC\pi.$$

Offenbar würde es Luxus sein, *zwei* willkürliche Constanten (nämlich K und C) in unsern Formeln beizubehalten. Um diesen Luxus zu beseitigen, und zugleich eine bessere Uebereinstimmung mit unsern früheren Betrachtungen über die *Kreisfläche* [vgl. (1.b) Seite 413] hervorzubringen, *setzen wir $K = \frac{1}{2}$; so dass also die Formeln* (12.) *und* (12. a) *folgende Gestalt annehmen:*

(13.) $$F_\xi = \tfrac{1}{2}\,(U_\xi + \Omega_\xi)\,,$$

(13. a) $$\overline{F} = \tfrac{1}{2}\,C\pi.$$

Weitere Entwicklung dieses Potentiales F_ξ. — Substituirt man in (13.) für Ω den aus (B.) entspringenden Werth, so folgt:

(14.) $$F_\xi = \tfrac{1}{2}\left(U_\xi + \frac{\sqrt{(\mu\xi')}}{\sqrt{(\mu\xi)}}\,U_{\xi'}\right);$$

und hieraus folgt weiter, wenn man für U seine eigentliche Bedeutung (11.) substituirt:

(15.) $$F_\xi = \tfrac{1}{2}\,C\left\{\underset{(0\,..\,\pi)}{\text{Arctg}}\left(\frac{\mathsf{B}}{\Pi\cos\frac{1}{2}[\omega]}\right) + \frac{\sqrt{(\mu\xi')}}{\sqrt{(\mu\xi)}}\,\underset{(0\,..\,\pi)}{\text{Arctg}}\left(\frac{\mathsf{B}}{\Pi'\cos\frac{1}{2}[\omega']}\right)\right\},$$

wo Π', $[\omega']$ für den Punkt ξ' dieselben Bedeutungen haben sollen, wie Π, $[\omega]$ für ξ.

Bemerkung. — Es bleibt noch übrig, in der allgemeinen Formel (15.) den Punkt ξ' und die ihm zugehörigen Grössen $(\mu\xi')$, Π', $[\omega']$ zu *eliminiren*, um in solcher Weise zu einer Formel zu gelangen, *durch welche der Potentialwerth F_ξ geradezu als Function des Punktes ξ* (resp. seiner Coordinaten) *dargestellt wird.*

Bei einer solchen Elimination handelt es sich unter Anderm z. B. auch darum, *die eingeklammerte* Grösse $[\omega']$ *vom Punkt ξ' abzulösen, und direct von ξ abhängig zu machen.* Diese Aufgabe, welche besondere Schwierigkeiten macht, soll im folgenden § behandelt werden.

§ 5.

Fortsetzung. Ueber die Inclinationen und gewisse mit denselben zusammenhängende Grössen.

Wir haben unter ξ, ξ' zwei beliebige Punkte verstanden, welche einander conjugirt sind in Bezug auf die gegebene Calotte σ, also zwei Punkte, deren Inclinationen ω, ω' der Relation entsprechen:

(I.) $$\omega + \omega' \equiv 2\omega_\sigma, \quad (\text{mod } 2\pi),$$

wo ω_σ die Inclination der gegebenen Calotte σ vorstellt. Es handelt sich nun hier um eine genauere Betrachtung der den Punkten ξ, ξ' zugehörigen eingeklammerten Grössen $[\omega]$, $[\omega']$.

Will man $[\omega]$ erhalten, so hat man auf der äussern Grundfläche G irgend welchen Punkt g zu markiren*), und von g aus eine beliebige Curve nach dem Punkte ξ zu legen, jedoch in solcher Art, dass die gegebene Calotte σ von der Curve *nicht* geschnitten wird. Sind

$$g, \gamma, \gamma', \gamma'', \ldots \xi$$

die aufeinanderfolgenden Punkte dieser Curve, und legt man dem Punkte g die Inclination 0 bei, so ergiebt sich hieraus (unter Beobachtung des Gesetzes der Stetigkeit) in *eindeutiger Weise* die Inclination des nächstfolgenden Punktes γ, sodann die von γ', die von γ'' u. s. w., schliesslich die von ξ. Und diese letztere repräsentirt das gesuchte $[\omega]$, immer vorausgesetzt, dass die gegebene Calotte σ von der angewandten Curve *nicht* geschnitten wird (vgl. die Note Seite 417).

*) Die *äussere Grundfläche G* ist früher genau definirt worden; vgl. Seite 368.

Der Punkt g besitzt aber nicht nur den Inclinationswerth 0, sondern unendlich viele Inclinationswerthe, die alle von der Form $N \,.\, 2\pi$ sind, wo N eine positive oder negative ganze Zahl vorstellt. Wollte man nun in g etwa beginnen mit dem Inclinationswerth 6π, so würden sich in den folgenden Punkten γ, γ', γ'', . . . ξ Werthe

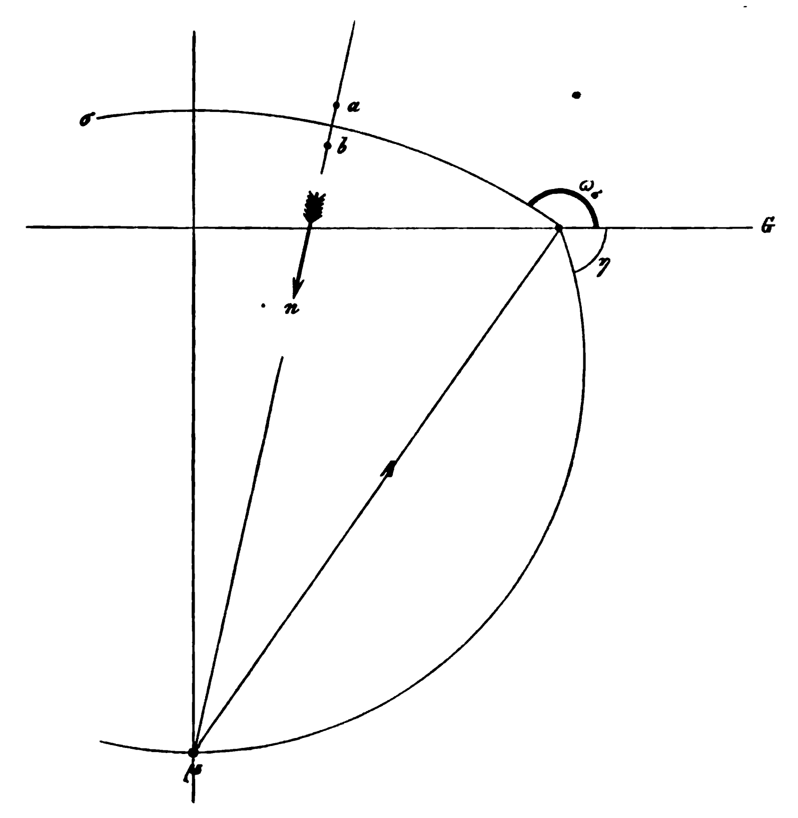


Fig. 9a.

ergeben, die durchweg um 6π grösser sind, als die vorhin gefundenen. Während also vorhin der Anfangs- und Endwerth durch

$$0 \quad \text{und} \quad [\omega]$$

repräsentirt waren, werden dieselben gegenwärtig dargestellt sein durch

$$6\pi \quad \text{und} \quad [\omega] + 6\pi.$$

Wie dem auch sei, — deutlich tritt zu Tage, dass der *Zuwachs der Inclination bei Durchlaufung der Curve* im einen wie im andern Fall *denselben* Werth hat, nämlich $= [\omega]$ ist. Also der Satz:

(II.) . . . *Die einem gegebenen Raumpunkt ξ entsprechende Grösse $[\omega]$ repräsentirt denjenigen Zuwachs, welchen die Inclination längs einer Curve erfährt, die von irgend einer Stelle der äussern Grundfläche auf beliebigem Wege, jedoch ohne die gegebene Calotte σ zu durchschreiten, nach ξ geht.*

Oder, ein wenig anders ausgedrückt:

Die dem Punkte ξ entsprechende Grösse $[\omega]$ bestimmt sich durch die Formel:

(II. a) $$[\omega] = \int_g^\xi d\omega,$$

wo g einen beliebigen Punkt der äussern Grundfläche G vorstellt, und die Integration über irgend welche von g nach ξ gehende und die gegebene Calotte σ nicht schneidende Curve hinzuerstrecken ist.

Analoges gilt natürlich von $[\omega']$ in Bezug auf ξ'; und es ist also:

(III.) $$[\omega'] = \int_g^{\xi'} d\omega', \quad *)$$

wo die Integrationscurve wiederum eine ganz beliebige Gestalt haben kann, nur mit der Einschränkung, dass sie die gegebene Calotte σ *nicht schneiden darf.*

Ablösung der Grösse $[\omega']$ vom Punkte ξ'. — Wir wenden uns jetzt zu der am Ende des vorhergehenden § genannten Aufgabe. Zu diesem Zweck wollen wir uns die Punkte ξ, ξ' in beliebiger Bewegung begriffen denken, jedoch der Art, dass sie stets zu einander conjugirt bleiben in Bezug auf die gegebene Calotte σ, deren Centrum mit μ, und deren Radius mit A bezeichnet sein mag (Figur Seite 422). Alsdann werden ξ, ξ' in jedem Augenblick mit μ in gerader Linie liegen, und der Gleichung entsprechen:

$$(\mu\xi)\,(\mu\xi') = A^2.$$

Wird also in irgend einem Augenblick $(\mu\xi) = A$, so wird in diesem Augenblick $(\mu\xi')$ ebenfalls $= A$ werden. Mit andern Worten: Durch-

*) Ob man die längs der Curve $g \ldots \xi'$ anwachsende Inclination mit ω, oder mit ω', oder mit irgend welchem andern Buchstaben benennt, ist natürlich gleichgültig. Und man könnte also in der Formel (III.) unter dem Integralzeichen statt $d\omega'$ auch $d\omega$ setzen. Doch wird es zweckmässig sein, die Bezeichnung *so zu lassen,* wie wir sie in (III.) gewählt haben.



schreitet der Punkt ξ in irgend einem Augenblick die gegebene Calotte σ, so wird in diesem Augenblick der conjugirte Punkt ξ' ebenfalls die Calotte durchschreiten (und zwar an ebenderselben Stelle). Umgekehrt kann man sagen:

(IV.) . . . *Ist die Bewegung des einen der beiden Punkte ξ, ξ' von solcher Art, dass seine Bahn die gegebene Calotte σ nirgends durchschreitet, so wird Gleiches auch gelten von der correspondirenden Bewegung des andern Punktes.*

Ferner wird während der in Rede stehenden Bewegung in jedem Augenblick die Formel (I.) stattfinden, d. i. die Formel:

(V.) $$\omega' \equiv 2\omega_\sigma - \omega, \quad (\text{mod } 2\pi);$$

aus dieser aber folgt, dass für jedes Zeitelement der Bewegung die Differentialgleichung gilt:

(VI.) $$d\omega' = d(2\omega_\sigma - \omega),$$

wo das frühere Zeichen $\equiv$ in $=$ übergegangen ist*).

Lässt man nun den Punkt ξ' von g aus eine ganz beliebige, jedoch die Calotte σ *nicht* durchschreitende Bahn $g \ldots \xi'$ durchwandern, und bezeichnet man die correspondirende Bahn des Punktes ξ mit $h \ldots \xi$, so ergiebt sich, falls man die Gleichung (VI.) über alle Zeitelemente dieser Bewegung integrirt, die Formel:

(VII.) $$\int_g^{\xi'} d\omega' = \int_h^{\xi} d(2\omega_\sigma - \omega).$$

Da die Integrationscurve $g \ldots \xi'$ die Calotte σ *nicht* schneiden soll, so ist das Integral links identisch mit dem Integrale (III.), sodass man also durch Zusammenfassung der Formeln (III.), (VII.) erhält:

(VIII.) $$[\omega'] = \int_g^{\xi'} d\omega' = \int_h^{\xi} d(2\omega_\sigma - \omega),$$

oder, mit Fortlassung des Zwischengliedes:

(IX.) $$[\omega'] = \int_h^{\xi} d(2\omega_\sigma - \omega),$$

---

*) Die rechte Seite der Formel (VI.) lautet: $d(2\omega_\sigma - \omega)$ und ist also, weil ω_σ eine gegebene *Constante* vorstellt, $= -d\omega$. Trotzdem wird es zweckmässig sein, diese rechte Seite in der gewählten Schreibart zu belassen.

oder, falls man für den hier auftretenden Integralwerth die Abbreviatur $[2\omega_\sigma - \omega]$ einführt:

(X.) $$[\omega'] = [2\omega_\sigma - \omega].$$

Dabei sind hinsichtlich dieses in (IX.) und (X.) auf der rechten Seite stehenden Integrals zwei Dinge im Auge zu behalten.

Erstens. g sollte ein beliebiger Punkt der äussern Grundfläche G sein. Folglich wird der zu g conjugirte Punkt h ein beliebiger Punkt sein auf der zu G conjugirten Calotte H. Die Inclination von G ist $\equiv 0$, (mod 2π); folglich ist, nach (I.), die der Calotte H eigenthümliche Inclination $\equiv 2\omega_\sigma$, (mod 2π). Oder ein wenig anders ausgedrückt: Die Inclination ω der Calotte H bestimmt sich mittelst der Formel:

(XI.) $$2\omega_\sigma - \omega \equiv 0, \pmod{2\pi}.$$

Zweitens. Die in (VIII.), (IX.) vorhandene Integrationscurve $h \ldots \xi$ ist die zur Curve $g \ldots \xi'$ conjugirte. Da nun diese letztere ganz beliebig war bis auf die Beschränkung, dass sie die gegebene Calotte σ *nicht* durchschreiten sollte, so gilt, zufolge (IV.), Gleiches auch von der conjugirten Curve $h \ldots \xi$.

Somit gelangen wir für jenen von uns mit $[2\omega_\sigma - \omega]$ bezeichneten Integralwerth zu folgender Regel: *Soll das einem gegebenen Raumpunkt ξ entsprechende Integral $[2\omega_\sigma - \omega]$ ermittelt werden, so hat man diejenige Calotte H zu construiren, für welche $2\omega_\sigma - \omega$ ein ganzes Vielfaches von 2π ist, auf dieser Calotte einen beliebigen Punkt h zu markiren, und endlich von h aus irgend eine die gegebene Calotte σ nicht schneidende Curve nach dem gegebenen Punkte ξ zu legen. Jenes Integral $[2\omega_\sigma - \omega]$ ist alsdann definirt durch die Formel:*

(XII.) $$[2\omega_\sigma - \omega] = \int_h^\xi d(2\omega_\sigma - \omega),$$

die Integration hinerstreckt längs der genannten Curve.

Mit andern Worten: *Man hat, nachdem die Calotte H und der Punkt h construirt sind, denjenigen Zuwachs zu bilden, welchen die Function $2\omega_\sigma - \omega$ bei Durchlaufung der genannten Curve erfährt. Dieser Zuwachs repräsentirt alsdann den Werth der gesuchten Grösse* $[2\omega_\sigma - \omega]$.



Diese Regel mag hinfort als *Definition* für jede eckig eingeklammerte Grösse $[f(\omega)]$ angesehen werden, sowohl dann, wenn die Function $f(\omega) = 2\omega_\sigma - \omega$ ist, als auch dann, wenn sie irgend welchen andern Werth hat.

Bezeichnet also $f(\omega)$ eine gegebene Function der Inclination ω, so soll unter der einem gegebenen Raumpunkt ξ entsprechenden Grösse $[f(\omega)]$ diejenige verstanden werden, welche sich bestimmt mittelst der Formel:

$$\text{(XIII.)} \qquad [f(\omega)] = \int_h^\xi df(\omega) .$$

*Dabei ist unter h ein beliebiger Punkt derjenigen Calotte H zu verstehen, für welche $f(\omega)$ ein ganzes Vielfaches von 2π ist. Und die Integration ist hinerstreckt zu denken über eine beliebige, von h nach ξ gehende, jedoch die gegebene Calotte σ **nicht** durchschreitende Curve.* Man bemerkt sofort, dass die früher in (II.), (II. a) angewandte Bezeichnung dieser allgemeinen Definition sich subsumirt als ein specieller Fall.

Beispiel. — Nimmt man für $f(\omega)$ einmal die Function $2\omega_\sigma - \omega$, das andere Mal die Function $\omega - 2\omega_\sigma$, so ist die Calotte H in beiden Fällen *dieselbe*. Aber die in Betracht kommenden Zuwüchse haben entgegengesetzte Werthe. Kurz es ergiebt sich:

$$[2\omega_\sigma - \omega] = -[\omega - 2\omega_\sigma];$$

und ebenso ergiebt sich allgemein:

$$\text{(XIV.)} \qquad [f(\omega)] = -[-f(\omega)];$$

folglich:

$$\text{(XV.)} \qquad \cos\tfrac{1}{2}[f(\omega)] = \cos\tfrac{1}{2}[-f(\omega)].$$

Zweites Beispiel. — Sind a und b zwei der gegebenen Calotte σ unendlich nahe liegende Punkte, a auf ihrer *obern* und b auf ihrer *untern* Seite (Figur Seite 422), und bezeichnet man die Werthe der Grösse $[\omega - 2\omega_\sigma]$ für diese Punkte a und b resp. mit

$$[\omega - 2\omega_\sigma]_a \quad \text{und} \quad [\omega - 2\omega_\sigma]_b ,$$

so ergiebt sich auf Grund der Definitionen (XII.), (XIII.):

$$\text{(XVI.)} \qquad [\omega - 2\omega_\sigma]_a - [\omega - 2\omega_\sigma]_b = 2\pi ;$$

und hieraus folgt sofort:

$$\text{(XVII.)} \qquad \cos\tfrac{1}{2}[\omega - 2\omega_\sigma]_a = -\cos\tfrac{1}{2}[\omega - 2\omega_\sigma]_b .$$

Drittes Beispiel. — Bringt man die allgemeine Definition (XIII.) in Anwendung auf die Function

$$f(\omega) = \omega - \omega_o,$$

wo o ein beliebig gegebener *fester Punkt* sein soll, so erhält man für die Calotte H diejenige, welche durch diesen Punkt o hindurchgeht; so dass man also für h den Punkt o selber nehmen darf. Demgemäss ergiebt sich für die *einem gegebenen Punkt* ξ *entsprechende Grösse* $[\omega - \omega_o]$ die Formel:

$$[\omega - \omega_o] = \int_o^\xi d(\omega - \omega_o),$$

oder, was dasselbe ist:

$$\text{(XVIII.)} \qquad [\omega - \omega_o] = \int_o^\xi d\omega,$$

die Integration hinerstreckt über irgend eine von o nach ξ gehende und die Calotte σ *nicht* schneidende Curve.

§ 6.

Fortsetzung. Das elektrische Potential der betrachteten Calotte.

Sind ξ und ξ' irgend zwei in Bezug auf die gegebene Calotte σ zu einander conjugirte Punkte, so finden zwischen ihren Coordinaten λ, ω, φ, Π und λ', ω', φ', Π' die Relationen statt (vgl. Seite 379):

$$(\alpha.) \qquad \lambda = \lambda',$$

$$(\beta.) \qquad \omega + \omega' \equiv 2\omega_\sigma, \ (\text{mod } 2\pi),$$

$$(\gamma.) \qquad \varphi \equiv \varphi', \ (\text{mod } 2\pi),$$

$$(\delta.) \qquad \frac{\Pi}{\sqrt{(\mu\xi)}} = \frac{\Pi'}{\sqrt{(\mu\xi')}},$$

wo ω_σ die Inclination und μ den räumlichen Mittelpunkt der gegebenen Calotte bezeichnet. Mit Rücksicht auf $(\alpha.)$, $(\beta.)$ ergiebt sich weiter (vgl. Seite 373):

$$(\varepsilon.) \qquad \Pi = \frac{2B\sqrt{\lambda}}{\sqrt{1 - 2\lambda\cos\omega + \lambda^2}},$$

$$(\zeta.) \qquad \Pi' = \frac{2B\sqrt{\lambda}}{\sqrt{1 - 2\lambda\cos(2\omega_\sigma - \omega) + \lambda^2}}.$$

Und endlich ist, wie wir im vorhergehenden §, in (X.) gefunden haben:

$$(\eta.)\qquad [\omega'] = [2\omega_\sigma - \omega],$$

wobei die *Definitionen* (XII.), (XIII.) im Auge zu behalten sind.

Vermöge (δ.) gewinnt die in (15.) Seite 420 für das elektrische Potential gefundene Formel folgende Gestalt:

$$(16.)\qquad F_\xi = \tfrac{1}{2} C \left\{ \underset{(0\,..\,\pi)}{\text{Arctg}} \left(\frac{\mathsf{B}}{\Pi \cos \frac{1}{2}[\omega]} \right) + \frac{\Pi'}{\Pi} \underset{(0\,..\,\pi)}{\text{Arctg}} \left(\frac{\mathsf{B}}{\Pi' \cos \frac{1}{2}[\omega']} \right) \right\};$$

und hieraus folgt weiter durch Benutzung der Gleichungen (ε.), (ζ.) und (η.):

$$(17.)\qquad F_\xi = \tfrac{1}{2} C \left\{ \underset{(0\,..\,\pi)}{\text{Arctg}} \left(\frac{\sqrt{1 - 2\lambda\cos\omega + \lambda^2}}{2\sqrt{\lambda}\,.\,\cos\frac{1}{2}[\omega]} \right) \right.$$
$$\left. + \frac{\sqrt{1 - 2\lambda\cos\omega + \lambda^2}}{\sqrt{1 - 2\lambda\cos(\omega - 2\omega_\sigma) + \lambda^2}} \underset{(0\,..\,\pi)}{\text{Arctg}} \left(\frac{\sqrt{1 - 2\lambda\cos(\omega - 2\omega_\sigma) + \lambda^2}}{2\sqrt{\lambda}\,.\,\cos\frac{1}{2}[2\omega_\sigma - \omega]} \right) \right\}.$$

Gleichzeitig ist [vgl. (13. a) Seite 420]:

$$(18.)\qquad \overline{F} = \tfrac{1}{2} C\pi.$$

Resultat. — *Denkt man sich also die gegebene Calotte σ, deren Inclination mit ω_σ bezeichnet wurde, isolirt und mit derjenigen elektrischen Belegung versehen, welche ohne äussere Kräfte im Gleichgewicht ist, so wird das von dieser Belegung auf irgend einen Raumpunkt ξ (λ, ω, φ, Π) ausgeübte Potential F_ξ den in* (16.), (17.) *angegebenen Werth haben. Dabei ist in* (16.) *unter ξ' (λ', ω', φ', Π') derjenige Punkt zu verstehen, welcher zu ξ conjugirt ist in Bezug auf die gegebene Calotte σ, ferner unter* B *der Radius des Grundkreises dieser Calotte. Ausserdem bezeichnet C eine willkürliche Constante, oder (besser ausgedrückt) eine Constante, welche abhängt von der der Calotte zuertheilten Elektricitätsmenge, und welche mit dem constanten Werth $\overline{F}$, den das Potential auf der Calotte besitzt, zusammenhängt durch die Formel* (18.).

In diesen Formeln (16.), (17.) *sind die Inclinationen ω und ω' in beliebiger Weise gerechnet zu denken, also nur bestimmt bis auf ganze Vielfache von 2π. Hingegen unterliegen die eckig eingeklammerten Grössen $[\omega]$, $[\omega']$, $[2\omega_\sigma - \omega]$ den in* (XII.), (XIII.) Seite 425 *aufgestellten Definitionen.*

Specialfall der Kreisfläche. — Ist die gegebene Calotte σ eine Kreisfläche, mithin $\omega_\sigma = \pi$, so geht die Formel (17.) über in:

$$(\alpha.)\qquad F_\xi = \tfrac{1}{2} C \left\{ \underset{(0\,..\,\pi)}{\text{Arctg}} \left(\frac{\sqrt{1 - 2\lambda\cos\omega + \lambda^2}}{2\sqrt{\lambda}\,.\,\cos\frac{1}{2}[\omega]} \right) + \underset{(0\,..\,\pi)}{\text{Arctg}} \left(\frac{\sqrt{1 - 2\lambda\cos\omega + \lambda^2}}{2\sqrt{\lambda}\,.\,\cos\frac{1}{2}[2\pi - \omega]} \right) \right\}.$$

Will man genauer eingehen auf die im letzten Gliede enthaltene Grösse $[2\pi - \omega]$, so hat man, nach (XIII.), zunächst diejenige Calotte H zu construiren, für welche die Function $2\pi - \omega$ gleich einem ganzen Vielfachen von 2π ist. Diese Calotte H ist offenbar im gegenwärtigen Fall identisch mit der äussern Grundfläche G. Solches aber constatirt, ergiebt sich sofort, dass die Grössen

$$[\omega] \quad \text{und} \quad [2\pi - \omega]$$

entgegengesetzte Werthe haben, und dass also z. B.

$$\cos \tfrac{1}{2}[\omega] = \cos \tfrac{1}{2}[2\pi - \omega]$$

ist. Demgemäss sind die beiden Glieder, welche die rechte Seite der Formel (α.) ausmachen, einander gleich, sodass man erhält:

$$(\beta.) \qquad F_\xi = C \underset{(0\,..\,\pi)}{\text{Arctg}} \left(\frac{\sqrt{1 - 2\lambda \cos \omega + \lambda^2}}{2\sqrt{\lambda} \,.\, \cos \frac{1}{2}[\omega]} \right),$$

in vollem Einklang mit der Formel (10.) Seite 416.

§ 7.

Fortsetzung. Die Gesammtmasse der auf der Calotte vorhandenen Elektricität.

Wir wollen (was unbeschadet der Allgemeinheit unserer Untersuchung erlaubt ist) annehmen, die Inclination ω_σ der gegebenen Calotte σ liege zwischen 0 und π; sodass also [vgl. (29.) Seite 378] die Relationen stattfinden:

$$(19.) \qquad 0 \quad < \quad \omega_\sigma \quad < \omega_\mu = 2\omega_\sigma < \quad 2\pi.$$

Und die diesen vier Werthen von ω entsprechenden Calotten mögen der Reihe nach bezeichnet sein mit

$$(20.) \qquad G, \qquad \sigma, \qquad C_\mu, \qquad G,$$

sodass also C_μ diejenige Calotte repräsentirt, welche durch den Mittelpunkt μ der Calotte σ hindurchgeht, während G (nach wie vor) die äussere Grundfläche bezeichnet.

Sind τ, τ' irgend zwei Calotten, die einander conjugirt sind in Bezug auf die gegebene Calotte σ, so wird offenbar der Neigungswinkel (σ, τ), unter welchem die Calotten σ und τ am Grundkreise zusammenstossen, eben so gross sein, wie der Neigungswinkel (σ, τ'), welchen σ und τ' daselbst machen. Lässt man in dieser Gleichung

$$(\sigma,\ \tau) = (\sigma,\ \tau')$$

die Calotte τ durch einen unendlich fernen Punkt gehen, mithin in G sich verwandeln, so wird gleichzeitig die conjugirte Calotte τ' durch den Mittelpunkt μ gehen, also sich verwandeln in C_μ. Man erhält also:

$$(\sigma,\ G) = (\sigma,\ C_\mu),$$

d. i.

(21.) $$\omega_\sigma = \zeta,$$

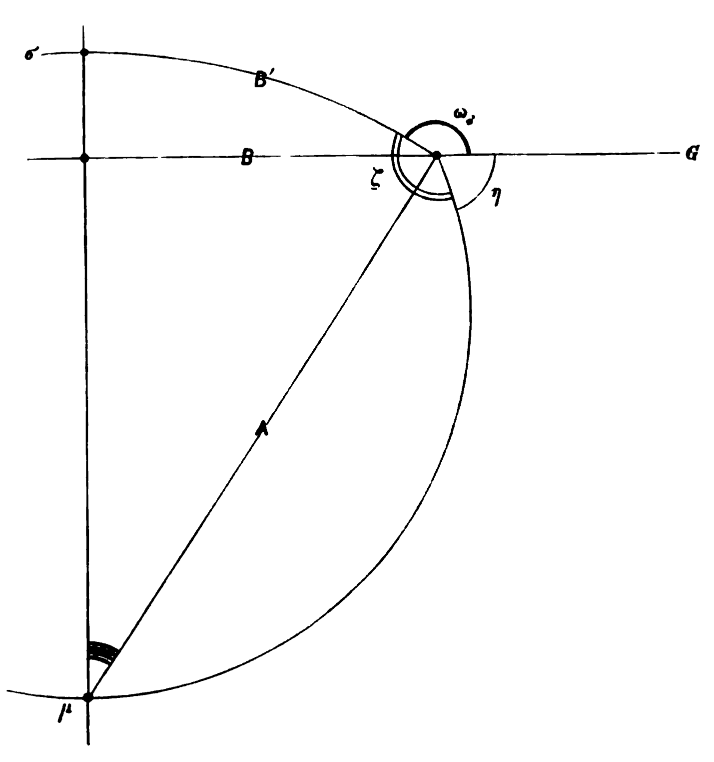


Fig. 10.

wo ζ den in der nebenstehenden Figur angegebenen Winkel bezeichnet. Gleichzeitig folgt aus dieser Figur:

$$\eta = 2\pi - (\omega_\sigma + \zeta),$$

also mit Rücksicht auf (21.):

(22.) $$\eta = 2\pi - 2\omega_\sigma.$$

Solches vorangeschickt, gehen wir zurück zu den Formeln (16.), (18.), Seite 428, welche lauten:

(23.) $$F_\xi = \tfrac{1}{2} C \left\{ \underset{(0\,..\,\pi)}{\text{Arctg}} \left(\frac{\mathsf{B}}{\Pi \cos \frac{1}{2}[\omega]}\right) + \frac{\Pi'}{\Pi} \underset{(0\,..\,\pi)}{\text{Arctg}} \left(\frac{\mathsf{B}}{\Pi' \cos \frac{1}{2}[\omega']}\right)\right\},$$

(24.) $$\overline{F} = \tfrac{1}{2} C\pi,$$

wo das überstrichene $\overline{F}$ den Werth von F *auf* der gegebenen Calotte σ bezeichnet.

Das Potential F für einen unendlich fernen Punkt ξ. — Lassen wir den Punkt ξ *ins Unendliche gehen*, so wandert der conjugirte Punkt ξ' nach dem Mittelpunkt μ der Calotte σ. Und gleichzeitig nehmen alsdann die Parameter Π und Π' dieser Punkte die Werthe an*):

$$\Pi = (\mu\xi), \qquad \Pi' = \mathsf{A},$$

wo A den Radius der Calotte σ vorstellt; sodass also die Formel (23.) übergeht in:

(24. a) $$F_\xi = \tfrac{1}{2} C \left\{ \underset{(0\,..\,\pi)}{\mathrm{Arctg}} \left(\frac{\mathsf{B}}{(\mu\xi) \cos \frac{1}{2}[\omega]} \right) + \frac{\mathsf{A}}{(\mu\xi)} \underset{(0\,..\,\pi)}{\mathrm{Arctg}} \left(\frac{\mathsf{B}}{\mathsf{A} \cos \frac{1}{2}[\omega']} \right) \right\}.$$

Da ξ in unendlicher Ferne sich befindet, und ξ' in μ liegt, so ergeben sich für $[\omega]$ und $[\omega']$ die Werthe:

$$[\omega] = 0, \qquad [\omega'] = -\eta,$$

wo η den in der vorstehenden Figur angegebenen Winkel bezeichnet [vgl. etwa (II.), (II. a), (III.) Seite 423]; und hieraus folgt mit Rücksicht auf (22.):

$$\tfrac{1}{2}[\omega] = 0, \qquad \tfrac{1}{2}[\omega'] = \omega_\sigma - \pi;$$

sodass also die Formel (24. a) folgende Gestalt erhält:

(25.) $$F_\xi = \tfrac{1}{2} C \left\{ \underset{(0\,..\,\pi)}{\mathrm{Arctg}} \left(\frac{\mathsf{B}}{(\mu\xi)} \right) + \frac{\mathsf{A}}{(\mu\xi)} \underset{(0\,..\,\pi)}{\mathrm{Arctg}} \left(-\frac{\mathsf{B}}{\mathsf{A} \cos \omega_\sigma} \right) \right\}.$$

Hier ist, was das *erste Glied* betrifft, $(\mu\xi) = \infty$, mithin $\frac{\mathsf{B}}{(\mu\xi)}$ unendlich klein, und also:

$$\underset{(0\,..\,\pi)}{\mathrm{Arctg}} \left(\frac{\mathsf{B}}{(\mu\xi)} \right) = \frac{\mathsf{B}}{(\mu\xi)}.$$

Was ferner das *zweite Glied* betrifft, so ist nach der vorstehenden Figur: $\mathsf{B} = \mathsf{A} \sin\mu$, wo μ den beim Punkte μ markirten Winkel bezeichnet. Dieser Winkel ist aber supplementar zum Winkel ω_σ (weil ihre Schenkel auf einander senkrecht stehen). Folglich ist:

(25. a) $$\mathsf{B} = \mathsf{A} \sin \omega_\sigma,$$

folglich:

$$-\frac{\mathsf{B}}{\mathsf{A} \cos \omega_\sigma} = -\operatorname{tg} \omega_\sigma = \operatorname{tg} (\pi - \omega_\sigma),$$

*) Vgl. die Definition des Parameters Seite 369.

also mit Rücksicht auf die kurz vor (19.) getroffene Festsetzung*):

$$\underset{(0\,..\,\pi)}{\mathrm{Arctg}}\left(-\frac{\mathsf{B}}{\mathsf{A}\cos\omega_\sigma}\right) = \pi - \omega_\sigma .$$

Somit ergiebt sich aus (25.):

(26.) $$F_\xi = \tfrac{1}{2} C \left\{\frac{\mathsf{B}}{(\mu\,\xi)} + \frac{\mathsf{A}(\pi - \omega_\sigma)}{(\mu\,\xi)}\right\},$$

oder, falls man den *sphärischen Radius der gegebenen Calotte* σ mit B' bezeichnet, und beachtet, dass dieser Radius $\mathsf{B}' = \mathsf{A}(\pi - \omega_\sigma)$ ist:

(27.) $$F_\xi = \frac{\tfrac{1}{2} C\,(\mathsf{B} + \mathsf{B}')}{(\mu\,\xi)} .$$

Diese Formel repräsentirt also den Werth des Potentials F_ξ *für einen unendlich fernen Punkt* ξ. *Und aus dieser Formel folgt sofort, dass die auf der gegebenen Calotte* σ *vorhandene Elektricitätsmenge* M *den Werth hat:*

(28.) $$M = \tfrac{1}{2} C\,(\mathsf{B} + \mathsf{B}') .$$

Gleichzeitig ist nach (24.):

(29.) $$\overline{F} = \tfrac{1}{2} C \pi ,$$

wo $\overline{F}$ *den constanten Werth von* F *auf der gegebenen Calotte vorstellt.* Aus (28.) und (29.) ergiebt sich durch Elimination der Constante C folgendes

Resultat. — Denkt man sich *eine isolirte Kugelcalotte mit einer gegebenen Elektricitätsmenge* M *geladen, so wird der constante Werth* $\overline{F}$, *welchen das elektrische Potential, nach Eintritt des Gleichgewichtszustandes, in allen Punkten der Calotte besitzt, zu jener Menge* M *in der Beziehung stehen:*

(30.) $$\overline{F} = \frac{\pi M}{\mathsf{B} + \mathsf{B}'} ,$$

wo B' *den sphärischen Radius der Calotte vorstellt, während* B *den Radius ihres Grundkreises* (d. i. ihres Randes) *bezeichnet.*

Specialfall der Kreisfläche. — In diesem Fall wird offenbar $\mathsf{B}' = \mathsf{B}$, sodass die Formeln (28.), (29.) die Gestalt annehmen:

(α.) $$M = C\mathsf{B} ,$$

(β.) $$\overline{F} = \tfrac{1}{2} C \pi .$$

Dies ist in vollem Einklang mit den Formeln (1.a), (1.b) Seite 412,

---

*) nach welcher ω_σ zwischen 0 und π liegen soll.

falls man nur beachtet, dass das gegenwärtige $\overline{F}$ dort mit F_0 bezeichnet ist.

Specialfall der ganzen Kugelfläche. — In diesem Fall ist offenbar $\mathsf{B} = 0$, und $\mathsf{B}' = \mathsf{A}\pi$, falls nämlich A den Radius der Kugelfläche vorstellt. Somit folgt aus (28.), (29.):

$$M = \tfrac{1}{2} C \mathsf{A} \pi, \tag{γ.}$$

$$\overline{F} = \tfrac{1}{2} C \pi, \tag{δ.}$$

mithin

$$\overline{F} = \frac{M}{\mathsf{A}}, \tag{ε.}$$

was mit bekannten Sätzen im Einklang steht.

§ 8.

Fortsetzung. Die Dichtigkeit der auf der Calotte vorhandenen Elektricität.

Es sei (ab) ein unendlich kleines, zur gegebenen Calotte σ senkrechtes, und von dieser halbirtes Linienelement, von solcher Lage, dass die Richtung von a nach b diejenige ist, in welcher die Inclination ω *wächst*. Bezeichnet man diese Richtung ab mit n, so ergiebt sich für die elektrische Dichtigkeit D die Formel:

$$4\pi D = \frac{\partial(F_a - F_b)}{\partial n},$$

d. i.

$$4\pi D = \frac{\partial(F_a - F_b)}{\partial \omega} \frac{d\omega}{dn},$$

wo $\frac{d\omega}{dn}$ einen *positiven* Werth hat, weil ω in der Richtung n *wächst*. Mit Rücksicht hierauf folgt aber aus (7.) Seite 372:

$$\frac{d\omega}{dn} = \frac{1 - 2\lambda \cos\omega_\sigma + \lambda^2}{2\mathsf{B}\lambda};$$

so dass sich also ergiebt:

$$D = (F'_a - F'_b) \frac{1 - 2\lambda \cos\omega_\sigma + \lambda^2}{8\pi\mathsf{B}\lambda}, \tag{31.}$$

wo F'_a und F'_b die partiellen Ableitungen von F_a und F_b nach ω vorstellen.

Um zunächst im Allgemeinen F', d. i. die Ableitung von F nach ω zu finden, müssen wir zurückgehen zur Formel (17.) Seite 428. Diese besitzt bei Einführung geeigneter Abkürzungen die Gestalt:

$$(32.)\qquad F = \tfrac{1}{2}C\left\{\underset{(0\,..\,\pi)}{\operatorname{Arctg}}\left(\frac{\sqrt{\varphi}}{U}\right) + \sqrt{\frac{\varphi}{\psi}}\,\underset{(0\,..\,\pi)}{\operatorname{Arctg}}\left(\frac{\sqrt{\psi}}{V}\right)\right\},$$

und giebt also, falls man partiell nach ω differenzirt, und diese partiellen Ableitungen stets durch Accente andeutet:

$$(33.)\qquad F' = \tfrac{1}{2}C\left\{\frac{U\varphi' - 2\varphi U'}{2(U^2+\varphi)\sqrt{\varphi}} + \sqrt{\frac{\varphi}{\psi}}\,\frac{V\psi' - 2\psi V'}{2(V^2+\psi)\sqrt{\psi}} + \tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{\psi}{\varphi}}\,\frac{\psi\varphi' - \varphi\psi'}{\psi^2}\,\underset{(0\,..\,\pi)}{\operatorname{Arctg}}\left(\frac{\sqrt{\psi}}{V}\right)\right\}.$$

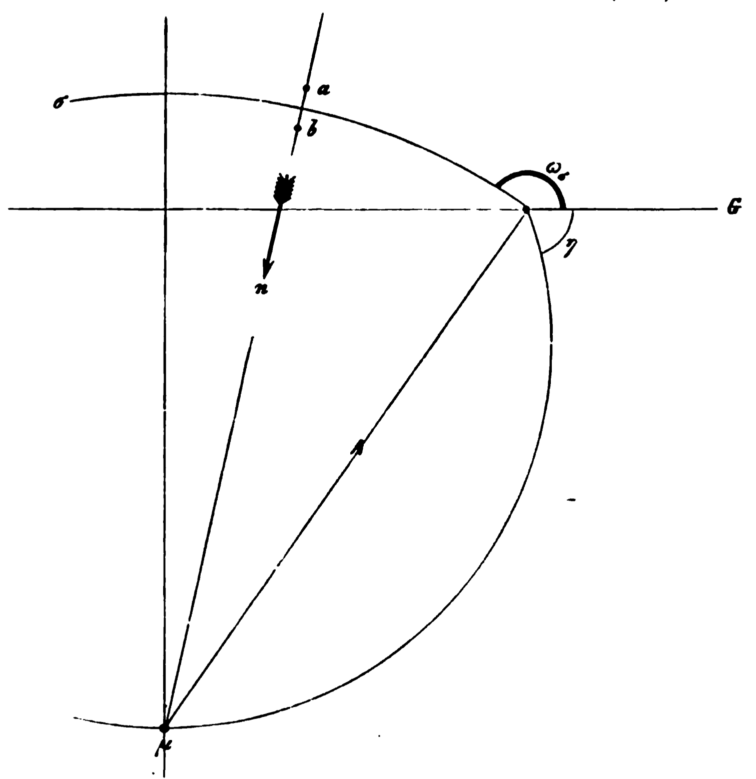


Fig. 9 b.

Dabei haben φ, ψ, φ', ψ' die Werthe:

$$(34.)\qquad \begin{aligned} \varphi &= \frac{1 - 2\lambda\cos\omega + \lambda^2}{4\lambda}, & \varphi' &= \tfrac{1}{2}\sin\omega, \\ \psi &= \frac{1 - 2\lambda\cos(\omega - 2\omega_\sigma) + \lambda^2}{4\lambda}, & \psi' &= \tfrac{1}{2}\sin(\omega - 2\omega_\sigma), \end{aligned}$$

und ferner U, V, U', V' folgende Werthe:

$$(35.)\qquad \begin{aligned} U &= \cos\tfrac{1}{2}[\omega], & U' &= -\tfrac{1}{2}\sin\tfrac{1}{2}[\omega], \\ V &= \cos\tfrac{1}{2}[\omega - 2\omega_\sigma], \ ^{*)} & V' &= -\tfrac{1}{2}\sin\tfrac{1}{2}[\omega - 2\omega_\sigma]. \end{aligned}$$

*) Es ist nämlich nach (XIV.) Seite 426: $[2\omega_\sigma - \omega] = -[\omega - 2\omega_\sigma]$.

Auf der gegebenen Calotte, d. i. für $\omega = \omega_\sigma$, nehmen die Functionen φ, ψ, φ', ψ' folgende Werthe an:

(gültig im Punkte a wie auch im Punkte b)

$$(36.) \qquad \varphi = \psi = \frac{1 - 2\lambda \cos \omega_\sigma + \lambda^2}{4\lambda}, \qquad \varphi' = -\psi' = \tfrac{1}{2} \sin \omega_\sigma,$$

und zwar gelten diese Formeln auf *beiden* Seiten der Calotte, d. i. sowohl für den Punkt a, wie auch für den Punkt b.

Hingegen haben die mit $[\omega]$ und $[\omega - 2\omega_\sigma]$ behafteten Functionen U, V, U', V' in je zwei solchen Punkten a und b *entgegengesetzte* Werthe, wie solches aus unseren früheren Betrachtungen [vgl. namentlich (XVI.) Seite 426] unmittelbar folgt. Um zunächst die Werthe dieser Functionen im Punkte a zu finden, wollen wir (ebenso wie früher, Seite 429) festsetzen, dass ω_σ zwischen 0 und π liegen soll. Alsdann gelten die schon damals notirten Relationen:

$$(37.\alpha) \qquad 0 \quad < \quad \omega_\sigma \quad < \omega_\mu = 2\omega_\sigma < \quad 2\pi.$$

Auch mögen ebenso wie damals die diesen vier Inclinationswerthen entsprechenden Calotten hinzugefügt werden:

$$(37.\beta) \qquad G, \qquad \sigma, \qquad C_\mu, \qquad G.$$

Solches festgesetzt ist offenbar die dem Punkte a entsprechende Grösse $[\omega] = \omega_\sigma$, (vgl. die Figur Seite 434). Um ferner die diesem Punkt a entsprechende Grösse $[\omega - 2\omega_\sigma]$ zu finden, haben wir zunächst diejenige Calotte zu construiren, für welche die Function $\omega - 2\omega_\sigma$ ein ganzes Vielfaches von 2π wird; — dies ist offenbar die Calotte C_μ. Sodann haben wir von irgend einem Punkte dieser Calotte aus eine Curve nach dem Punkte a zu legen, jedoch so, dass die gegebene Calotte σ von der Curve *nicht* geschnitten wird. Endlich haben wir denjenigen Zuwachs zu beobachten, welchen die Function $\omega - 2\omega_\sigma$ bei Durchlaufung dieser Curve erfährt. Dieser Zuwachs repräsentirt alsdann die dem Punkte a zugehörige Grösse $[\omega - 2\omega_\sigma]$. Verfährt man nach dieser Regel, indem man dabei hinblickt auf die Figur Seite 434, so erhält man für die in Rede stehende Grösse den Werth $\eta + \omega_\sigma$. Es ist also mit Rücksicht auf (22.):

$$\text{für den Punkt } a: \begin{cases} [\omega] = \omega_\sigma, \\ [\omega - 2\omega_\sigma] = \eta + \omega_\sigma = 2\pi - \omega_\sigma. \end{cases}$$

Substituirt man aber diese Werthe in (35.), so ergiebt sich

(im Punkte a)

(38. a) $$U = - V = \cos \tfrac{1}{2}\omega_\sigma, \qquad U' = V' = -\tfrac{1}{2} \sin \tfrac{1}{2}\omega_\sigma.$$

Im Punkte b sind, wie schon bemerkt wurde, die *entgegengesetzten* Werthe vorhanden. Also

(im Punkte b)

(38. b) $$U = - V = - \cos \tfrac{1}{2}\omega_\sigma, \qquad U' = V' = \tfrac{1}{2} \sin \tfrac{1}{2}\omega_\sigma.$$

Um nun schliesslich F'_a, F'_b zu erhalten, sind die Werthe (36.) und (38. a, b) in (33.) zu substituiren. Um näher hierauf einzugehen, bemerken wir, dass nach (36.), (38. a, b) sowohl für a wie auch für b die Relationen stattfinden:

$$\psi = \varphi, \qquad \psi' = -\varphi',$$
$$V = -U, \qquad V' = U',$$

so dass wir also ψ, ψ' und V, V' eliminiren können. Die in solcher Weise aus (33.) entstehende Formel lautet:

$$F' = \tfrac{1}{2} C \left\{ \frac{U\varphi' - 2\varphi U'}{(U^2 + \varphi)\sqrt{\varphi}} + \frac{\varphi'}{\varphi} \underset{(0\,.\,.\,\pi)}{\mathrm{Arctg}} \left(- \frac{\sqrt{\varphi}}{U} \right) \right\}.$$

Substituirt man endlich hier die aus (36.), (38. a) speciell für den Punkt a sich ergebenden Werthe:

$$U\varphi' - 2\varphi U' = \frac{(1+\lambda)^2}{4\lambda} \sin \tfrac{1}{2}\omega_\sigma,$$

$$U^2 + \varphi = \frac{(1+\lambda)^2}{4\lambda},$$

$$\frac{U\varphi' - 2\varphi U'}{U^2 + \varphi} = \sin \tfrac{1}{2}\omega_\sigma,$$

so erhält man:

$$F'_a = \tfrac{1}{2} C \left\{ \frac{\sin \frac{1}{2}\omega_\sigma}{\sqrt{\varphi}} + \frac{\varphi'}{\varphi} \underset{(0\,.\,.\,\pi)}{\mathrm{Arctg}} \left(- \frac{\sqrt{\varphi}}{U} \right) \right\};$$

und hieraus folgt mit abermaliger Rücksicht auf (36.), (38. a):

(39.) $$F'_a = \tfrac{1}{2} C \left\{ \frac{2\sqrt{\lambda}\,.\,\sin \frac{1}{2}\omega_\sigma}{\sqrt{1 - 2\lambda\cos\omega_\sigma + \lambda^2}} + \frac{2\lambda \sin\omega_\sigma}{1 - 2\lambda\cos\omega_\sigma + \lambda^2} \underset{(0\,.\,.\,\pi)}{\mathrm{Arctg}} \left(\frac{\sqrt{1 - 2\lambda\cos\omega_\sigma + \lambda^2}}{-2\sqrt{\lambda}\,.\,\cos\frac{1}{2}\omega_\sigma} \right) \right\}.$$

Auch übersieht man leicht, das für F'_b derselbe Ausdruck sich ergiebt, nur mit dem Unterschiede, dass statt der Grössen $\sin \frac{1}{2}\omega_\sigma$ und $\cos \frac{1}{2}\omega_\sigma$ die *entgegengesetzten* Grössen: $-\sin \frac{1}{2}\omega_\sigma$ und $-\cos \frac{1}{2}\omega_\sigma$ eintreten. Demgemäss kann man schreiben:

(40.) $$F'_a = L + M \underset{(0\,.\,.\,\pi)}{\mathrm{Arctg}} (N),$$

(41.) $$F'_b = -L + M \underset{(0\,.\,.\,\pi)}{\mathrm{Arctg}} (-N).$$

Hieraus folgt:

$$F'_a - F_b = 2L + M\left[\underset{(0\,..\,\pi)}{\text{Arctg}}\,(N) - \underset{(0\,..\,\pi)}{\text{Arctg}}\,(-N)\right],$$

oder, was dasselbe (vgl. die Note Seite 415):

$$F'_a - F'_b = 2L + M\left[\pi - 2\underset{(0\,..\,\pi)}{\text{Arctg}}\,(-N)\right],$$

$$= 2L + 2M\left[\frac{\pi}{2} - \underset{(0\,..\,\pi)}{\text{Arctg}}\,(-N)\right],$$

oder, falls man für L, M ihre aus (39.), (40.) ersichtlichen Werthe substituirt, und die Wurzelgrösse $\sqrt{1 - 2\lambda\cos\omega_\sigma + \lambda^2}$ für den Augenblick $= \varrho$ setzt:

$$(42.)\quad F'_a - F'_b = C\left\{\frac{2\sqrt{\lambda}\,.\,\sin\frac{1}{2}\omega_\sigma}{\varrho} + \frac{2\lambda\sin\omega_\sigma}{\varrho\varrho}\left[\frac{\pi}{2} - \underset{(0\,..\,\pi)}{\text{Arctg}}\left(\frac{\varrho}{2\sqrt{\lambda}\,.\,\cos\frac{1}{2}\omega_\sigma}\right)\right]\right\}.$$

Substituirt man diesen Werth in (31.), so erhält man die gesuchte *elektrische Dichtigkeit:*

$$(43.)\quad D = \frac{C}{2\pi}\left\{\frac{\varrho\sin\frac{1}{2}\omega_\sigma}{2B\sqrt{\lambda}} + \frac{\sin\omega_\sigma}{2B}\left[\frac{\pi}{2} - \underset{(0\,..\,\pi)}{\text{Arctg}}\left(\frac{\varrho}{2\sqrt{\lambda}\,.\,\cos\frac{1}{2}\omega_\sigma}\right)\right]\right\},$$

$$\text{wo } \varrho = \sqrt{1 - 2\lambda\cos\omega_\sigma + \lambda^2}.$$

Beseitigung einer gewissen Einschränkung. — Die gegebene Calotte σ wird, falls man ihre Inclination ω_σ einmal $= \frac{1}{2}\pi$, das andere Mal $= \frac{3}{2}\pi$ macht, in beiden Fällen eine Halbkugel sein. Ist überhaupt irgend ein *positiver ächter Bruch* ϑ gegeben, so wird man (abgesehen von der verschiedenen Lage) ein und dieselbe Calotte erhalten, einerlei ob man $\omega_\sigma = \vartheta\pi$ oder $= 2\pi - \vartheta\pi$ setzt. Ja noch mehr: man erhält (der Gestalt nach) ein und dieselbe Calotte für alle ω_σ von der Form:

(A.) $\qquad \omega_\sigma = N\,.\,2\pi \pm \vartheta\pi, \qquad$ (ϑ ein pos. ächter Bruch)

wo N eine willkürlich variirende (bald positive, bald negative) ganze Zahl sein soll. Will man aber die Formel (43.) auf die Calotte anwenden, so darf man für ω_σ nicht diesen *allgemeinen* Werth nehmen, sondern ist gezwungen, sich des *speciellern* Werthes

(S.) $\qquad \omega_\sigma = \vartheta\pi \qquad$ (ϑ ein pos. ächter Bruch)

zu bedienen. Denn nach unserer [kurz vor (37. α) gemachten] Voraussetzung soll ja ω_σ stets zwischen 0 und π liegen.

Nun bemerkt man einerseits, dass die Functionen

$$\sin\omega_\sigma, \qquad \sin\tfrac{1}{2}\omega_\sigma, \qquad \cos\tfrac{1}{2}\omega_\sigma$$

für das *specielle* Argument (*S.*) sämmtlich *positiv* sind, und andererseits, dass diese Functionen für das *allgemeine* Argument (A.) Werthe annehmen, die sich von jenen positiven für das specielle Argument (S.) geltenden Werthen nur durch ein anderes Vorzeichen unterscheiden können. *Folglich wird man die Formel* (43.) *ganz unumschränkt, nämlich auf das allgemeine Argument* (A.) *in Anwendung bringen können, falls man nur in ihr statt* sin *und* cos *substituirt* abs sin *und* abs cos. — Wir gelangen somit zu folgendem

Resultat. — *Denkt man sich eine Calotte, deren Inclination* ω_σ *beliebig gegeben ist, isolirt und mit irgend welcher Elektricitätsmenge geladen, so wird die nach Eintritt des Gleichgewichtszustandes vorhandene elektrische Dichtigkeit D für jeden auf der Calotte gelegenen Punkt* (λ, ω_σ, φ, Π) *dargestellt sein durch die Formel:*

$$(44.)\quad D = \frac{C}{2\pi}\left\{\frac{\varrho\,.\,\text{abs}\sin\frac{1}{2}\omega_\sigma}{2\mathsf{B}\sqrt{\lambda}} + \frac{\text{abs}\sin\omega_\sigma}{2\mathsf{B}}\left[\frac{\pi}{2} - \underset{(0\,..\,\pi)}{\text{Arctg}}\left(\frac{\varrho}{2\sqrt{\lambda}\,.\,\text{abs}\cos\frac{1}{2}\omega_\sigma}\right)\right]\right\},$$

$$\text{wo } \varrho = \sqrt{1 - 2\lambda\cos\omega_\sigma + \lambda^2}.$$

Hier ist B *der Radius des Grundkreises, und C eine Constante, welche abhängt von der der Calotte zuertheilten Elektricitätsmenge.*

Die in dieser Formel (44.) *enthaltene Inclination* ω_σ *kann beliebig gegeben sein, also unbestimmt sein bis auf Vielfache von* 2π.

Beachtet man, dass die Coordinate λ zum Parameter Π in der Beziehung steht [vgl. (14.) Seite 373]:

$$\Pi = \frac{2\mathsf{B}\sqrt{\lambda}}{\varrho},$$

und dass ferner der Radius B des Grundkreises zum Radius A der Calotte in der Beziehung steht [vgl. (25. a) Seite 431]:

$$\mathsf{B} = \mathsf{A}\,.\,\text{abs}\sin\omega_\sigma,$$

so kann man die Formel (44.) auch so schreiben:

$$(45.)\quad D = \frac{C}{2\pi}\left\{\frac{\text{abs}\sin\frac{1}{2}\omega_\sigma}{\Pi} + \frac{\text{abs}\sin\omega_\sigma}{2\mathsf{B}}\left[\frac{\pi}{2} - \underset{(0\,..\,\pi)}{\text{Arctg}}\left(\frac{\mathsf{B}}{\Pi\,.\,\text{abs}\cos\frac{1}{2}\omega_\sigma}\right)\right]\right\},$$

oder auch so:

$$(46.)\quad D = \frac{C}{2\pi}\left\{\frac{\text{abs}\sin\frac{1}{2}\omega_\sigma}{\Pi} + \frac{1}{2\mathsf{A}}\left[\frac{\pi}{2} - \underset{(0\,..\,\pi)}{\text{Arctg}}\left(\frac{\mathsf{B}}{\Pi\,.\,\text{abs}\cos\frac{1}{2}\omega_\sigma}\right)\right]\right\}.$$

Bei all' diesen Formeln (44.), (45.), (46.) sind in Betreff der Constanten *C* im Auge zu behalten die Relationen (28.), (29.):

(47.) $$M = \tfrac{1}{2} C (\mathsf{B} + \mathsf{B}'),$$

(48.) $$\overline{F} = \tfrac{1}{2} C\pi.$$

Specialfall der Kreisfläche. — Für diese wird $\omega_\sigma = \pi$, und $\mathsf{A} = \infty$, also nach (46.):

(α.) $$D = \frac{C}{2\pi} \frac{1}{\Pi};$$

ferner $M = C\mathsf{B}$ und $\overline{F} = \tfrac{1}{2} C\pi$ (vgl. Seite 432).

Specialfall der ganzen Kugelfläche. — Für diese wird $\omega_o = 0$ und $\mathsf{B} = 0$, also nach (46.):

(β.) $$D = \frac{C}{2\pi}\left\{0 + \frac{\pi}{4\mathsf{A}}\right\} = \frac{C}{8\mathsf{A}}.$$

Zugleich wird $M = \tfrac{1}{2} C \mathsf{A} \pi$ und $\overline{F} = \tfrac{1}{2} C\pi$ (Seite 433); sodass man also erhält:

(γ.) $$D = \frac{M}{4\pi \mathsf{A}^2},$$

wie *a priori* zu erwarten stand.

§ 9.

Die Green'sche Function und die Green'sche Belegung für eine gegebene Kugelcalotte.

Um die Green'sche Function und die Green'sche Belegung für die gegebene Calotte σ und einen gegebenen Centralpunkt o zu finden, hat man die früher (Seite 403) aufgestellte Regel anzuwenden. Man hat also um o mit beliebigem Radius Π eine Kugelfläche zu beschreiben, und diejenige Calotte s zu construiren, welche in Bezug auf diese Kugelfläche (o, Π) zur Calotte σ conjugirt ist.

Denkt man sich diese *neue* Calotte s mit derjenigen elektrischen Belegung versehen, welche ohne äussere Kräfte im Gleichgewicht ist, und deren Potential auf s selber $= 1$ ist, so gelten für die Dichtigkeit D_s dieser Belegung und für das von ihr auf einen beliebigen Raumpunkt x ausgeübte Potential F_x, zufolge unserer vorhergehenden Untersuchungen*), die Formeln:

*) Die Gleichung (49.) folgt aus unseren früheren Formeln (16.), (18.) Seite 428, falls man nur beachtet, dass im gegenwärtigen Fall $\overline{F} = 1$ werden soll. Mit Rücksicht hierauf folgt nämlich aus (18.) sofort: $C = \frac{2}{\pi}$. Und dieser



$$(49.)\quad F_x = \frac{1}{\pi}\left\{\underset{(0\,..\,\pi)}{\text{Arctg}}\left(\frac{B}{P_x \,.\, \cos\frac{1}{2}[w_x]}\right) + \frac{P_{x'}}{P_x}\underset{(0\,..\,\pi)}{\text{Arctg}}\left(\frac{B}{P_{x'} \,.\, \cos\frac{1}{2}[w_{x'}]}\right)\right\},$$

$$(50.)\quad D_s = \frac{1}{\pi^2}\left\{\frac{\text{abs}\sin\frac{1}{2}w_s}{P_s} + \frac{\text{abs}\sin w_s}{2B}\left[\frac{\pi}{2} - \underset{(0\,..\,\pi)}{\text{Arctg}}\left(\frac{B}{P_s \,.\, \text{abs}\cos\frac{1}{2}w_s}\right)\right]\right\}.$$

Hier bezeichnet B den Radius des Grundkreises der Calotte s; ferner x' den in Bezug auf s zu x conjugirten Punkt. Gleichzeitig sind w und P die Inclinationen und Parameter der betreffenden Punkte in Bezug auf den Grundkreis der Calotte s.

Ebenso wie, unter Zugrundelegung der Kugelfläche (o, H), s zu σ conjugirt ist, ebenso mag der Raumpunkt x conjugirt sein zu einem mit ξ bezeichneten Punkte. Alsdann ergeben sich, was die *ursprüngliche* Calotte σ betrifft, für die dem Centralpunkte o entsprechende Green'sche Function G^o, sowie für die Dichtigkeit η^o der demselben entsprechenden Green'schen Belegung die Formeln (Seite 403):

$$(51.)\quad G^o_\xi = \frac{1}{(o\,\xi)} F_x\,,$$

$$(52.)\quad \eta^o_\sigma = \frac{H^2}{(o\,\sigma)^3} D_s\,.$$

Es handelt sich nun darum, mittelst dieser Formeln G^o_ξ und η^o_σ darzustellen als Functionen der Punkte o, ξ und σ*), resp. ihrer Coordinaten.

Zu diesem Zweck mögen zunächst die schon eingeführten Bezeichnungen vervollständigt werden durch die Tafel:

(53.)

ξ	σ	ξ'
	$(o,\ H)$	.
x	s	x'

Werth von C ist also in (16.) zu substituiren. — Sodann ergiebt sich die Gleichung (50.) aus unserer früheren Formel (45.) Seite 438, indem man wiederum $C = \frac{2}{\pi}$ setzt.

*) Es bedarf wohl kaum der Erwähnung, dass wir die Buchstaben σ und s hier in *doppelter* Weise verwenden, indem wir darunter bald die *Calotten* selber, bald *Punkte* auf diesen Calotten verstehen.

vgl. Seite 393. Es kann alsdann ξ' nach Belieben definirt werden entweder als derjenige Punkt, welcher zu ξ conjugirt ist in Bezug auf die Calotte σ, oder auch als derjenige, welcher zu x' conjugirt ist in Bezug auf die Kugelfläche (o, H). Gleichzeitig mögen die peripolaren Coordinaten der Punkte o, ξ, ξ', σ in Bezug auf den Grundkreis der *gegebenen Calotte* σ mit

$$\lambda, \quad \omega, \quad \varphi, \quad \Pi,$$

und die peripolaren Coordinaten der Punkte o, x, x', s in Bezug auf den Grundkreis der *Hülfscalotte* s mit

$$l, \quad w, \quad v, \quad P$$

bezeichnet sein. Dabei mag, was die Rechnung der Inclinationen ω und w betrifft, festgehalten werden an der auf Seite 382 festgesetzten Regel. Als *obere* Seiten der den beiden Calotten s und σ zugehörigen äussern Grundflächen sollen nämlich entweder die einander *zugekehrten*, oder die von einander *abgewandten* genommen werden.

Alsdann gelten nach (48. b) Seite 384 die Relationen:

(I.) $$w_x \equiv \omega_\xi - \omega_o, \ (\text{mod } 2\pi),$$

(II.) $$w_{x'} \equiv \omega_{\xi'} - \omega_o, \ (\text{mod } 2\pi).$$

Denken wir uns die beiden in Bezug auf die Kugelfläche (o, H) einander conjugirten Punkte x und ξ in *beliebiger Bewegung begriffen, jedoch so, dass x niemals mit der Calotte s, mithin ξ niemals mit der Calotte σ in Berührung kommt*, [vgl. (53.)], so erhalten wir aus (I.) für irgend ein Zeitelement dieser Bewegung folgende Formel:

(I. A) $$d w_x = d(\omega_\xi - \omega_o),$$

wo das frühere Congruenzzeichen ($\equiv$) in ein Gleichheitszeichen ($=$) übergegangen ist, und wo das auf der rechten Seite befindliche ω_o auch gestrichen werden könnte, weil ω_o constant, mithin $d\omega_o = 0$ ist. Und durch Integration dieser Formel über irgend einen *endlichen* Zeitraum der genannten Bewegung ergiebt sich:

(I. B) $$\int_g^x d w_x = \int_\gamma^\xi d(\omega_\xi - \omega_o),$$

falls man nämlich die *Anfangs-* und die *End*positionen der beiden in Bewegung begriffenen Punkte resp. mit g, γ und x, ξ bezeichnet. Der Bequemlichkeit willen mag g gelegen sein auf der äussern Grundfläche der Calotte s, also γ auf der mit σ confinen und durch o



gehenden Calotte*). Alsdann wird offenbar das in der letzten Formel auf der rechten Seite stehende Integral ungeändert bleiben, wenn man den Punkt γ auf dieser Calotte beliebig, z. B. bis zum Punkte o verschiebt. Mit andern Worten: Die in der letzten Formel enthaltenen Integrale werden auch dann noch einander gleich sein, wenn man die Integrationscurve des *linken* Integrals nach wie vor von g nach x, hingegen diejenige des *rechten* Integrals nicht mehr von γ, sondern von o aus nach ξ gehen lässt; falls man nur dabei an der Voraussetzung festhält, *dass die Curve $g \ldots x$ niemals mit der Calotte s, und die Curve $o \ldots \xi$ niemals mit der Calotte σ in Berührung kommen soll.* Unter dieser Voraussetzung erhält man also die Formel:

(I. C) $$\int_g^x d w_x = \int_o^\xi d(\omega_\xi - \omega_o) .$$

Die in diesen Integralen enthaltenen Functionen w_x und $(\omega_\xi - \omega_o)$ stehen in einer bemerkenswerthen Beziehung zu den unteren Integrationsgrenzen g und o. Und zwar besteht diese Beziehung darin, dass die Function w_x sich auf *Null* reduciren würde, sobald x nach g rücken wollte, und dass andererseits die Function $(\omega_\xi - \omega_o)$ ebenfalls zu *Null* werden würde, falls ξ nach o rücken wollte. Nimmt man also Rücksicht auf die Vieldeutigkeit dieser Functionen, so wird zu sagen sein, dass die Function w_x im Punkte g sich auf ein *ganzes Vielfaches* von 2π reducire, und dass Analoges gelte von der Function $(\omega_\xi - \omega_o)$ mit Bezug auf den Punkt o. Demgemäss kann, auf Grund unserer früheren Definitionen (Seite 426, 427), das in der letzten Formel enthaltene Integral *linker* Hand mit $[w_x]$, und das daselbst auftretende Integral *rechter* Hand mit $[\omega_\xi - \omega_o]$ bezeichnet werden; so dass also jene Formel die Gestalt annimmt:

(α.) $$[w_x] = [\omega_\xi - \omega_o] .$$

Ebenso wie diese Formel aus (I.) entstanden ist, ebenso wird offenbar aus (II.) sich folgende Formel ergeben:

(β.) $$[w_{x'}] = [\omega_{\xi'} - \omega_o] ,$$

*) Denn es unterliegt keinem Zweifel, dass diese mit σ *confine* (vgl. die erste Note S. 417), und durch o gehende Calotte diejenige ist, welche in Bezug auf die Kugelfläche (o, H) zur äussern Grundfläche der Calotte s in *Conjunction* steht.

Auch übersieht man sofort, dass die in diesen Formeln (α.), (β.) enthaltenen Grössen $[w_x]$, $[w_{x'}]$ identisch sind mit den schon in (49.) vorkommenden Grössen $[w_x]$, $[w_{x'}]$.

Soll die Bedeutung dieser Grössen kurz recapitulirt werden, so ist zu schreiben*):

$$[w_x] = \int_g^x d w ,$$

$$[w_{x'}] = \int_g^{x'} d w ,$$

und hinzuzufügen, dass g irgend einen Punkt der äussern Grundfläche der Calotte s vorstellt, und die Integrationen hinzuerstrecken sind über zwei von g nach x, resp. nach x' gehende und die Calotte s *nicht* schneidende Curven.

Und soll andererseits die Bedeutung der in (α.), (β.) auf der *rechten* Seite stehenden Grössen recapitulirt werden, so ist zu schreiben**):

$$(\gamma.) \qquad [\omega_\xi - \omega_0] = \int_0^\xi d\omega ,$$

$$(\delta.) \qquad [\omega_{\xi'} - \omega_0] = \int_0^{\xi'} d\omega ,$$

die Integrationen hinerstreckt über zwei von o nach ξ, resp. ξ' gehende und die Calotte σ *nicht* schneidende Curven.

Um über die Werthe der Integrale (γ.), (δ.) eine deutlichere Vorstellung zu gewinnen, construiren wir irgend eine Meridianebene der Calotte σ, welche den Grundkreis derselben in β schneiden mag, beschreiben sodann um β als Mittelpunkt in dieser Meridianebene einen unendlich kleinen Kreis, und bezeichnen diejenigen Punkte, in denen dieser Kreis von der Calotte σ und von den durch die Punkte ξ, ξ', o gehenden confinen Calotten geschnitten wird, resp. mit σ, ξ, ξ', o. Verstehen wir alsdann unter τ denjenigen Winkel $o\beta\xi$, dessen Bogen vom Radius $\beta\sigma$ *nicht* geschnitten, ferner unter η denjenigen Winkel $o\beta\xi'$, dessen Bogen wiederum von jenem Radius

*) Vgl. (I. C) und (α.).

**) Man vergleiche wiederum (I. C) und (α.), und beachte dabei, dass das in (I. C) enthaltene ω_0 gestrichen werden kann. Denn es ist ω_0 *constant*, mithin $d\omega_0 = 0$.

$\beta\sigma$ *nicht* geschnitten wird, so sind offenbar die Integrale (γ.) und (δ.), abgesehen vom Vorzeichen, identisch resp. mit τ und η.

In unserer Figur kann, wie man sofort erkennt, der Radius $\beta\xi'$ bezeichnet werden als das Spiegelbild des Radius $\beta\xi$ in Bezug auf $\beta\sigma$. Bezeichnet man nun ferner das Spiegelbild von $\beta\sigma$ in Bezug auf die Halbirungslinie des Winkels $o\beta\xi$ mit $\beta\sigma'$, so ist, wie leicht

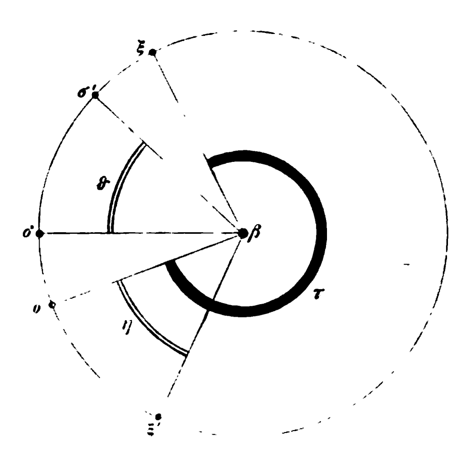


Fig. 11.

zu übersehen, der Winkel η gleichgross mit dem von $o\sigma$ und $o\sigma'$ gebildeten Winkel ϑ. Wir erhalten also:

$$(\varepsilon.)\qquad \int_o^{\xi} d\omega = \pm\,\tau,$$

$$(\zeta.)\qquad \int_o^{\xi'} d\omega = \pm\,\eta = \pm\,\vartheta.$$

Das Wichtige dieser etwas mühsamen Betrachtung besteht in der erreichten *Elimination des auxiliaren Punktes* ξ'. In der That können die Winkel τ und ϑ unmittelbar construirt werden *mittelst der Calotte* σ *und der beiden Punkte* o, ξ.

Durch Zusammennahme der Formeln (α.), (β.), (γ.), (δ.), (ε.), (ζ.) folgt sofort:

$$(\text{III.})\qquad [w_x] = \pm\,\tau,$$

$$(\text{IV.})\qquad [w_{x'}] = \pm\,\vartheta.$$

Ferner ist nach (36.), (38.) Seite 381 und (57. a) Seite 387:

$$H^2 = P_o \Pi_o\,,$$

$$B = \frac{\mathsf{B}\, P_o}{\Pi_o}\,,$$

$$P_x = \frac{\Pi_\xi\, P_o}{(\xi o)}\,,$$

wo B und B die Radien der Grundkreise der Calotten σ und s vorstellen. Hieraus folgt durch Division:

(V.) $$\frac{H^2}{B} = \frac{\Pi_o^2}{\mathsf{B}}\,,$$

(VI.) $$\frac{H^2}{P_x} = \frac{\Pi_o\,(\xi o)}{\Pi_\xi}\,,$$

(VII.) $$\frac{B}{P_x} = \frac{\mathsf{B}\,(\xi o)}{\Pi_\xi\,\Pi_o}\,, \quad \text{mithin auch:} \quad \frac{B}{P_{x'}} = \frac{\mathsf{B}\,(\xi' o)}{\Pi_{\xi'}\,\Pi_o}\,.$$

Und endlich folgt aus den beiden Formeln (VII.):

(VIII.) $$\frac{P_{x'}}{P_x} = \frac{\Pi_{\xi'}}{\Pi_\xi}\,\frac{(\xi o)}{(\xi' o)}\,.$$

Dies vorausgeschickt, ergiebt sich aus (49.), (51.) mit Benutzung der Relationen (III.), (IV.) und (VII.), (VIII.):

(54.) $$G_\xi^o = \frac{1}{\pi\,(o\,\xi)}\left\{\underset{(0\,..\,\pi)}{\mathrm{Arctg}}\left(\frac{\mathsf{B}\,(\xi o)}{\Pi_\xi\,\Pi_o\,\cos\frac{1}{2}\tau}\right) + \frac{\Pi_{\xi'}\,(\xi o)}{\Pi_\xi\,(\xi' o)}\underset{(0\,..\,\pi)}{\mathrm{Arctg}}\left(\frac{\mathsf{B}\,(\xi' o)}{\Pi_{\xi'}\,\Pi_o\,\cos\frac{1}{2}\vartheta}\right)\right\};$$

desgleichen ergiebt sich aus (50.), (52.) unter Anwendung der Relationen (I.) und (V.), (VI.), (VII.):

(55.) $$\eta_\sigma^o = \frac{\Pi_o\,.\,\mathrm{abs}\sin\frac{1}{2}\,(\omega_\sigma - \omega_o)}{\pi^2\,.\,\Pi_\sigma\,.\,(\sigma o)^2} + $$
$$+ \frac{\Pi_o^2\,.\,\mathrm{abs}\sin\,(\omega_\sigma - \omega_o)}{2\,\pi^2\,\mathsf{B}\,.\,(\sigma o)^3}\left\{\frac{\pi}{2} - \underset{(0\,..\,\pi)}{\mathrm{Arctg}}\left(\frac{\mathsf{B}\,(\sigma o)}{\Pi_\sigma\Pi_o\,.\,\mathrm{abs}\cos\frac{1}{2}\,(\omega_\sigma - \omega_o)}\right)\right\}.$$

Unsere eigentliche Aufgabe besteht darin, die Grössen G_ξ^o und η_σ^o darzustellen als Functionen der peripolaren Coordinaten der Punkte o, ξ, resp. der Punkte o, σ. Und diese Aufgabe ist für η_σ^o durch die Formel (55.) im Wesentlichen gelöst. Hingegen wird dieselbe für G_ξ^o mittelst der Formel (54.) erst dann absolvirt sein, wenn es uns gelingt, den in ihr enthaltenen auxiliären Punkt ξ' zu beseitigen.

Zu diesem Zweck bemerken wir, dass jene Formel (54.) auch so geschrieben werden kann:

(56.) $$G_\xi^o = \frac{1}{\pi\,(o\,\xi)}\left\{\underset{(0\,..\,\pi)}{\mathrm{Arctg}}\left(\frac{\mathsf{T}}{\cos\frac{1}{2}\tau}\right) + \frac{\mathsf{T}}{\Theta}\underset{(0\,..\,\pi)}{\mathrm{Arctg}}\left(\frac{\Theta}{\cos\frac{1}{2}\vartheta}\right)\right\},$$

wo alsdann T und Θ die Bedeutungen haben:

$$(57.)\qquad T = \frac{B\,(o\,\xi)}{\Pi_o\,\Pi_\xi}, \qquad \Theta = \frac{B\,(o\,\xi')}{\Pi_o\,\Pi_{\xi'}}.$$

Hieraus folgt, indem man für $(o\,\xi)$ und Π_o, Π_ξ ihre Werthe (Seite 372, 373) substituirt:

$$(58.)\qquad T = \frac{\sqrt{(1+\lambda_o^2)(1+\lambda_\xi^2) - (1-\lambda_o^2)(1-\lambda_\xi^2)\cos(\varphi_o - \varphi_\xi) - 4\lambda_o\lambda_\xi\cos(\omega_o - \omega_\xi)}}{2\sqrt{2\lambda_o\lambda_\xi}}.$$

Ein analoger Ausdruck ergiebt sich für Θ. Und dieser verwandelt sich mit Rücksicht auf die zwischen den Punkten ξ' und ξ stattfindenden Relationen*) in folgenden:

$$(59.)\qquad \Theta = \frac{\sqrt{(1+\lambda_o^2)(1+\lambda_\xi^2) - (1-\lambda_o^2)(1-\lambda_\xi^2)\cos(\varphi_o - \varphi_\xi) - 4\lambda_o\lambda_\xi\cos(\omega_o + \omega_\xi - 2\omega_\sigma)}}{2\sqrt{2\lambda_o\lambda_\xi}}.$$

Somit gelangen wir, indem wir in (56.) auch noch $(o\,\xi)$ durch T ersetzen, zu folgendem

Satz über die Green'sche Function. — *Repräsentirt G^o die Green'sche Function einer gegebenen Kugelcalotte σ in Bezug auf einen beliebig gegebenen Centralpunkt o, und soll derjenige Werth G^o_ξ angegeben werden, den diese Function in irgend einem Punkte ξ besitzt, so bezeichne man die Inclination der gegebenen Calotte σ mit ω_σ, ferner den Radius ihres Grundkreises mit* B, *und endlich die diesem Grundkreise entsprechenden peripolaren Coordinaten der Punkte o und ξ resp. mit λ_o, ω_o, φ_o, Π_o und λ_ξ, ω_ξ, φ_ξ, Π_ξ. Alsdann lautet der gesuchte Werth G^o_ξ folgendermassen:*

$$(60.)\qquad G^o_\xi = \frac{B}{\pi\,\Pi_o\Pi_\xi}\left\{\frac{1}{T}\underset{(0\,..\,\pi)}{\mathrm{Arctg}}\left(\frac{T}{\cos\frac{1}{2}\tau}\right) + \frac{1}{\Theta}\underset{(0\,..\,\pi)}{\mathrm{Arctg}}\left(\frac{\Theta}{\cos\frac{1}{2}\vartheta}\right)\right\},$$

wo T, Θ *die in* (58.), (59.) *angegebenen Ausdrücke vorstellen, während τ, ϑ gewisse Winkel bezeichnen, die* (vgl. Seite 444) *in folgender Weise zu construiren sind:*

Man markire denjenigen Punkt β, in welchem irgend eine Meridianebene der Calotte σ vom Grundkreise geschnitten wird, beschreibe

---

*) Diese Relationen sind (vgl. Seite 379):

$$\lambda_{\xi'} = \lambda_\xi,$$
$$\omega_{\xi'} + \omega_\xi \equiv 2\,\omega_\sigma, \quad (\mathrm{mod}\ 2\pi),$$
$$\varphi_{\xi'} \equiv \varphi_\xi, \quad (\mathrm{mod}\ 2\pi).$$

sodann in dieser Ebene um β als Mittelpunkt eine unendlich kleine Kreisperipherie, und bezeichne die Punkte, in denen diese Peripherie von der Calotte σ und von den confinen) durch o und ξ gehenden Calotten geschnitten wird, resp. mit σ, o, ξ. Endlich markire man auf dieser Peripherie noch denjenigen Punkt σ', welcher das Spiegelbild von σ in Bezug auf die Halbirungslinie**) des Winkels $o\beta\xi$ repräsentirt. Die so erhaltenen vier Punkte o, ξ, σ, σ' zerlegen die unendlich kleine Kreisperipherie in eben so viele Bögen. Und zwar wird alsdann derjenige Bogen $(o\xi)$, welcher die Punkte σ, σ' nicht enthält, den Winkel τ, und derjenige Bogen $(\sigma\sigma')$, welcher die Punkte o, ξ nicht enthält, den Winkel ϑ repräsentiren.*

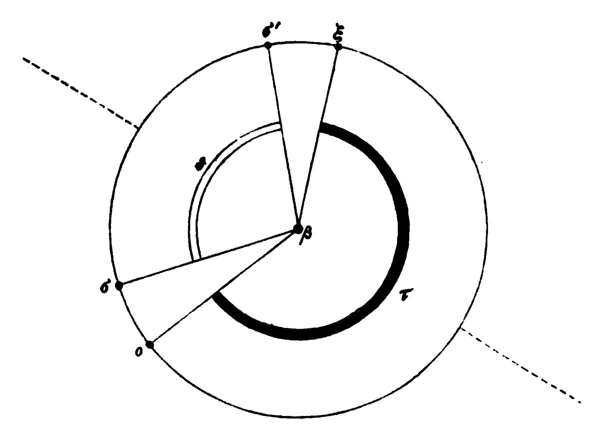


Fig. 12.

Man erkennt hieraus sofort, dass die Function G_ξ^o bei Vertauschung der Punkte o und ξ ungeändert bleibt, wie solches *a priori* zu erwarten stand. — Ferner gelangt man mittelst der Formel (55.) zu folgendem

Satz über die Green'sche Belegung. — *Repräsentirt, was die Calotte σ anbetrifft, η^o die Dichtigkeit der dem gegebenen Centralpunkt o entsprechenden Green'schen Belegung, und soll derjenige Werth η_σ^o angegeben werden, den diese Dichtigkeit in irgend einem Punkte σ der Calotte besitzt, so bezeichne man die peripolaren Coordinaten der Punkte o und σ resp. mit λ_o, ω_o, φ_o, Π_o und λ_σ, ω_σ, φ_σ, Π_σ. Alsdann drückt jener Werth sich folgendermassen aus:*

*) Vgl. die erste Note Seite 417.

**) Diese Halbirungslinie ist in vorstehender Figur *punktirt* angegeben.

$$(61.)\qquad \eta_\sigma^o = \frac{\Pi_o \,.\, \text{abs}\sin\frac{1}{2}(\omega_\sigma - \omega_o)}{\pi^2 \,.\, \Pi_\sigma \,.\, (\sigma o)^2} +$$

$$+ \frac{\Pi_o^2 \,.\, \text{abs}\sin(\omega_\sigma - \omega_o)}{2\pi^2 \mathsf{B} \,.\, (\sigma o)^3}\left\{\frac{\pi}{2} - \underset{(0\,..\,\pi)}{\text{Arctg}}\left(\frac{\mathsf{B}(\sigma o)}{\Pi_\sigma \Pi_o \,.\, \text{abs}\cos\frac{1}{2}(\omega_\sigma - \omega_o)}\right)\right\};$$

hier bedeutet (σo) *den geradlinigen Abstand der beiden Punkte* σ, o, *und hat also zufolge* (57.) *den Werth:*

$$(62.)\qquad (o\sigma) = \frac{\Pi_o \Pi_\sigma \mathsf{T}}{\mathsf{B}},$$

vorausgesetzt, dass man unter T *den Ausdruck* (58.) *versteht, denselben bezogen gedacht auf die Coordinaten* λ_o, ω_o, φ_o *und* λ_σ, ω_σ, φ_σ.

Sowohl hier, wie im vorhergehenden Satz (60.), können die Inclinationen ω_σ, ω_o, ω_ξ *beliebig* gegeben sein, also unbestimmt sein bis auf ganze Vielfache von 2π.

Prüfung der Formel für die Green'sche Function. — Man kann diese Formel prüfen mittelst eines gewissen *allgemeinen Satzes**), nach welchem die Gesammtmasse M^o der dem Punkte o (als Centralpunkt) entsprechenden Green'schen Belegung den Werth haben muss:

$$(\alpha.)\qquad M^o = \frac{F_o}{\overline{F}},$$

wo F, $\overline{F}$ dieselben Bedeutungen haben wie früher (Seite 428). Diesen allgemeinen Satz können wir nämlich *in der Art* zur Prüfung verwenden, dass wir einerseits die Masse M^o mittelst der Formel (60.), andererseits den Quotienten der beiden F mittelst der Formeln (16.), (18.) Seite 428 berechnen, und sodann nachsehen, ob diese beiden Werthe wirklich einander *gleich* sind.

Dabei wollen wir der Bequemlichkeit willen, was die Lage der Calotte σ und des Punktes o betrifft, einen möglichst *concreten* Fall betrachten. Es seien nämlich c und q gegebene Zahlen, die der Relation entsprechen:

$$(\beta.)\qquad 0 < q < c < \pi;$$

und es mag c die Inclination der Calotte σ, andererseits q die Inclination des Punktes o vorstellen. Ferner befinde sich der Punkt ξ in *unendlicher Entfernung;* so dass also die Inclination dieses Punktes

*) Vgl. mein Werk über das *Log. und Newt. Potential* (Teubner, 1877), daselbst Seite 341, (9.).

$= 0$ gesetzt werden darf*). Entwirft man die diesen Verhältnissen entsprechende Figur**), so findet man mittelst der auf Seite 447 angegebenen Construction sofort:

$$(\gamma.)\qquad \tau = q, \qquad \vartheta = 2\pi - 2c + q,$$

mithin:

$$(\delta.)\qquad \cos\tfrac{1}{2}\tau = \cos\tfrac{1}{2}q, \qquad \cos\tfrac{1}{2}\vartheta = -\cos(c - \tfrac{1}{2}q).$$

Ferner ergeben sich, weil ξ *im Unendlichen*, mithin ξ' im räumlichen Mittelpunkt μ der Calotte σ liegt, für T und Θ aus (57.) folgende Werthe:

$$(\varepsilon.)\qquad \mathsf{T} = \frac{\mathsf{B}}{\Pi_o}, \qquad \Theta = \frac{\mathsf{B}\,(o\mu)}{\Pi_o\Pi_\mu} = \frac{\mathsf{B}}{\Pi_{o'}},$$

wo o' den (in Beziehung auf σ) zu o conjugirten Punkt vorstellt***).

Substituirt man nun die Werthe (δ.), (ε.) in die Formel (60.), so folgt:

$$(\zeta.)\qquad G^o_\xi = \frac{1}{\pi\,\Pi_o\Pi_\xi}\left\{\Pi_o \underset{(0\,..\,\pi)}{\mathrm{Arctg}}\left(\frac{\mathsf{B}}{\Pi_o\cos\frac{1}{2}q}\right) + \Pi_{o'} \underset{(0\,..\,\pi)}{\mathrm{Arctg}}\left(\frac{-\mathsf{B}}{\Pi_{o'}\cos(c-\frac{1}{2}q)}\right)\right\}.$$

Nun aber kann diese Function G^o_ξ, ihrer allgemeinen Definition nach, angesehen werden als dasjenige Potential, welches von der dem Punkte o entsprechenden Green'schen Belegung auf ξ ausgeübt wird. Bezeichnet man also die Gesammtmasse dieser Belegung [wie schon in (α.) geschehen] mit M^o, und beachtet man, dass bei unserer gegenwärtigen Betrachtung ξ als *unendlich fern* vorausgesetzt wird, so ergiebt sich sofort:

$$(\eta.)\qquad G^o_\xi = \frac{M^o}{\Pi_\xi};$$

denn Π_ξ kann als offenbar als der *Abstand* jenes unendlich fernen Punktes ξ von der Calotte angesehen werden. Und durch Vergleichung von (ζ.) und (η.) folgt sofort:

$$(\vartheta.)\qquad M^o = \frac{1}{\pi\,\Pi_o}\left\{\Pi_o \underset{(0\,..\,\pi)}{\mathrm{Arctg}}\left(\frac{\mathsf{B}}{\Pi_o\cos\frac{1}{2}q}\right) + \Pi_{o'} \underset{(0\,..\,\pi)}{\mathrm{Arctg}}\left(\frac{-\mathsf{B}}{\Pi_{o'}\cos(c-\frac{1}{2}q)}\right)\right\}.$$

---

*) Sie *könnte* nämlich auch gleich einem ganzen Vielfachen von 2π gesetzt werden.

**) Der Leser wird gebeten, diese Figur wirklich zu zeichnen, wobei Rücksicht zu nehmen auf die in (β.) gemachten concreten Angaben.

***) In (ε.) sind für Θ *zwei* Werthe angegeben. Dabei ist zu bemerken, dass der *zweite* aus dem *ersten* unmittelbar folgt mittelst des Satzes Seite 379, (33.).

Andererseits folgt aus Seite 428 (16.) und (18.), wenn man daselbst den *beliebigen* Punkt ξ mit dem Buchstaben o bezeichnet:

$$(\iota.)\qquad \frac{F_o}{F} = \frac{1}{\pi}\left\{\underset{(0\,..\,\pi)}{\mathrm{Arctg}}\left(\frac{\mathrm{B}}{\Pi_o \cos\frac{1}{2}[\omega_o]}\right) + \frac{\Pi_{o'}}{\Pi_o}\underset{(0\,..\,\pi)}{\mathrm{Arctg}}\left(\frac{\mathrm{B}}{\Pi_{o'}\cos\frac{1}{2}[\omega_{o'}]}\right)\right\};$$

und gleichzeitig ergeben sich im gegenwärtigen *concreten* Fall für die hier auftretenden Winkel und Cosinus die Werthe*):

$$(\varkappa.)\qquad \begin{aligned} [\omega_o] &= q, & [\omega_{o'}] &= 2c - q - 2\pi, \\ \cos\tfrac{1}{2}[\omega_o] &= \cos\tfrac{1}{2}q, & \cos\tfrac{1}{2}[\omega_{o'}] &= -\cos(c - \tfrac{1}{2}q). \end{aligned}$$

Substituirt man aber diese Werthe in (ι.), so wird in der That jener Ausdruck (ι.) *identisch* mit dem Ausdruck (ϑ.); wie nach dem allgemeinen Satz (α.) zu erwarten stand.

§ 10.

Uebertragung der im vorhergehenden §. erhaltenen Resultate auf den Fall der Kugelfläche**).

Allgemeine Betrachtungen. — Denken wir uns für eine *un*geschlossene Fläche und für einen gegebenen Centralpunkt o die *Green'sche Function* G_ξ^o gebildet, so ist dieselbe von bestimmter Bedeutung für *jedweden* Punkt ξ des ganzen unendlichen Raumes. Denn es kann dieselbe definirt werden als dasjenige Potential, welches auf den Punkt ξ ausgeübt wird, von der dem Punkte o entsprechenden *Green'schen Belegung;* während diese Belegung ihrerseits definirt werden kann als diejenige *elektrische* Belegung, welche auf der zur Erde abgeleiteten Fläche inducirt werden würde durch einen in o befindlichen elektrischen Massenpunkt von der Masse (— 1).

Sind die Begriffe in solcher Weise fixirt, so wird offenbar G_ξ^o für jedweden Raumpunkt ξ auch *dann noch* eine bestimmte Bedeutung behalten, wenn man die *un*geschlossene Fläche in eine *geschlossene* sich verwandeln lässt. *Und zwar wird alsdann*, *wie leicht zu über-*

---

*) Dabei wird wiederum vorausgesetzt, dass der Leser die von ihm entworfene Figur zu Rathe zieht.

**) Mit Leichtigkeit könnten wir unsere allgemeinen Formeln [Seite 446, (60.) und (61.)] auch übertragen auf den Specialfall der *Kreisfläche*. Doch würden sich hiebei in jenen Formeln nur so unbedeutende Aenderungen ergeben, dass ein näheres Eingehen auf diesen Fall unnöthig erscheint.

sehen, G_ξ^o *für solche Punkte* ξ, *die von o durch die Fläche getrennt sind*, *identisch werden mit der reciproken Entfernung:*

$$(1.)\qquad T_{o\xi} = \frac{1}{(o\,\xi)}; \qquad *).$$

Um die Richtigkeit dieser allgemeinen Bemerkung an einem einfachen Beispiel zu controliren, wollen wir den für die Green'sche Function einer *Kugelcalotte* erhaltenen Ausdruck (Seite 446) einem näheren Studium unterwerfen, nämlich die Gestalt untersuchen, welche dieser Ausdruck annimmt, sobald man die gegebene Calotte allmählig in eine *volle* Kugelfläche sich verwandeln lässt.

Die Green'sche Function einer Kugelcalotte, respective einer vollen Kugelfläche. — Dabei wollen wir gleich von Anfang annehmen, dass der Radius A der gegebenen Calotte einen *endlichen* Werth habe, dass hingegen der Radius B ihres Grundkreises *unendlich klein* sei. Bei dieser Calotte, die nur noch *unendlich wenig* von einer *vollen* Kugelfläche differirt, sind nun, was die Lage der Punkte o und ξ betrifft, zwei Fälle zu unterscheiden.

---

*) *Beiläufiges Paradoxon.* — Lässt man die betrachtete Fläche um den Punkt o herum sich *schliessen*, so wird die von ξ abhängende Function

$$G_\xi^o - T_{o\xi}$$

für alle Punkte ξ des *ausserhalb der Fläche* liegenden Raumes $\mathfrak{A}$ *gleich Null* sein, hingegen bestimmte von Null verschiedene Werthe besitzen für diejenigen Punkte ξ, welche dem *Innenraum* $\mathfrak{J}$ der Fläche angehören. Gleiches wird daher auch stattfinden, falls man die Fläche nicht vollständig, sondern nur *bis auf eine unendlich kleine Oeffnung* sich schliessen lässt. Und man hat im letztern Fall also zwei durch die unendlich kleine Oeffnung mit einander communicirende Räume $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{J}$, also (mit andern Worten) *einen einzigen zusammenhängenden* Raum, von welchem $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{J}$ Theile sind, und zugleich eine Function

$$G_\xi^o - T_{o\xi},$$

die in dem *einen* Theile dieses Raumes = 0 ist, im *andern* aber nicht. Das aber steht in diametralem Widerspruch mit einem bekannten allgemeinen Satz [vgl. mein Werk über das *Log. u. Newt. Potential* (Teubner 1877), daselbst Seite 9. (18.)].

Doch verschwindet dieser Widerspruch, wenn man das Wort „*unendlich klein*" (was ja stets nur als Abbreviatur dient) eliminirt, und den dahinter verborgenen Thatbestand aufdeckt. Denn alsdann wird zu sagen sein, dass die in Rede stehende Function im Raume $\mathfrak{A}$ Werthe besitzt, die durch Verkleinerung der genannten Oeffnung beliebig nahe an Null herangedrückt werden können, die aber, so lange jene Oeffnung noch nicht völlig verschwunden ist, immer *noch von Null verschieden sein werden*, oder wenigstens von Null verschieden sein *können*. Und diesem Wortlaut gegenüber verschwindet in der That die Anwendbarkeit des citirten allgemeinen Satzes, mithin auch der in Rede stehende Widerspruch.

Erster Fall: *Die beiden Punkte o und ξ liegen auf* ***verschiedenen*** *Seiten der Kugelfläche.* — Alsdann ergeben sich für die im Allgemeinen mit τ und ϑ bezeichneten Winkel unter Anwendung der auf Seite 447 angegebenen Constructionsmethode*) die Werthe:

(2.) $$\tau = 2\pi, \qquad \vartheta = 0,$$

also:

(3.) $$\cos\tfrac{1}{2}\tau = -1, \qquad \cos\tfrac{1}{2}\vartheta = 1.$$

Ferner erhält man für die Ausdrücke T, Θ, Seite 446 (57.), die Werthe:

(4.) $$\mathsf{T} = \frac{\mathsf{B}\,(o\,\xi)}{R_0\,R_\xi}, \qquad \Theta = \frac{\mathsf{B}\,(o\,\xi')}{R_0\,R_{\xi'}},$$

wo die R die Abstände der betreffenden Punkte (o, ξ und ξ') von dem unendlich kleinen Grundkreise bezeichnen.

Aus (3.) und (4.) folgt ziemlich leicht**):

(5.) $$\underset{(0\,..\,\pi)}{\text{Arctg}}\left(\frac{\Theta}{\cos\frac{1}{2}\vartheta}\right) = \underset{(0\,..\,\pi)}{\text{Arctg}}\,(+\Theta) = \Theta,$$

(6.) $$\underset{(0\,..\,\pi)}{\text{Arctg}}\left(\frac{\mathsf{T}}{\cos\frac{1}{2}\tau}\right) = \underset{(0\,..\,\pi)}{\text{Arctg}}\,(-\mathsf{T}) = \pi - \mathsf{T}.$$

Und durch Substitution dieser Werthe (5.), (6.) in die allgemeine Formel Seite 446 (60.) folgt sofort:

(7.) $$G_\xi^0 = \frac{\mathsf{B}}{\pi\,R_0\,R_\xi}\left\{\frac{\pi - \mathsf{T}}{\mathsf{T}} + \frac{\Theta}{\Theta}\right\},$$

(9.) $$\text{d. i.} = \frac{\mathsf{B}}{R_0\,R_\xi}\,\frac{1}{\mathsf{T}},$$

oder, falls man für T seinen Werth (4.) substituirt;

(10.) $$G_\xi^0 = \frac{1}{(o\,\xi)};$$

---

*) Bei Anwendung dieser Methode hat man *allmählig* vorzugehen, nämlich den Radius des Grundkreises zu Anfang *sehr klein* zu nehmen, und sodann erst *verschwinden* zu lassen.

**) Die Grössen T und Θ sind nämlich, wie aus (4.) ersichtlich, mit dem *unendlich kleinen* Factor B (den Radius des unendlich kleinen Grundkreises) behaftet. Somit folgt aus (4.), dass diese Grössen T und Θ beide *positiv* und beide *unendlich klein* sind. Ist aber ε eine *unendlich kleine positive* Grösse, so gelten stets die Formeln:

$$\underset{(0\,..\,\pi)}{\text{Arctg}}\,(\varepsilon) = \varepsilon, \qquad \text{und:}\ \underset{(0\,..\,\pi)}{\text{Arctg}}\,(-\varepsilon) = \pi - \varepsilon,$$

wie solches aus unsern Definitionen [vgl. die Note auf Seite 415] sich leicht ergiebt.

was mit unserer vorangeschickten allgemeinen Betrachtung in vollem Einklang steht, [vgl. (1.)].

Zweiter Fall: *Die Punkte o und ξ liegen auf derselben Seite der Kugelfläche.* — In diesem Fall treten an Stelle der Formeln (2.), (3.) folgende:

$$\tau = 0, \qquad \vartheta = 2\pi,$$

$$\cos \tfrac{1}{2}\tau = 1, \qquad \cos \tfrac{1}{2}\vartheta = -1,$$

wie solches wiederum mittelst unserer allgemeinen Constructionsmethode (Seite 447) sich leicht ergiebt. Hingegen bleiben die Formeln (4.) dieselben. Und man gelangt daher, (was weiter auszuführen überflüssig sein würde) zu folgendem Resultat:

(11.) $$G_\xi^o = \frac{R_{\xi'}}{R_\xi} \frac{1}{(o\xi')};$$

wofür man auch schreiben kann:

(12.) $$G_\xi^o = \frac{R_{o'}}{R_o} \frac{1}{(o'\xi)}. \qquad *)$$

Dabei sind unter den R die Abstände der betreffenden Punkte von dem unendlich kleinen Grundkreise, d. i. von einer *beliebigen Stelle***) der Kugelfläche zu verstehen. Demgemäss ergiebt sich folgender Satz:

*Liegen die Punkte o und ξ beide auf derselben Seite****) *der Kugelfläche, und soll die diesen Punkten entsprechende Green'sche Function G_ξ^o ermittelt werden, so construire man den in Bezug auf die Kugelfläche zu o conjugirten Punkt o', und markire auf der Kugelfläche einen beliebigen Punkt f. Alsdann ist:*

(13.) $$G_\xi^o = \frac{(fo')}{(fo)} \frac{1}{(o'\xi)}; \qquad \dagger)$$

---

*) Bringt man nämlich den Satz Seite 379 (33.) in Anwendung auf den Fall eines *unendlich kleinen* Grundkreises, so gehen daselbst die Π in die R über; und man erhält:

$$\frac{(o\xi')}{R_o\, R_{\xi'}} = \frac{(o'\xi)}{R_{o'}\, R_\xi};$$

und mittelst dieser Gleichung geht die Formel (11.) in (12.) über.

**) Sind nämlich die Kugelfläche und die beiden Punkte o und ξ gegeben, so kann man jene Fläche immer ansehen als eine Kugelcalotte von unendlich kleinem Grundkreis, und hat dabei *freie Wahl* in Betreff der *Stelle*, an welcher man diesen unendlich kleinen Grundkreis auf der gegebenen Kugelfläche sich vorstellen will.

***) Ob dies die *äussere* oder *innere* Seite ist, bleibt gleichgültig.

†) Dass dieser Werth der richtige ist, kann mittelst bekannter Methoden leicht controlirt werden.



wo (wie leicht zu übersehen) der erste Factor $\frac{(fo')}{(fo)}$ *unabhängig ist von der Lage des Punktes Punktes f, nämlich ein und denselben Werth behält, wenn man diesen Punkt f auf der Kugelfläche sich bewegen lässt.*

Die Green'sche Belegung für die Kugelfläche. — Wir denken uns wiederum die Kugelfläche als eine Kugelcalotte von *unendlich kleinem* Grundkreise. Alsdann können die in der allgemeinen Formel Seite 448 (61.) enthaltenen Inclinationen ω_σ und ω_o ebenfalls *unendlich klein* gedacht werden*). Und bei dieser Auffassungsweise ergiebt sich sofort:

$$\text{(14.)}\qquad \begin{aligned} \text{abs}\sin\,(\omega_\sigma - \omega_o) &= \text{abs}\,(\omega_\sigma - \omega_o)\,, \\ \text{abs}\sin\tfrac{1}{2}(\omega_\sigma - \omega_o) &= \tfrac{1}{2}\,\text{abs}\,(\omega_\sigma - \omega_o)\,, \\ \text{abs}\cos\tfrac{1}{2}(\omega_\sigma - \omega_o) &= 1\,. \end{aligned}$$

Da ferner B (der Radius des Grundkreises) unendlich klein ist, so wird in der genannten allgemeinen Formel Seite 448 (61.) das Argument von *Arctg unendlich klein* und zugleich *positiv* sein; so dass also dieser *Arctg* identisch wird mit seinem *Argument.*

Mit Rücksicht auf diese Bemerkungen gewinnt jene allgemeine Formel folgende Gestalt:

$$\text{(15.)}\qquad \eta_\sigma^o = \frac{\Pi_o\,\text{abs}\,(\omega_\sigma - \omega_o)}{2\pi^2\,\Pi_\sigma\,(\sigma o)^2} + \frac{\Pi_o^2\,\text{abs}\,(\omega_\sigma - \omega_o)}{4\pi\,\text{B}\,(\sigma o)^3} - \frac{\Pi\ \ \text{abs}\,(\omega_\sigma - \omega_o)}{2\pi^2\,\Pi_\sigma\,(\sigma o)^2}\,,$$

oder, weil das erste und dritte Glied einander zerstören**), folgende Gestalt:

$$\text{(16.)}\qquad \eta_\sigma^o = \frac{\Pi_o^2}{2\pi\,(\sigma o)^3}\,\frac{\text{abs}\,(\omega_\sigma - \omega_o)}{2\,\text{B}}\,.$$

Offenbar können wir auf der gegebenen Kugelfläche den *Ort*, an welchem wir uns den unendlich kleinen Grundkreis vorstellen

---

*) Jene Inclinationen ω_σ und ω_o sind in jener allgemeinen Formel Seite 448 (61.) unbestimmt bis auf beliebige Vielfache von 2π, und haben also im vorliegenden Fall Werthe von der Form:

$$\omega_\sigma = \varepsilon + M\,.\,2\pi\,,$$
$$\omega_o = \zeta + N\,.\,2\pi\,,$$

wo ε, ζ *unendlich kleine* Grössen, hingegen M, N willkürliche ganze Zahlen sind. Der Bequemlichkeit willen setzen wir aber M und N gleich *Null;* und haben alsdann für jene Inclinationen in der That *unendlich kleine* Werthe.

**) Diese Zerstörung ist eigentlich Luxus. Denn jene Glieder würden, weil sie *unendlich klein* [nämlich mit dem Factor abs $(\omega_\sigma - \omega_o)$ behaftet] sind, auch dann verschwinden, wenn sie einander *nicht* zerstörten.

wollen, *willkürlich* wählen*). Und von dieser Willkür wollen wir Gebrauch machen, um die vorstehende Formel (16.) möglichst zu vereinfachen. Wir legen nämlich durch den Mittelpunkt der Kugelfläche und den Punkt o eine gerade Linie, bezeichnen die beiden Punkte, in denen die Kugelfläche von dieser Linie geschnitten wird, mit a und b, und zwar in solcher Weise, dass $(oa) > (ob)$ ist, und versetzen sodann jenen unendlich kleinen Grundkreis an die Stelle a. Oder genauer ausgedrückt: Wir denken uns den *Mittelpunkt* des Kreises auf der Linie (ao), unendlich nahe an a, und die *Ebene* des Kreises senkrecht gegen die Linie (ao). Alsdann werden die unendlich kleinen Inclinationen ω_σ und ω_o zum unendlich kleinen Radius B jenes Kreises in folgender Beziehung stehen:

$$(ab)\ \omega_\sigma = 2\mathsf{B}\ ,$$

$$(ao)\ \omega_o = 2\mathsf{B}\ ;$$

wie solches aus der geometrischen Anschauung unmittelbar sich ergiebt. Hieraus folgt

$$\omega_\sigma - \omega_o = 2\mathsf{B}\,\frac{(ao) - (ab)}{(ao)\ (ab)}\ .$$

Substituirt man diess in (16.), und beachtet zugleich, das $\Pi_o = (ao)$ ist, so folgt:

$$(17.)\qquad \eta_\sigma^o = \frac{(ao)^2}{2\pi\,(\sigma o)^3}\ \frac{\text{abs}\,[(ao) - (ab)]}{(ao)\ (ab)}\ ,$$

oder, was dasselbe ist:

$$(18.)\qquad \eta_\sigma^o = \frac{(ao)\ .\ \text{abs}\,[(ao) - (ab)]}{2\pi\,(ab)}\ \frac{1}{(\sigma o)^3}\ .$$

Also folgender Satz:

Soll für eine Kugelfläche die Dichtigkeit der einem gegebenen (äussern oder innern) Centralpunkt o entsprechenden Green'schen Belegung angegeben werden, so bezeichne man diejenigen beiden Punkte der Kugelfläche, deren Entfernungen von o am grössten und kleinsten sind, respective mit a und b. Alsdann hat jene Dichtigkeit an irgend einer Stelle σ der Kugelfläche den in (18.) *angegebenen Werth***).

---

*) Vgl. die zweite Note Seite 453.

**) Selbstverständlich steht dieser Satz in vollem Einklang mit denjenigen Ergebnissen, zu welchen man in Betreff dieser Belegung auf *anderem* Wege gelangt. Vergl. z. B. mein Werk über das *Log. u. Newt. Potential* (Teubner 1877), daselbst Seite 64, Formel (13.), und Seite 67, Formel (28.).

Man kann die Formel (18.) auch so schreiben

(19.) $$\eta_a^o = C \frac{1}{(\sigma o)^3},$$

wo der Factor C *constant* ist, nämlich nur abhängt von den *festen* Punkten o, a und b.

Inhalts-Uebersicht zu dieser und der vorhergehenden Abhandlung.

NB. In der vorliegenden Abhandlung habe ich nicht weiter für nöthig erachtet, Rechenschaft abzulegen über die einfache Beziehung, in welcher die *Green'sche Function* und die *Green'sche Belegung* zu den elektrostatischen Problemen steht. Doch findet man darüber einige *beiläufige* Bemerkungen auf Seite 450 zu Anfang des § 10.

SECHSTER BAND. (IX. Bd.) Mit 10 Tafeln. hoch 4. 1864. brosch. Preis 19 ℳ 20 ₰.

W. G. HANKEL, Elektrische Untersuchungen. Fünfte Abhandlung: Maassbestimmungen der elektromotorischen Kräfte. Erster Theil. 1861. 1 ℳ 60 ₰.

—— Messungen über die Absorption der chemischen Strahlen des Sonnenlichtes. 1862. 1 ℳ 20 ₰.

P. A. HANSEN, Darlegung der theoretischen Berechnung der in den Mondtafeln angewandten Störungen. Erste Abhandlung. 1862. 9 ℳ.

G. METTENIUS, Ueber den Bau von Angiopteris. Mit 10 Tafeln. 1863. 4 ℳ 40 ₰.

W. WEBER, Elektrodynamische Maassbestimmungen, insbesondere über elektrische Schwingungen. 1864. 3 ℳ.

SIEBENTER BAND. (XI. Bd.) Mit 5 Tafeln. hoch 4. 1865. brosch. 17 ℳ.

P. A. HANSEN, Darlegung der theoretischen Berechnung der in den Mondtafeln angewandten Störungen. Zweite Abhandlung. 1864. 9 ℳ.

G. METTENIUS, Ueber die Hymenophyllaceae. Mit 5 Tafeln. 1864. 3 ℳ 60 ₰.

P. A. HANSEN, Relationen einestheils zwischen Summen und Differenzen und anderntheils zwischen Integralen und Differentialen. 1865. 2 ℳ.

W. G. HANKEL, Elektrische Untersuchungen. Sechste Abhandlung: Maassbestimmungen der elektromotorischen Kräfte. Zweiter Theil. 1865. 2 ℳ 80 ₰.

ACHTER BAND. (XIII. Bd.) Mit 3 Tafeln. hoch 4. 1868. brosch. Preis 24 ℳ.

P. A. HANSEN, Geodätische Untersuchungen. 1865. 5 ℳ 60 ₰.

—— Bestimmung des Längenunterschiedes zwischen den Sternwarten zu Gotha und Leipzig, unter seiner Mitwirkung ausgeführt von Dr. Auwers und Prof. Bruhns im April des Jahres 1865. Mit 1 Figurentafel. 1866. 2 ℳ 80 ₰.

W. G. HANKEL, Elektrische Untersuchungen. Siebente Abhandlung: Ueber die thermoelektrischen Eigenschaften des Bergkrystalles. Mit 2 Tafeln. 1866. 2 ℳ 40 ₰.

P. A. HANSEN, Tafeln der Egeria mit Zugrundelegung der in den Abhandlungen der Königl. Sächs. Gesellschaft der Wissenschaften in Leipzig veröffentlichten Störungen dieses Planeten berechnet und mit einleitenden Aufsätzen versehen. 1867. 6 ℳ 80 ₰.

—— Von der Methode der kleinsten Quadrate im Allgemeinen und in ihrer Anwendung auf die Geodäsie. 1867. 6 ℳ.

NEUNTER BAND. (XIV. Bd.) Mit 6 Tafeln. hoch 4. 1871. brosch. Preis 18 ℳ.

P. A. HANSEN, Fortgesetzte geodätische Untersuchungen, bestehend in zehn Supplementen zur Abhandlung von der Methode der kleinsten Quadrate im Allgemeinen und in ihrer Anwendung auf die Geodäsie. 1868. 5 ℳ 40 ₰.

—— Entwickelung eines neuen veränderten Verfahrens zur Ausgleichung eines Dreiecksnetzes mit besonderer Betrachtung des Falles, in welchem gewisse Winkel vorausbestimmte Werthe bekommen sollen. 1869. 3 ℳ.

—— Supplement zu der geodätische Untersuchungen benannten Abhandlung, die Reduction der Winkel eines sphäroidischen Dreiecks betr. 1869. 2 ℳ.

W. G. HANKEL, Elektrische Untersuchungen. Achte Abhandlung: Ueber die thermoelektrischen Eigenschaften des Topases. Mit 4 Tafeln. 1870. 2 ℳ 40 ₰.

P. A. HANSEN, Bestimmung der Sonnenparallaxe durch Venusvorübergänge vor der Sonnenscheibe mit besonderer Berücksichtigung des im Jahre 1874 eintreffenden Vorüberganges. Mit zwei Planigloben. 1870. 3 ℳ.

G. T. FECHNER, Zur experimentalen Aesthetik. Erster Theil. 1871. 3 ℳ.

ZEHNTER BAND. (XV. Bd.) Mit 7 Tafeln. hoch 4. 1874. brosch. Preis 21 ℳ.

W. WEBER, Elektrodynamische Maassbestimmungen, insbesondere über das Princip der Erhaltung der Energie. 1871. 1 ℳ 60 ₰.

P. A. HANSEN, Untersuchung des Weges eines Lichtstrahls durch eine beliebige Anzahl von brechenden sphärischen Oberflächen. 1871. 3 ℳ 60 ₰.

C. BRUHNS, Bestimmung der Längendifferenz zwischen Leipzig und Wien. 1872. 2 ℳ.

W. G. HANKEL, Elektrische Untersuchungen. Neunte Abhandlung: Ueber die thermoelektrischen Eigenschaften des Schwerspathes. Mit 4 Tafeln. 1872. 2 ℳ.

—— Elektrische Untersuchungen. Zehnte Abhandlung: Ueber die thermoelektrischen Eigenschaften des Aragonites. Mit 3 Tafeln. 1872. 2 ℳ.

C. NEUMANN, Ueber die den Kräften elektrodynamischen Ursprungs zuzuschreibenden Elementargesetze. 1873. 3 ℳ 80 ₰.

P. A. HANSEN, Von der Bestimmung der Theilungsfehler eines gradlinigen Maassstabes. 1874. 4 ℳ.

—— Ueber die Darstellung der graden Aufsteigung und Abweichung des Mondes in Function der Länge in der Bahn und der Knotenlänge. 1874. 1 ℳ.

—— Dioptrische Untersuchungen mit Berücksichtigung der Farbenzerstreuung und der Abweichung wegen Kugelgestalt. Zweite Abhandlung. 1874. 2 ℳ.

ELFTER BAND. (XVIII. Bd.) Mit 8 Tafeln. hoch 4. 1878. brosch. Preis 21 ℳ.

G. T. FECHNER, Ueber den Ausgangswerth der kleinsten Abweichungssumme, dessen Bestimmung, Verwendung und Verallgemeinerung. 1874. 2 ℳ.

C. NEUMANN, Ueber das von Weber für die elektrischen Kräfte aufgestellte Gesetz. 1874. 3 ℳ.

W. G. HANKEL, Elektrische Untersuchungen. Elfte Abhandlung: Ueber die thermoelektrischen Eigenschaften des Kalkspathes, des Berylles, des Idocrases und des Apophyllites. Mit 3 Tafeln. 1875. 2 ℳ.

P. A. HANSEN, Ueber die Störungen der grossen Planeten, insbesondere des Jupiter. 1875. 6 ℳ.

W. G. HANKEL, Elektrische Untersuchungen. Zwölfte Abhandlung: Ueber die thermoelektrischen Eigenschaften des Gypses, des Diopsids, des Orthoklases, des Albits und des Periklins. Mit 4 Tafeln. 1875. 2 ℳ.

W. SCHEIBNER, Dioptrische Untersuchungen, insbesondere über das Hansen'sche Objectiv. 1876. 3 ℳ.

C. NEUMANN, Das Webersche Gesetz bei Zugrundelegung der unitarischen Anschauungsweise. 1876. 1 ℳ.

W. WEBER, Elektrodynamische Maassbestimmungen, insbesondere über die Energie der Wechselwirkung. Mit 1 Tafel. 1878. 2 ℳ.

ZWÖLFTER BAND. (XIX. Bd.) hoch 4.

W. G. HANKEL, Elektrische Untersuchungen. Dreizehnte Abhandlung: Ueber die thermoelektrischen Eigenschaften des Apatits, Brucits, Coelestins, Prehnits, Natroliths, Skolezits, Datoliths und Axinits. Mit 3 Tafeln. 1878. 2 ℳ.

W. SCHEIBNER, Zur Reduction elliptischer Integrale in reeller Form. 1879. 5 ℳ.

W. G. HANKEL, Elektrische Untersuchungen. Vierzehnte Abhandlung: Ueber die photo- und thermoelektrischen Eigenschaften des Flussspathes. Mit 3 Tafeln. 1879. 2 ℳ.

C. BRUHNS, Neue Bestimmung der Längendifferenz zwischen der Sternwarte in Leipzig und der neuen Sternwarte auf der Türkenschanze in Wien. 1880. 2 ℳ 40 ₰.

C. NEUMANN, Ueber die peripolaren Coordinaten. 1880. 1 ℳ 50 ₰.

C. NEUMANN, Die Vertheilung der Elektricität auf einer Kugelcalotte. 2 ℳ 40 ₰.

Leipzig, September 1880. S. Hirzel.

Druck von Breitkopf & Härtel in Leipzig.

W. G. HANKEL,
MITGLIED DER KÖNIGL. SÄCHS. GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN

ELEKTRISCHE UNTERSUCHUNGEN.

FÜNFZEHNTE ABHANDLUNG.

ÜBER DIE AKTINO- UND PIEZOELEKTRISCHEN EIGENSCHAFTEN DES BERGKRYSTALLES UND IHRE BEZIEHUNG ZU DEN THERMOELEKTRISCHEN.

Des XII. Bandes der Abhandlungen der mathematisch-physischen Classe der Königl. Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften

Nº VII.

MIT VIER TAFELN.

LEIPZIG
BEI S. HIRZEL.
1881.

ABHANDLUNGEN
DER
KÖNIGL. SÄCHS. GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN
ZU LEIPZIG.

MATHEMATISCH-PHYSISCHE CLASSE.

ERSTER BAND. (I. Bd.)*) Mit 3 Tafeln. hoch 4. 1852. brosch. Preis 13 ℳ 60 ₰.

A. F. MÖBIUS, Ueber die Grundformen der Linien der dritten Ordnung. Mit 1 Tafel. 1849. 2 ℳ 40 ₰.
P. A. HANSEN, Auflösung eines beliebigen Systems von linearischen Gleichungen. — Ueber die Entwickelung der Grösse $(1-2\alpha H+\alpha\alpha)^{-\frac{1}{2}}$ nach den Potenzen von α. 1849. 1 ℳ 20 ₰.
A. SEEBECK, Ueber die Querschwingungen elastischer Stäbe. 1849. 1 ℳ.
C. F. NAUMANN, Ueber die cyclocentrische Conchospirale und über das Windungsgesetz von Planorbis Corneus. 1849. 1 ℳ.
W. WEBER, Elektrodynamische Maassbestimmungen (Widerstandsmessungen). 1851. 3 ℳ.
F. REICH, Neue Versuche mit der Drehwaage. 1852. 2 ℳ.
M. W. DROBISCH, Zusätze zum Florentiner Problem. Mit 1 Tafel. 1852. 1 ℳ 60 ₰.
W. WEBER, Elektrodynamische Maassbestimmungen (Diamagnetismus). Mit 1 Tafel. 1852. 2 ℳ.

ZWEITER BAND. (IV. Bd.) Mit 19 Tafeln. hoch 4. 1855. brosch. Preis 20 ℳ.

M. W. DROBISCH, Ueber musikalische Tonbestimmung und Temperatur. 1852. 3 ℳ.
W. HOFMEISTER, Beiträge zur Kenntniss der Gefässkryptogamen. Mit 18 Tafeln. 1852. 4 ℳ.
P. A. HANSEN, Entwickelung des Products einer Potenz des Radius Vectors mit dem Sinus oder Cosinus eines Vielfachen der wahren Anomalie in Reihen, die nach den Sinussen oder Cosinussen der Vielfachen der wahren, excentrischen oder mittleren Anomalie fortschreiten. 1853. 3 ℳ.
—— Entwickelung der negativen und ungraden Potenzen der Quadratwurzel der Function $r^2 + r'^2 - 2rr'$ (cos U cos U' + sin U sin U' cos J). 1854. 3 ℳ.
O. SCHLÖMILCH, Ueber die Bestimmung der Massen und der Trägheitsmomente symmetrischer Rotationskörper von ungleichförmiger Dichtigkeit. 1854. 80 ₰.
—— Ueber einige allgemeine Reihenentwickelungen und deren Anwendung auf die elliptischen Functionen. 1854. 1 ℳ 60 ₰.
P. A. HANSEN, Die Theorie des Aequatoreals. 1855. 2 ℳ 40 ₰.
C. F. NAUMANN, Ueber die Rationalität der Tangenten-Verhältnisse tautozonaler Krystallflächen. 1855. 1 ℳ.
A. F. MÖBIUS, Die Theorie der Kreisverwandtschaft. 1855. 2 ℳ.

DRITTER BAND. (V. Bd.) Mit 15 Tafeln. hoch 4. 1857. brosch. Preis 19 ℳ 20 ₰.

M. W. DROBISCH, Nachträge zur Theorie der musik. Tonverhältnisse. 1855. 1 ℳ 20 ₰.
P. A. HANSEN, Auseinandersetzung einer zweckmässigen Methode zur Berechnung der absoluten Störungen der kleinen Planeten. 1856. 5 ℳ.
R. KOHLRAUSCH und W. WEBER, Elektrodynamische Maassbestimmungen, insbesondere Zurückführung der Stromintensitäts-Messungen auf mechanisches Maass. 1856. 1 ℳ 60 ₰.
H. D'ARREST, Resultate aus Beobachtungen der Nebelflecken und Sternhaufen. Erste Reihe. 1856. 2 ℳ 40 ₰.
W. G. HANKEL, Elektrische Untersuchungen. Erste Abhandlung: Ueber der Messung der atmosphärischen Elektricität nach absolutem Maasse. Mit 2 Tafeln. 1856. 6 ℳ.
W. HOFMEISTER, Beiträge zur Kenntniss der Gefässkryptogamen. No. II. Mit 13 Tafeln. 1857. 4 ℳ.

VIERTER BAND. (VI. Bd.) Mit 29 Tafeln. hoch 4. 1859. brosch. Preis 22 ℳ 50 ₰.

P. A. HANSEN, Auseinandersetzung einer zweckmässigen Methode zur Berechnung der absoluten Störungen der kleinen Planeten. Zweite Abhandlung. 1857. 4 ℳ.
W. G. HANKEL, Elektrische Untersuchungen. Zweite Abhandlung: Ueber die thermo-elektrischen Eigenschaften des Boracites. 1857. 2 ℳ 40 ₰.
—— Elektrische Untersuchungen. Dritte Abhandlung: Ueber Elektricitätserregung zwischen Metallen und erhitzten Salzen. 1858. 1 ℳ 60 ₰.
P. A. HANSEN, Theorie der Sonnenfinsternisse und verwandten Erscheinungen. Mit 2 Tafeln. 1858. 6 ℳ.
G. T. FECHNER, Ueber ein wichtiges psychophysisches Grundgesetz und dessen Beziehung zur Schätzung der Sterngrössen. 1858. 2 ℳ.
W. HOFMEISTER, Neue Beiträge zur Kenntniss der Embryobildung der Phanerogamen. I. Dikotyledonen mit ursprünglich einzelligem, nur durch Zellentheilung wachsendem Endosperm. Mit 27 Tafeln. 1859. 8 ℳ.

FÜNFTER BAND. (VII. Bd.) Mit 30 Tafeln. hoch 4. 1861. brosch. Preis 24 ℳ.

W. G. HANKEL, Elektrische Untersuchungen. Vierte Abhandlung: Ueber das Verhalten der Weingeistflamme in elektrischer Beziehung. 1859. 2 ℳ.
P. A. HANSEN, Auseinandersetzung einer zweckmässigen Methode zur Berechnung der absoluten Störungen der kleinen Planeten. Dritte Abhandlung. 1859. 7 ℳ 20 ₰.
G. T. FECHNER, Ueber einige Verhältnisse des binocularen Sehens. 1860. 5 ℳ 60 ₰.
G. METTENIUS, Zwei Abhandlungen: I. Beiträge zur Anatomie der Cycadeen. Mit 5 Tafeln. II. Ueber Seitenknospen bei Farnen. 1860. 3 ℳ.
W. HOFMEISTER, Neue Beiträge zur Kenntniss der Embryobildung der Phanerogamen. II. Monokotyledonen. Mit 25 Tafeln. 1861. 8 ℳ.

SECHSTER BAND. (IX. Bd.) Mit 10 Tafeln. hoch 4. 1864. brosch. Preis 19 ℳ 20 ₰.

W. G. HANKEL, Elektrische Untersuchungen. Fünfte Abhandlung: Maassbestimmungen der elektromotorischen Kräfte. Erster Theil. 1861. 1 ℳ 60 ₰.
—— Messungen über die Absorption der chemischen Strahlen des Sonnenlichtes. 1862. 1 ℳ 20 ₰.
P. A. HANSEN, Darlegung der theoretischen Berechnung der in den Mondtafeln angewandten Störungen. Erste Abhandlung. 1862. 9 ℳ.
G. METTENIUS, Ueber den Bau von Angiopteris. Mit 10 Tafeln. 1863. 4 ℳ 40 ₰.
W. WEBER, Elektrodynamische Maassbestimmungen, insbesondere über elektrische Schwingungen. 1864. 3 ℳ.

---

*) Die eingeklammerten römischen Ziffern geben die Zahl des Bandes in der Reihenfolge der Abhandlungen beider Classen an.

ELEKTRISCHE UNTERSUCHUNGEN.

FÜNFZEHNTE ABHANDLUNG.

ÜBER DIE AKTINO- UND PIEZOELEKTRISCHEN EIGENSCHAFTEN DES BERGKRYSTALLES UND IHRE BEZIEHUNG ZU DEN THERMOELEKTRISCHEN.

VON

W. G. HANKEL

MITGLIED DER KÖNIGL. SÄCHS. GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN.

Des XII. Bandes der Abhandlungen der mathematisch-physischen Classe der Königl. Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften

Nº VII.

MIT VIER TAFELN.

LEIPZIG

BEI S. HIRZEL.

1881.

Vom Verfasser übergeben den 10. September 1881.
Der Abdruck vollendet den 25. November 1881.

ELEKTRISCHE UNTERSUCHUNGEN

VON

W. G. HANKEL.

FÜNFZEHNTE ABHANDLUNG.

ÜBER DIE AKTINO- UND PIEZOELEKTRISCHEN EIGENSCHAFTEN DES BERGKRYSTALLES UND IHRE BEZIEHUNG ZU DEN THERMOELEKTRISCHEN.

MIT VIER TAFELN.

VORWORT.

Briot erklärt in seinem *Essai sur la théorie mathématique de la lumière* (1864) die in der Richtung der Hauptaxe eines Bergkrystalles eintretende circulare Polarisation durch die Annahme einer in der Richtung der Radien der Basis spiralförmig angeordneten Lagerung der Aethermoleküle. Eine solche Spirale erscheint an ihren beiden Enden, von aussen gesehen, in genau gleicher Weise; eine rechts oder eine links gewundene Spirale behält an beiden Enden denselben Charakter, und es würden hiernach also die beiden Enden aller drei die gegenüberliegenden Seitenkanten des Prismas verbindenden Nebenaxen von völlig gleicher Beschaffenheit sein.

Genügt nun auch die von Briot gemachte Annahme zur Erklärung der Drehung der Polarisationsebene des Lichtes im Bergkrystall, so ist sie doch für die Erklärung eines anderen, ebenfalls am Bergkrystalle auftretenden Vorganges nicht ausreichend.

Meine Untersuchungen über die thermoelektrischen Eigenschaften des Bergkrystalles*) haben den Nachweis geliefert, dass zwar die drei Nebenaxen desselben einander gleichen, dass jedoch die beiden Enden einer jeden Nebenaxe in einem Gegensatze zu einander stehen. Es finden sich nämlich an den Enden der Nebenaxen eines Bergkrystalles elektrische Pole, die, wenn wir die Seitenkanten des Prismas, in welchen die Nebenaxen endigen, der Reihe nach verfolgen, abwechselnd positiv und negativ sind, sodass also jede einzelne der drei Nebenaxen eine elektrisch polare Axe, deren eines Ende positiv, das andere negativ ist, darstellt.

Ein verschiedenes Verhalten der beiden Enden einer Nebenaxe tritt nun, wie oben hervorgehoben, nicht ein, wenn wir die Aethermoleküle

*) Abhandl. d. K. Sächs. Gesellsch. d. Wissensch. Bd. XIII. S. 319—392.

spiralförmig in gleichem Sinne längs der ganzen Nebenaxe gelagert annehmen; dagegen lässt sich eine Anordnung, welche einen solchen Gegensatz erzeugt, gewinnen, wenn wir von der Spirale nur den kreisförmigen Umlauf beibehalten und annehmen, dass infolge der Krystallisationsverhältnisse des Bergkrystalles die Aethertheilchen um die Nebenaxe leichter in der einen Richtung beweglich sind, als in der anderen. Die Richtung der leichteren Drehung, d. h. die Richtung, nach welcher die Aethertheilchen sich leichter in eine kreisförmige Bewegung um eine Nebenaxe setzen lassen, würde dann z. B. von dem einen Ende einer Axe aus gesehen rechtsum, von dem anderen Ende derselben Axe betrachtet aber linksum erscheinen. Um die drei Nebenaxen müsste entsprechend dem elektrischen Verhalten die leichtere Drehung so vertheilt sein, dass sie stets um zwei benachbarte Axenenden eine entgegensetzte Richtung besässe.

In den Berichten der Gesellschaft vom Jahre 1865*) habe ich gezeigt, dass die elektrischen Vorgänge sich durch kreisförmige Schwingungen des Aethers, je nach den Umständen unter Betheiligung der Moleküle der materiellen Substanzen erklären lassen. Die beiden Modificationen der Elektricität, die positive und die negative, unterscheiden sich nach dieser Auffassung blos durch die Richtung der Drehung; ein und derselbe Wirbel (wenn ich der Kürze wegen diesen Ausdruck gebrauche) stellt auf der einen Seite die positive, auf der andern die negative Modification der Elektricität dar. Wäre man also im Stande, um die Nebenaxe eines Bergkrystalles eine kreisförmige Bewegung des Aethers unter Betheiligung der materiellen Moleküle zu erzeugen, die im Verlaufe der ganzen Axe in demselben Sinne erfolgte, so müssten die Enden dieser Axe elektrisch erscheinen und zwar das eine Ende positiv, das andere negativ.

Wenn nun die obige Annahme, wonach die kreisförmige Bewegung der Aethertheilchen um die Nebenaxen eines Bergkrystalles leichter in dem einen Sinne als in dem entgegengesetzten erfolgt, der Wirklichkeit entspricht, so müssen mittelst beliebig gerichteter Schwingungen, welche den Krystall durchdringen, die Aethertheilchen im Sinne der leichtern Drehung in Umschwung gesetzt werden, die Enden der Axen also elektrische Pole zeigen.

---

*) Berichte der math.-phys. Klasse 1865. S. 7.

Infolge der vorstehenden Erörterungen lag es nahe, die Schwingungen des Lichtes auf eine solche Wirkung zu prüfen. Wenn gewöhnliches Licht, dessen Schwingungen bald linear nach den verschiedensten Richtungen, bald kreisförmig oder elliptisch mit wechselnden Drehungsrichtungen erfolgen, in beliebiger Richtung auf einen Bergkrystall treffen, so werden diese Schwingungen, falls sie überhaupt jene Wirkung auszuüben vermögen, in ihrer Gesammtwirkung stets eine Drehung der Aethertheilchen unter Betheiligung der materiellen Moleküle im Sinne der leichteren Beweglichkeit veranlassen.

Ein auf dieses Ziel gerichteter Versuch, bei welchem das durch einen metallischen Hohlspiegel von 500 mm Brennweite und 100 mm Oeffnung concentrirte Sonnenlicht auf einen Bergkrystall ungefähr in der Richtung einer Nebenaxe geleitet wurde, ergab nun in der That eine Entwickelung von Elektricität und zwar in der oben angedeuteten Weise, dass (den Krystall als einfach vorausgesetzt) die Enden einer jeden Nebenaxe entgegengesetzte Pole zeigten, und die nebeneinander liegenden Enden zweier benachbarten Nebenaxen ebenfalls entgegengesetzte Polaritäten besassen.

Eine gleiche Elektricitätserregung entstand, als anstatt des Sonnenlichtes die Strahlen einer Gasflamme mittelst des Hohlspiegels auf den Bergkrystall geworfen wurden.

Bei weiterer Prüfung ergab sich, dass vorzugsweise nicht sowohl die eigentlichen Licht-, als vielmehr die Wärmestrahlen die Entstehung der Elektricität in dem Bergkrystalle hervorrufen, so dass dieselbe auch durch die dunkeln Wärmestrahlen, welche aus einem nur bis 30 oder 100^0 erhitzten Körper hervorgehen, bewirkt werden konnte.

Das im Vorstehenden beschriebene Verfahren erzeugt Elektricität durch einen wesentlich anderen Vorgang, als die Aenderung der Temperatur die thermoelektrischen Spannungen. Dies ergiebt sich sofort aus dem Umstande, dass die auf den Kanten eines Bergkrystalles infolge der Bestrahlung auftretende Elektricität derjenigen, welche auf denselben Kanten bei steigender Temperatur entsteht, gerade entgegengesetzt ist, dass die erstere Elektricität also in ihrem Vorzeichen mit der beim Erkalten erscheinenden Polarität übereinstimmt. Ferner erreicht die durch die Bestrahlung erzeugte Elektricität in sehr kurzer Zeit, meistens innerhalb 30 Secunden, ein Maximum, wenn die Intensität der Bestrahlung constant bleibt. Wir haben sie daher durch



einen besonderen Namen von der thermoelektrischen zu unterscheiden und wollen sie als Aktinoelektricität bezeichnen.

Vor Kurzem ist von Jacques und Pierre Curie*) die Entdeckung gemacht, dass auf hemimorph gebildeten Krystallen beim Zusammenpressen derselben in der Richtung der hemimorphen Axe an den Enden dieser letzteren polare Elektricität auftritt; d. h. dass beim Zusammenpressen in der angedeuteten Richtung das eine Ende der hemimorphen Axe die eine, das andere die entgegengesetzte Elektricität annimmt. Beim Nachlassen des Druckes kehren sich die elektrischen Polaritäten an beiden Enden der Axe um. J. und P. Curie sprechen als allgemeine Regel aus, dass die durch Zusammenpressen entstehende Elektricität mit der bei der Abkühlung, und die beim Nachlassen des Druckes erzeugte mit der bei der Erwärmung auftretenden in Betreff ihres Vorzeichens übereinstimme; dass also die Elektricität dieselbe Beschaffenheit besitze, gleichgültig in welcher Weise die Moleküle näher an einander gebracht werden (durch Druck oder durch Abkühlung), oder andererseits von einander entfernt werden (durch Nachlassen des Druckes oder durch Erwärmung).

In einer kurzen Notiz in den Berichten für 1880**) habe ich aber mitgetheilt, dass diese von J. und P. Curie aufgestellte Regel keine allgemeine Gültigkeit hat. Während sie bei den Krystallen des Turmalins, des Boracits, des Kieselzinkerzes, der Weinsäure, des Rohrzuckers und des Milchzuckers zutrifft, widerspricht ihr das Verhalten der Bergkrystalle, sowie der Krystalle des Struvits und des neutralen weinsauren Kalis. Bei den Krystallen dieser letzteren drei Substanzen stimmt vielmehr, wie ich später näher darlegen werde, die beim Zusammenpressen entstehende Elektricität mit der beim Erwärmen, und entsprechend die beim Nachlassen des Druckes erzeugte mit der beim Erkalten auftretenden überein. Da die durch Druck erzeugte Elektricität sonach auch besonderen Gesetzen unterliegt, so wird es angemessen sein, derselben gleichfalls einen besonderen Namen beizulegen, und es dürfte sich dazu die Bezeichnung Piezoelektricität eignen.

---

*) Compt. rend. hebd. d. séances de l'Acad. des Sciences. Bd. 91. S. 294.

**) Berichte der math.-phys. Klasse d. K. Sächs. Ges. d. Wiss. 1880. S. 144.

Wenn nun auch die Thermoelektricität, die Aktinoelektricität und die Piezoelektricität der Bergkrystalle durch verschiedene Vorgänge erzeugt werden, so hängen doch alle drei Erregungsweisen der Elektricität bei diesem Minerale von der eigenthümlichen Gestaltung seiner Krystalle, nämlich von der hemimorphen Ausbildung seiner drei Nebenaxen ab. Dieser Umstand macht es nöthig, bevor ich zur Erörterung der verschiedenen auf der Oberfläche der Bergkrystalle hervortretenden elektrischen Spannungen übergehe, eine klare Darlegung des Wesens seiner Krystallgestalt zu geben.

I. Krystallographische Verhältnisse des Bergkrystalles.

Die allgemeinste Gestalt im hexagonalen Systeme ist die dihexagonale Pyramide, deren Basis ein Zwölfeck von gleichen Seiten, aber nur abwechselnd gleichen Winkeln bildet. Man kann sie aus der gleichschenkligen sechsseitigen Pyramide ableiten, indem man die Nebenaxen derselben im Verhältniss von $1:n$ (wo $1 < n < 2$) verlängert und durch den Endpunkt der Hauptaxe, sowie durch je einen Endpunkt einer unveränderten und einer benachbarten in dem angegebenen Verhältnisse verlängerten Nebenaxe Ebenen legt. Wird nach Naumann die allgemeine sechsseitige Pyramide mit mP bezeichnet, so ist das Symbol für die entsprechende zwölfseitige mPn. In Fig. I Taf. IV stellt zz' die Hauptaxe dar; xx', yy' und uu' sind die Nebenaxen.

Meine Untersuchungen über das elektrische Verhalten des Bergkrystalles weisen nun darauf hin, dass den drei Nebenaxen xx', yy' und uu' eine physische Bedeutung zukommt, und es sind demnach bei der zwölfseitigen Pyramide stets die um den Endpunkt einer Nebenaxe (z. B. y) gelegenen vier Flächen (a, b, c, d) als ein zusammengehöriges System zu betrachten.

Es seien a, b, c, d Fig. I Taf. IV die zu dem vorderen Endpunkte der Nebenaxe oy gehörigen vier Flächen der zwölfseitigen Pyramide mPn. Lassen wir bei dieser Pyramide eine Hemiedrie in der Weise eintreten, dass eine Fläche um die andere wächst und verschwindet (trapezoedrische Hemiedrie), so bleiben von den zuvor bezeichneten vier Flächen nur zwei, entweder a und d oder b und c erhalten; und durch ihre Vergrösserung bis zum gegenseitigen Durchschnitte

entstehen zwei hexagonale Trapezoeder (Fig. II und III) Taf. IV, von denen das eine das Spiegelbild des anderen ist, die sich also wie zwei rechts und links symmetrische Körper verhalten. In ihnen sind in ganz bestimmter Weise zwei Drehungen ausgesprochen und es sollen daher die beiden Trapezoeder mit $r\frac{mPn}{2}$ und $l\frac{mPn}{2}$ bezeichnet werden.

Um den Sinn der durch die Buchstaben r und l angedeuteten Drehungen festzustellen, wollen wir in folgender Weise verfahren. Wir legen durch die verticale Hauptaxe zz' und durch den Schwerpunkt der einzelnen Flächen Ebenen. Denken wir uns nun in die Hauptaxe gestellt, so soll r (rechts) und l (links) die Drehungen bezeichnen, welche wir ausführen müssen, um auf dem kürzesten Wege von der durch den Schwerpunkt der oberen Fläche gelegten Ebene zu der durch den Schwerpunkt der unteren (zu demselben Systeme gehörigen Fläche) gelegten Ebene zu gelangen. Wachsen also die Flächen a und d, während b und c verschwinden, so entsteht ein linkes hexagonales Trapezoeder, $l\frac{mPn}{2}$ Fig. II; wachsen unter Verschwinden von a und d die Flächen b und c, so entsteht die entsprechende rechte Gestalt $r\frac{mPn}{2}$ Fig. III.

Es kommen nun diese hexagonalen Trapezoeder in der That bisweilen vollständig beim Bergkrystalle vor, sind aber von den Krystallographen nicht als solche anerkannt worden*). So sagt Naumann**): »dass bis jetzt noch kein Körper vorhanden ist, an welchem die trapezoedrische Hemiedrie als solche zur Ausbildung gebracht wäre; denn die am Quarze bisweilen beobachteten hexagonalen Trapezoeder sind entweder durch gleichzeitige Ausbildung zweier correlater trigonaler Trapezoeder***) oder durch eine Zwillingsbildung zu erklären, bei welcher sich zwei Individuen vollkommen einverleibt sind«.

*) Wie weit ihr Vorkommen mit den sonstigen physikalischen Eigenschaften des Bergkrystalles verträglich ist, wird weiterhin erörtert werden. S. 468, 471.

**) Naumann, Elemente der theoretischen Krystallographie. S. 200.

***) Dies ist nicht möglich. Nach Naumann entstehen zwei correlate Trapezoeder aus einem hexagonalen Skalenoeder; durch die gleichzeitige Ausbildung zweier correlater Trapezoeder würde also nur ein hexagonales Skalenoeder, aber kein hexagonales Trapezoeder entstehen. Ein solches würde erst durch die Vereinigung zweier aus den beiden verschiedenen Skalenoedern hervorgegangenen trigonalen Trapezoeder erzeugt werden.

Die soeben erwähnten trigonalen Trapezoeder betrachtet Naumann als tetartoedrische Gestalten der dihexagonalen Pyramide*); er lässt sie entweder durch Tetartoedrie aus der dihexagonalen Pyramide, oder durch eine neue Hemiedrie aus dem hexagonalen Skalenoeder entstehen.

Durch die thermoelektrische Vertheilung am Bergkrystalle habe ich aber in der oben citirten Abhandlung den Nachweis geführt, dass diese trigonalen Trapezoeder eine ganz andere Bedeutung besitzen, als die Naumann'sche Ableitung ihnen beilegt. Ich habe gezeigt, dass beim Bergkrystall an den Enden einer jeden Nebenaxe entgegengesetzte Polaritäten auftreten, dass also nach der Richtung jeder dieser Axen ein Hemimorphismus vorhanden ist. Lassen wir nun an jeder der drei Nebenaxen der beiden oben beschriebenen hexagonalen Trapezoeder eine vollständige hemimorphe Gestaltung eintreten, sodass an dem einen Ende der Nebenaxen (z. B. y und entsprechend dem Charakter des hexagonalen Systems x' und u') die zu ihm gehörigen Flächen sich ausbilden, an dem anderen Ende (y', x und u) derselben Axen aber nicht zur Entwicklung gelangen, so entsteht aus jedem der beiden hexagonalen Trapezoeder ein trigonales, welches dieselbe Drehung besitzt, wie diejenige hexagonale Gestalt, aus welcher es entstanden ist. Wenn dieselben Vorgänge sich an den entgegengesetzten Axenenden vollziehen, die Flächen also an den Enden y', x und u wachsen, an den Enden y, x' und u' aber verschwinden, so entstehen ebenfalls zwei trigonale Trapezoeder, von denen jedes mit dem entsprechenden vorhin abgeleiteten zwar gleiche Gestalt hat, aber in seiner Stellung um 180° (oder 60°) verschieden ist. Wir erhalten also vier trigonale Trapezoeder, zwei rechte und zwei linke. Das eine rechte (oder linke) kann mit dem andern rechten (oder linken) durch eine Drehung von 180° oder 60° zur vollständigen Deckung gebracht werden.

Die beiden Enden einer jeden Nebenaxe zeigen beim Bergkrystalle entgegengesetzte thermoelektrische Spannungen; dieselben sind bei steigender Temperatur gerade die entgegengesetzten als bei sinkender. Da sich die beim Erkalten auftretenden elektrischen Vorgänge bequemer beobachten lassen als die beim Erwärmen, so habe ich in meinen Abhandlungen über die thermoelektrischen Eigenschaften der Krystalle,

*) Naumann, Elemente u. s. w. S. 219.

namentlich auch um Weitläufigkeiten und leicht mögliche Verwechselungen zu vermeiden, fast stets nur die bei der Abkühlung beobachteten Elektricitäten aufgeführt und eben diese auch auf den zur übersichtlichen Darstellung der elektrischen Vertheilungen dienenden Tafeln in die Netze der einzelnen Krystalle eingetragen.

Da ich nun im Folgenden in gleicher Weise verfahren werde, so will ich die beiden Enden einer Nebenaxe so unterscheiden, dass das beim Erkalten positive Ende das Zeichen $+$, das beim Erkalten negative das Zeichen $-$ erhält. Beim Bergkrystall sind beim Erkalten die Enden der Nebenaxen der Reihe nach abwechselnd elektrisch positiv und negativ; ebenso findet bei der Entstehung der trigonalen Trapezoeder ein Wachsen der Flächen des hexagonalen Trapezoeders an den abwechselnden Enden der Nebenaxen und ein Verschwinden an den dazwischen liegenden statt. Wenn daher durch das vor $r\frac{mPn}{2}$ und $l\frac{mPn}{2}$ gesetzte Zeichen $+$ und $-$ angedeutet wird, dass die Flächen dieser Gestalten nur an den durch diese Zeichen bestimmten Enden der Nebenaxen vorhanden sind, an den anderen aber fehlen, so lassen sich die vier trigonalen Trapezoeder durch die Symbole $+r\frac{mPn}{2}$, $-r\frac{mPn}{2}$, $+l\frac{mPn}{2}$ und $-l\frac{mPn}{2}$ völlig bestimmt darstellen. $+r\frac{mPn}{2}$ und $-r\frac{mPn}{2}$ haben gleiche Gestalt und unterscheiden sich blos durch eine um 180^0 (oder 60^0) verschiedene Lage. Eben dies gilt von $+l\frac{mPn}{2}$ und $-l\frac{mPn}{2}$.

Untersuchen wir nun, welche Gestalten durch eine nach den Nebenaxen hemimorphe Bildung entstehen, wenn n die Grenzwerthe 1 und 2, und m den Grenzwerth ∞ annimmt.

Wird bei der dihexagonalen Pyramide mPn der Ableitungscoefficient $n = 1$, so erhalten wir die gewöhnliche sechsseitige Pyramide mP. Bei ihr gehören alle vier an dem Endpunkte einer Nebenaxe gelegenen Flächen zu einem Systeme. Da nun jede Fläche zu zwei benachbarten Axenenden in derselben Beziehung steht, so sind alle Systeme und Axenenden einander gleich. Wenn dagegen in den beiden hexagonalen Trapezoedern $n = 1$ wird, so ergeben sich auch zwei Gestalten, die in ihrer Form zwar der gewöhnlichen sechsseitigen Pyramide mP vollkommen gleichen, in ihrem Wesen aber von derselben durchaus verschieden sind. Von den an dem Endpunkte einer Nebenaxe liegenden vier

Flächen gehören nur zwei zu dem betreffenden Axenende, und zwar je nachdem die Gestalt aus einem rechten oder linken hexagonalen Trapezoeder stammt, die Fläche rechts oben und links unten, oder die Fläche links oben und rechts unten. Es sind diese beiden scheinbar sechsseitigen Pyramiden also zu bezeichnen mit $\left(l\frac{mPn}{2}\right)_{n=1}$ und $\left(r\frac{mPn}{2}\right)_{n=1}$, wo durch $n = 1$ angedeutet ist, dass in dem allgemeinen Ausdrucke für die hexagonalen Trapezoeder $n = 1$ zu setzen ist. Für $m = 1$ erhalten wir also die beiden Formen $\left(l\frac{Pn}{2}\right)_{n=1}$ und $\left(r\frac{Pn}{2}\right)_{n=1}$.

Tritt nun bei den Gestalten $\left(l\frac{mPn}{2}\right)_{n=1}$ und $\left(r\frac{mPn}{2}\right)_{n=1}$ nach den Nebenaxen ein vollständiger Hemimorphismus ein, d. h. verschwinden die zu dem einen Endpunkte dieser Axen gehörigen Flächen vollständig, wobei, um den Charakter des hexagonalen Systemes zu bewahren, die Enden, an welchen die Flächen wachsen, mit denen, wo sie verschwinden, abwechseln müssen, so verwandeln sich die beiden genannten Gestalten in scheinbare Rhomboeder. Dieselben sind aber von den gewöhnlichen Rhomboedern, wie sie z. B. beim Kalkspath vorkommen, sehr wesentlich verschieden. Bei dem gewöhnlichen Rhomboeder ist die Beziehung einer oberen Fläche zu jeder der beiden unteren anliegenden, und ebenso jeder unteren zu jeder der beiden oberen anliegenden genau dieselbe; dagegen gehört bei den aus den Gestalten $\left(r\frac{mPn}{2}\right)_{n=1}$ und $\left(l\frac{mPn}{2}\right)_{n=1}$ durch Hemimorphismus entstehenden scheinbaren Rhomboedern jede obere Fläche nur mit einer bestimmten unteren, und ebenso umgekehrt, zu einem Systeme. Ist das scheinbare Rhomboeder aus der Gestalt $\left(r\frac{mPn}{2}\right)_{n=1}$ hervorgegangen, so gehört jede obere zu der bei der Rechtsdrehung zunächst folgenden unteren; ist es aber aus der Gestalt $\left(l\frac{mPn}{2}\right)_{n=1}$ entstanden, so gehört jede obere Fläche zu der bei der Linksdrehung zunächst folgenden unteren. Analog wie bei den trigonalen Trapezoedern lassen sich die vier Rhomboeder, je nachdem die in ihnen erhaltenen Flächen an den positiven oder negativen Enden der Nebenaxen liegen, durch die vier Symbole $+\left(r\frac{mPn}{2}\right)_{n=1}$, $-\left(r\frac{mPn}{2}\right)_{n=1}$; $+\left(l\frac{mPn}{2}\right)_{n=1}$ und $-\left(l\frac{mPn}{2}\right)_{n=1}$ darstellen. Wird $m = 1$, so erhalten wir also $+\left(r\frac{Pn}{2}\right)_{n=1}$, $-\left(r\frac{Pn}{2}\right)_{n=1}$, $+\left(l\frac{Pn}{2}\right)_{n=1}$, und $-\left(l\frac{Pn}{2}\right)_{n=1}$.

In der That kommt ein solches scheinbares Rhomboeder bei den Bergkrystallen vor, z. B. bei den Krystallen von den Färöern. Gewöhnlich tritt aber der Hemimorphismus beim Bergkrystalle nicht in seinem Extreme auf, wo das dem einen Ende der Nebenaxe angehörige Flächenpaar gänzlich fehlt; vielmehr erscheint nur das dem einen Ende entsprechende Flächenpaar stärker oder vollkommener ausgebildet, als das dem anderen Ende zugehörige. Man glaubt dann zwei Rhomboeder von verschiedener Ausbildung zu sehen. G. Rose bezeichnete das eine im Allgemeinen stärker entwickelte als das Hauptrhomboeder oder Rhomboeder erster Ordnung, das andere weniger hervortretende als das Nebenrhomboeder oder Rhomboeder zweiter Ordnung. Zwischen den Flächen dieser beiden Gestalten ist ferner häufig, wie dies auch bei den beiden Tetraedern des Boracits sich findet, in Bezug auf Glanz und Glätte ein mehr oder weniger deutlicher Unterschied.

Am einfachsten lässt sich eine solche sechsseitige, von zwei scheinbaren Rhomboedern in verschiedener Ausdehnung gebildete Pyramide kurz und völlig bestimmt bezeichnen durch eines der vier Symbole $\pm\left(r\frac{mPn}{2}\right)_{n=1}$; $\pm\left(r\frac{mPn}{2}\right)_{n=1}$; $\pm\left(l\frac{mPn}{2}\right)_{n=1}$ und $\pm\left(l\frac{mPn}{2}\right)_{n=1}$, wo das grössere Vorzeichen $+$ und $-$ andeutet, dass die an dem mit diesem Zeichen behafteten Ende liegenden Flächen der Gestalten $\left(r\frac{mPn}{2}\right)_{n=1}$ und $\left(l\frac{mPn}{2}\right)_{n=1}$ eine grössere Ausdehnung besitzen, als die an dem mit dem kleiner gedruckten Zeichen + und − versehenen Enden befindlichen Flächen.

In ähnlicher Weise wie an den Gestalten $\left(r\frac{mPn}{2}\right)_{n=1}$ und $\left(l\frac{mPn}{2}\right)_{n=1}$ die hemimorphe Bildung sich nur durch Unterschiede in der Grösse oder dem Glanze und der Glätte der Flächen ausspricht, könnte dieselbe auch bei den hexagonalen Trapezoedern selbst, also bei den Gestalten $r\frac{mPn}{2}$ und $l\frac{mPn}{2}$ auftreten, sodass also hier mit Benutzung der zuvor angewandten Bezeichnungsweise die vier Bildungen $\pm\left(r\frac{mPn}{2}\right)$; $\pm\left(r\frac{mPn}{2}\right)$; $\pm\left(l\frac{mPn}{2}\right)$ und $\pm\left(l\frac{mPn}{2}\right)$ möglich wären.

Erreicht n den Werth 2, so gehen die beiden hexagonalen Trapezoeder in eine sechsseitige Pyramide zweiter Ordnung über, bei

welcher die Enden der Nebenaxen in den Mittelpunkten der Randkanten liegen; bei ihr gehört jede obere Fläche zu der an demselben Axenende gelegenen unteren. Sie gleicht also der aus der vollständigen zwölfseitigen Pyramide mPn abgeleiteten und kann daher wie diese mit dem Symbol $mP2$ bezeichnet werden. Ist $m = 2$, so wird das Symbol also $2P2$. Eine Drehung ist in ihr nicht ausgesprochen, sie bildet eine Art von Übergang der rechten Gestalten in die linken.

Tritt nun an dieser Gestalt ein vollständiger Hemimorphismus auf, so entstehen, je nachdem die Flächen am positiven oder am negativen Ende der Nebenaxen erhalten bleiben, die beiden dreiseitigen Pyramiden $+mP2$ und $-mP2$, oder wenn $m = 2$ ist, $+2P2$, und $-2P2$ (die sogenannten Rhombenflächen beim Bergkrystalle).

Wird in den beiden hexagonalen Trapezoedern die Hauptaxe unendlich, so entstehen zwei zwölfseitige Prismen, welche in ihrer Gestalt im Allgemeinen gewöhnlichen dihexagonalen Prismen gleichen.

Tritt an einem solchen zwölfseitigen Prisma Hemimorphismus auf, indem entweder nur die an den positiven oder die an den negativen Endpunkten der Nebenaxen gelegenen Flächen erhalten bleiben, so entstehen zwei ditrigonale (symmetrisch sechsseitige) Prismen, welche sich je nach dem Endpunkte, zu welchem sie gehören, durch die Zeichen + und — unterscheiden lassen, also als $+\frac{\infty Pn}{2}$ und $-\frac{\infty Pn}{2}$. Eine Beziehung zur Rechts- oder Linksdrehung ist bei ihnen nicht direct ausgesprochen.

Wird bei einem solchen zwölfseitigen Prisma $n = 1$, so entsteht ein sechsseitiges Prisma $\left(\frac{\infty Pn}{2}\right)_{n=1}$, welches dem gewöhnlichen ∞P in seiner Gestalt gleicht. Bei diesem letzteren sind die Flächen in ihrer ganzen Breite gleichartig. Theilen wir jedoch die Flächen des aus dem vorliegenden zwölfseitigen Prisma entstandenen sechsseitigen Prismas $\left(\frac{\infty Pn}{2}\right)_{n=1}$ in verticaler Richtung in zwei Hälften, so sind diese beiden Hälften von einander verschieden; jede Hälfte gehört zu der ihr benachbarten Kante, die eine also zu dem positiven, die andere zu dem negativen Ende der Nebenaxen.

Lassen wir bei dem zuvor betrachteten zwölfseitigen Prisma $n = 2$ werden, so geht es gleichfalls in ein sechseitiges Prisma $\infty P2$ über, das in seiner Lage und Gestalt mit dem sogenannten

Prisma zweiter Ordnung übereinstimmt. Jedoch sind seine Flächen nicht gleichartig. In ihrer Mitte liegen die Endpunkte der Nebenaxen, und es gehören die Flächen abwechselnd zu dem positiven und negativen Endpunkte dieser Axen.

Wenn an diesem sechsseitigen Prisma eine hemimorphe Bildung eintritt, so entstehen zwei trigonale Prismen, welche, je nachdem ihre Flächen den positiven oder den negativen Enden der Nebenaxen angehören, als $+\infty P2$ und $-\infty P2$ unterschieden werden.

Für den Hemimorphismus ist es nun nicht absolut nothwendige Bedingung, dass die Flächen einer Krystallgestalt nur an dem einen Ende der hemimorphen Axe auftreten; es genügt vielmehr, dass das eine Ende derselben überhaupt anders gebildet ist als das entgegengesetzte. Dies kann geschehen, indem sämmtliche an dem einen Ende jener Axe auftretenden Flächen anderen Gestalten angehören als an dem entgegengesetzten, oder dass unter den Flächen an den beiden Endpunkten nur ein Theil anderen Gestalten angehört, während die übrigen denselben Krystallformen entnommen sind, oder auch selbst, dass beide Enden die Flächen derselben Gestalten tragen, wobei aber die Flächen an dem einen Ende eine grössere oder geringere Ausdehnung und in Bezug auf Glanz und Glätte eine mehr oder minder vollkommene Ausbildung zeigen.

So erscheinen beim Boracit sehr häufig beide Tetraeder; das eine besitzt aber glänzende, das andere matte Flächen. Beim Turmalin tritt häufig das Hauptrhomboeder an beiden Enden mit oft nur wenig verschiedener Beschaffenheit seiner Flächen auf; die Flächen an dem beim Erkalten negativen Ende sind etwas glätter und glänzender als am positiven. Wenn auch bei diesem Minerale das nächstspitzere Rhomboeder gewöhnlich auf dem positiven Ende sich zeigt, so findet es sich doch auf einzelnen Krystallen von Nedre-Havredahl bei Krageröe in Norwegen gleichzeitig an dem negativen Ende. Beim Greenockit kommen die Flächen $0P$ und $\frac{1}{2}P$ an beiden Enden der Hauptaxe, jedoch in verschiedener Ausdehnung vor. Beim Kieselzinkerz beobachtet man die Flächen $2P$ häufig an beiden Enden der unsymmetrischen Axe, wenn auch an dem positiven in grösserer Ausdehnung als am negativen, wo noch andere gegen die Axe geneigte Flächen sie umgeben. Ein gleiches Verhalten zeigen die künstlich dargestellten hemimorphen Krystalle. Beim Jodsuccinimid

treten die Flächen 2 *P* an beiden Enden, jedoch in verschiedener Grösse auf; beim Tolylphenylketon finden sich die Flächen des Hauptrhomboeders an beiden Enden u. s. w.

Betrachten wir nun die von mir als nach den Nebenaxen hemimorph aufgefasste Bildung des Bergkrystalles, so treten in seltenen Fällen, um mich der bisher üblichen Bezeichnungsweise anzuschliessen, die Flächen des Hauptrhomboeders allein auf ohne die Flächen des Gegenrhomboeders; gewöhnlich erscheinen bei regelmässiger Ausbildung des Krystalles beide Rhomboeder, aber in verschiedener Grösse und mit Unterschieden in Glanz und Glätte. An dem beim Erkalten positiv elektrischen Ende der Nebenaxen liegen die Flächen der rechten Trapezoeder erster Ordnung und der linken Trapezoeder zweiter Ordnung, oder bei den entgegengesetzt drehenden Krystallen die Flächen der linken Trapezoeder erster und der rechten Trapezoeder zweiter Ordnung, sowie die sogenannten Rhombenflächen. Es würde aber dem Charakter des Hemimorphismus nicht durchaus widersprechen, wenn diese Flächen ausser an den positiven Enden auch an den negativen vorkämen, nur in verschiedener Ausdehnung, oder an dem einen Ende mit anderen Flächen verbunden als an dem entgegengesetzten. Das dreiseitige Prisma kommt meistens an denjenigen Seitenkanten vor, welche die Rhombenflächen nicht tragen; doch findet es sich auch an den Kanten, auf welchen die Rhombenflächen erscheinen, wobei dann ein ditrigonales Prisma die drei übrigen Kanten, auf welchen die Rhombenflächen nicht liegen, zuschärft.

Aus dem Vorstehenden ergiebt sich, dass das Verhalten der Flächen der verschiedenen Gestalten beim Bergkrystalle durchaus dem auf den übrigen hemimorphen Krystallen beobachteten analog ist.

In seiner Abhandlung über das Krystallisationssystem des Quarzes sagt G. Rose*): »Die einfachen Formen des Quarzes treten nicht sämmtlich zusammen in Combination, sondern das Vorkommen gewisser Formen schliesst das Vorkommen von anderen aus.«

»Mit sämmtlichen Formen treten in Combination nur die Rhomboeder erster und zweiter Ordnung, sowie das erste sechsseitige Prisma.«

*) Abhandl. der Berliner Akademie. 1844. S. 203.

»Mit dem rechten Trigonoeder (dreiseitigen Pyramide) treten in Combination: die rechten Trapezoeder erster Ordnung, die linken Trapezoeder zweiter Ordnung, das linke dreiseitige Prisma und das linke symmetrisch sechseitige Prisma.«*)

»Mit dem linken Trigonoeder treten in Combination die linken Trapezoeder erster Ordnung, die rechten Trapezoeder zweiter Ordnung, das rechte dreiseitige Prisma und das rechte symmetrisch sechsseitige Prisma.«

Die von G. Rose aufgestellte Unterscheidung der beiden Trigonoeder (dreiseitige Pyramiden, die sogenannten Rhombenflächen) in rechte und linke ist eine ganz willkürliche. Die Flächen dieser beiden Gestalten haben gegen beide Rhomboeder dieselbe Lage und könnten daher ebensogut auf das Rhomboeder zweiter Ordnung wie auf das Rhomboeder erster Ordnung bezogen werden. Eben dies gilt auch von den rechten und linken dreiseitigen und symmetrisch sechsseitigen Prismen, welche gleichfalls gegen beide Rhomboeder dieselbe Lage haben.

Es dürfte nun wohl nicht möglich sein, nach Rose's Auffassung der Gestalten des Bergkrystalles ein Verständniss zu gewinnen, warum gerade mit den rechten Trapezoedern erster Ordnung die linken Trapezoeder zweiter Ordnung, und ebenso mit den linken Trapezoedern erster Ordnung die rechten Trapezoeder zweiter Ordnung zusammen auftreten. Nehmen wir dagegen die Krystalle als nach den Nebenaxen hemimorph, so liegt der Grund für jene Combination sofort klar vor. Die nach G. Rose's Bezeichnung rechten Trapezoeder erster und die linken Trapezoeder zweiter Ordnung und ebenso die linken Trapezoeder erster und die rechten Trapezoeder zweiter Ordnung gehören stets zu den positiven Enden der Nebenaxen. Die zusammen auftretenden Trapezoeder sind wohl meist ver-

---

*) Rechte und linke Trigonoeder unterscheiden sich dadurch, dass unter den Flächen des Hauptrhomboeders oder des Rhomboeders erster Ordnung die Flächen der ersteren rechts, die Flächen der zweiten links liegen. Trapezoeder erster Ordnung nennt G. Rose diejenigen, deren Flächen unterhalb der Flächen des Rhomboeders erster Ordnung, und Trapezoeder zweiter Ordnung diejenigen, deren Flächen unterhalb der Flächen des Rhomboeders zweiter Ordnung liegen. Je nach ihrer Lage zu den gleichnamigen Rhomboederflächen werden sie als rechte oder linke bezeichnet. Die Benennung der Prismen giebt ihre Lage in Bezug auf die Flächen des Rhomboeders erster Ordnung an.

schiedene Gestalten; vom blossen Standpunkte des Hemimorphismus aus betrachtet würde jedoch nichts entgegenstehen, dass die genannten Flächen denselben Trapezoedern angehörten; die Flächen der an einer Halbaxe auftretenden rechten und linken Trapezoeder würden dann eine hemimorphe Ausbildung der dihexagonalen Pyramide darstellen, bei welcher die Flächen nur an den positiven Enden der Axe erhalten sind.

Wenn wir der Einfachheit wegen nur die Flächen der scheinbar sechsseitigen Pyramide, des sechsseitigen, dreiseitigen und symmetrisch sechsseitigen Prismas, ferner die Flächen der dreiseitigen Pyramide (Rhombenflächen) und die Flächen der sogenannten unteren Trapezoeder in Betracht ziehen, und annehmen, dass die Flächen des trigonalen und symmetrisch sechsseitigen Prismas nur an den von Rose bezeichneten Stellen auftreten, so würden nach den von Rose aufgestellten Regeln die beim Bergkrystalle auftretenden Combinationen in den von mir gewählten Bezeichnungen folgende sein. Die Rose'schen Benennungen sind in Parenthese beigesetzt.

Sogenannte rechte Krystalle.

$-\left(r\frac{Pn}{2}\right)_{n=1}$ (Rhomboeder erster Ordnung bei G. Rose).

$+\left(r\frac{Pn}{2}\right)_{n=1}$ (Rhomboeder zweiter Ordnung).

$\left(r\frac{\infty Pn}{2}\right)_{n=1}$ (sechsseitiges Prisma).

$+2P2$ (dreiseitige Pyramide, rechtes Trigonoeder, rechte Rhombenflächen).

$+\left(l\frac{mPn}{2}\right)$ (rechtes Trapezoeder erster Ordnung).

$+\left(r\frac{mPn}{2}\right)$ (linkes Trapezoeder zweiter Ordnung).

$-\infty P2$ (linkes dreiseitiges Prisma).

$-\frac{\infty Pn}{2}$ (linkes symmetrisch sechsseitiges Prisma).

Sogenannte linke Krystalle.

$-\left(l\frac{Pn}{2}\right)_{n=1}$ (Rhomboeder erster Ordnung).

$+\left(l\frac{Pn}{2}\right)_{n=1}$ (Rhomboeder zweiter Ordnung).

$\left(l\frac{\infty Pn}{2}\right)_{n=1}$ (sechsseitiges Prisma).

$+2P2$ (dreiseitige Pyramide, linkes Trigonoeder, linke Rhombenflächen).

$+\left(r\frac{mPn}{2}\right)$ (linkes Trapezoeder erster Ordnung).

$+\left(l\frac{mPn}{2}\right)$ (rechtes Trapezoeder zweiter Ordnung).

$-\infty P2$ (rechtes dreiseitiges Prisma).

$-\frac{\infty Pn}{2}$ (rechtes symmetrisch sechsseitiges Prisma).

Die vorstehende Darstellung zeigt die wesentlichen Unterschiede zwischen meiner und der von G. Rose gegebenen Auffassung. Letzterer betrachtet die Flächen der Rhomboeder erster Ordnung bei rechten und linken Krystallen als gleichartig und ebenso die Flächen der Rhomboeder zweiter Ordnung. Dies sind sie aber, wie ich bereits in meiner früheren Abhandlung gezeigt habe und im Folgenden noch weiter nachweisen werde, durchaus nicht. Die Rhomboeder erster Ordnung sind bei sogenannten rechten Krystallen $-\left(r\frac{Pn}{2}\right)_{n=1}$, bei linken $-\left(l\frac{Pn}{2}\right)_{n=1}$, gehören also zwar stets zu denselben negativen Enden der Nebenaxen; in dem einen Falle gehört indess jede obere mit der bei der Rechtsdrehung folgenden unteren, im anderen Falle aber mit der bei der Linksdrehung folgenden unteren zusammen. Ebenso sind die von G. Rose als gleich betrachteten Rhomboeder zweiter Ordnung verschieden; sie gehören zwar sämmtlich den positiven Enden der Nebenaxen an, unterscheiden sich aber durch den Sinn der Drehung, in welcher sie mit den Rhomboedern erster Ordnung übereinstimmen. Ferner sind von G. Rose die beiden Trigonoeder als rechte und linke unterschieden; dieselben sind aber bei rechten und linken Krystallen dieselbe Gestalt; sie gehören stets zu den positiven Enden der Nebenaxen und enthalten keine Beziehung zur Drehung. Zu denselben positiven Enden gehören auch die Trapezoeder. Schliesslich unterscheidet G. Rose rechte und linke sowohl dreiseitige, als auch symmetrisch sechsseitige Prismen; ebenso wie die Trigonoeder sind aber alle dreiseitigen und alle symmetrisch sechsseitigen Prismen (vorausgesetzt, dass sie nur an den von Rose bezeichneten Stellen vorkämen) gleichartig; sie gehören sämmtlich den negativen Enden der Nebenaxen an.

Die obige Zusammenstellung der Flächen zeigt, dass dieselben zu den beiden Enden der Nebenaxen, den positiven und den nega-

tiven, eine feste Beziehung haben. Diejenigen Enden der Nebenaxen, zu welchen die sogenannten Rhomboeder erster Ordnung, die dreiseitigen und symmetrisch sechsseitigen Prismen gehören, sind die beim Erkalten der Krystalle negativen; die entgegengesetzten aber, zu welchen die Rhomboeder zweiter Ordnung, die dreiseitigen Pyramiden und die Trapezoeder gehören, die beim Erkalten positiven. Die Ausbreitung der von diesen Polen ausgehenden elektrischen Zonen, ob sie von rechts oben nach links unten, oder von links oben nach rechts unten verlaufen, wird durch die in den Rhomboedern ausgesprochene Drehung bestimmt.

II. Thermoelektricität.

A. Verfahren bei den Beobachtungen.

Es ist die Aufgabe dieser Abhandlung, wie auch bereits der Titel ausspricht, nicht blos die aktino- und piezoelektrischen Erscheinungen auf den Bergkrystallen im Allgemeinen nachzuweisen, sondern auch ihre Beziehungen zu den thermoelektrischen festzustellen. Dieser Umstand erfordert also die genaue Kenntniss der elektrischen Spannungen, welche durch die drei verschiedenen Erzeugungsweisen, durch Änderungen in der Temperatur, in der Bestrahlung und in dem Drucke, hervorgerufen werden.

Ich beginne mit den thermoelektrischen Vorgängen, weil solche sich am genauesten und speciellsten erforschen lassen, und uns deshalb eine geeignete Grundlage für die Beurtheilung der aktino- und piezoelektrischen Spannungen liefern werden.

In der oben erwähnten, im 13. Bd. dieser Abhandlungen veröffentlichten Untersuchung habe ich bereits die Gesetze der thermoelektrischen Vertheilung auf der Oberfläche der einfachen Bergkrystalle aufgestellt, und ich kann gleich hier bemerken, dass dieselben durch meine neueren Untersuchungen in allen Punkten bestätigt werden. Ich benutze aber die jetzt gegebene Veranlassung, um meine früheren Untersuchungen über die thermoelektrischen Eigenschaften des Bergkrystalles nach sogleich näher zu bezeichnenden Richtungen hin zu erweitern und zu vervollständigen.

In jener früheren Abhandlung ist bereits der Unterschied in der Lage der elektrischen Zonen bei sogenannten rechten und linken Krystallen hervorgehoben worden. Dieser Unterschied zeigt sich, besonders bei längeren Krystallen, am deutlichsten auf den sogenannten Pyramidenflächen. Bei dem früheren Verfahren, bei welchem die Krystalle gleich neben dem Elektrometer auf einem kleinen eisernen Ofen erhitzt wurden, liessen sich aber gerade diese Flächen bei längeren Individuen nicht gut untersuchen. Ausserdem hatte dieses Verfahren noch den Übelstand, dass es nicht möglich war, den Krystall in seiner ganzen Masse auf gleiche Temperatur zu bringen. Ich habe daher von Neuem die thermoelektrischen Spannungen nach dem in der letzten Zeit von mir fast ausschliesslich angewandten Verfahren, welches eine gleichmässige Erwärmung des ganzen Krystalles gestattet, gemessen*) und dabei der Bestimmung der elektrischen Vertheilung auf den Pyramidenflächen eine besondere Aufmerksamkeit zugewandt.

Die Aktinoelektricität tritt bei den Bergkrystallen besonders auf den Seitenkanten des sechsseitigen Prismas auf und es sind daher die meisten Beobachtungen über diesen Vorgang an den Kanten ausgeführt worden. Ein Gleiches gilt von den Vorgängen der Piezoelektricität, weil die Krystalle zumeist in der Richtung der Nebenaxen zusammengedrückt wurden. Zur sicheren Vergleichung der beiden genannten Vorgänge mit den thermoelektrischen Erscheinungen war daher die genaue Kenntniss des thermoelektrischen Verhaltens der Prismenkanten erforderlich. Während ich bei den früheren Versuchen die elektrische Beschaffenheit der Kanten nur aus den auf den prismatischen Seitenflächen gemachten Beobachtungen erschloss, habe ich jetzt die Kanten einer speciellen Prüfung unterworfen.

Bei den früheren Untersuchungen über die thermoelektrischen Eigenschaften des Bergkrystalles habe ich mich, um überhaupt erst eine klare Einsicht in die betreffenden Vorgänge zu gewinnen, vorzugsweise bemüht, einfache Krystalle zu verwenden. Nur als Beispiele, dass durch eine Verwachsung verschiedener Individuen die

*) Die Beobachtungen bei steigender Temperatur konnten ohne Nachtheil für die Kenntniss der Erscheinungen fortfallen, weil sämmtliche Versuche über die Thermoelektricität des Bergkrystalles gezeigt haben, dass die thermoelektrischen Polaritäten auf den verschiedenen Punkten der Oberfläche bei steigender Temperatur gerade die entgegengesetzten von den bei der Erkaltung auftretenden sind.

elektrischen Vertheilungen auf der Oberfläche überhaupt sich ändern, habe ich am Schlusse derselben die Beobachtungen an drei zusammengesetzten Bergkrystallen mitgetheilt, jedoch ohne näheren Nachweis des Zusammenhanges der elektrischen Vertheilung mit der Zusammensetzung. Bei den neuen Untersuchungen musste ich die zusammengesetzten Krystalle um so mehr in Betracht ziehen, als die Ermittelung der aktinoelektrischen Vorgänge grössere Krystalle erforderte, und solche meistentheils mehr oder weniger complicirte Verwachsungen darbieten.

Schliesslich habe ich noch dem Verhalten der Enden der Hauptaxe eine eingehende Prüfung gewidmet.

Zur Wahrnehmung und Messung aller im Folgenden durch Temperaturänderungen und ebenso der später durch Strahlung und durch Druck auf der Oberfläche der Bergkrystalle erzeugten Elektricitäten diente das von mir construirte und früher bereits beschriebene Elektrometer*), in welchem zwischen zwei Messingplatten, welche mit den Polen einer aus Zink-Kupfer-Wasser-Elementen bestehenden und in der Mitte abgeleiteten Säule verbunden sind, das untere Ende eines Goldblättchens hängt. Das obere Ende des letzteren sitzt an einem durch Schellack isolirten Messingstäbchen, welches oben einen sehr dünnen Platindraht trägt, dessen anderes Ende bei den Beobachtungen der thermoelektrischen Spannungen mit einem dickeren Platindraht verbunden ist. Das untere Ende dieses dickeren Platindrahtes wird mittelst einer Hebelvorrichtung**) den verschiedenen Stellen der Krystalloberfläche möglichst genähert, jedoch unter Vermeidung jedweder Berührung, und der dabei entstehende Ausschlag des Goldblättchens, welchen man auf dem Ocularmikrometer eines Mikroskops abliest, als Maass für die elektrische Spannung betrachtet.

---

*) Berichte der math.-phys. Klasse d. K. S. Ges. d. Wiss. für 1850. S. 74. (Poggend. Annal. Bd. 84, S. 28); diese Abhandl. Bd. V, S. 292, Bd. IX, S. 6 und Bd. XX, S. 206.

**) Da diese Vorrichtung in der Abhandlung vielfach erwähnt wird, so wiederhole ich auf Taf. III, Fig. IV die in Bd. XIV dieser Abhandlungen Taf. IV, Fig. 65 gegebene Abbildung derselben.

LL' ist ein messingener Hebel, dessen Drehungsaxe in *HH'* liegt. Am linken Ende *L* trägt er die Röhre *P*, in welcher ein Messingstab *Q* in beliebiger Höhe mittelst der Schraube *R* festgestellt wird. Durch eine am oberen Ende dieses Stabes befindliche Hülse geht ein zum Theil mit Schellack überzogener Glasstab *AT*, der an seinem linken Ende *T* einen 1^{mm} dicken Platindraht *V* trägt. Dieser dickere

Die Empfindlichkeit des Elektrometers wurde gewöhnlich so gewählt, dass die elektrische Spannungsdifferenz zwischen den Polen eines Daniell'schen Elementes einen Ausschlag von 50 Skalentheilen hervorbrachte*).

Platindraht *V* ist mit einem äusserst dünnen Platindraht *W* verbunden, dessen anderes Ende an dem das Goldblättchen des Elektrometers tragenden Messingstäbchen befestigt ist.

Neben dem Hebel *LL'* liegt ein zweiter *ll'*, welcher an seinem rechten Ende so gebogen ist, dass dieses rechte Ende oberhalb des entsprechenden Endes des Hebels *LL'* zu liegen kommt. An seinem linken Ende *l* trägt der Hebel die Messingröhre *p*, in welcher der Messingstab *q* in beliebiger Höhe mittelst der Schraube *r* festgestellt wird. Im oberen Ende dieses Messingstabes ist ein dreiseitiges Prisma *vv'* verschiebbar; an demselben sitzt eine starke Messingfeder *ww'*, an deren linkes Ende *w* ein senkrecht gegen sie gerichteter dicker Platindraht *uw* in horizontaler Lage angelöthet ist. Dieser zweite Hebel *ll'* und durch ihn der Draht *wu* steht fortwährend mit der Erde in leitender Verbindung. Berührt das obere Ende des Drahtes *V* den Draht *uw*, so ist also das Goldblättchen des Elektrometers abgeleitet. Durch Niederlassen des linken Armes des Hebels *L* wird der Draht *V* und das Goldblättchen isolirt, und es kann dabei das untere Ende des Drahtes *V* den verschiedenen Punkten der Oberfläche eines auf dem kleinen Ofen *B* stehenden Krystalles genähert werden. Beim Aufwärtsbewegen des Hebelarmes *L* stösst der Draht *V* wieder an den Draht *uw* und verbindet das Goldblättchen des Elektrometers mit der Erde. Um das untere Ende des Drahtes *V* über jeden Punkt der Krystallfläche bringen zu können, dienen zwei rechtwinklig gegeneinander gerichtete Schlittenbewegungen, welche durch die Schrauben *X* und *Y* bewirkt werden.

Die Grenzen der Bewegung des Hebels *LL'* werden durch die Stellung der Schrauben *K'* und *N'* bestimmt.

Ausführlicheres s. diese Abhandl. Bd. XIV. S. 379.

*) Da es sich bei der Bestimmung der eben bezeichneten Empfindlichkeit des Elektrometers nur um die Spannungen an den Polen eines nicht geschlossenen Elementes handelte, so liess sich ein für diesen Zweck brauchbares Normalelement sehr bequem und von fast unbegrenzter Dauer in folgender Weise herstellen.

Von drei weithalsigen, mittelst Korken verschliessbaren Gläsern wurde das erste mit einer concentrirten Lösung von reinem schwefelsauren Zinkoxyd, das zweite mit destillirtem Wasser und das dritte mit einer concentrirten Lösung von reinem schwefelsauren Kupferoxyd gefüllt, und auf den Boden des ersten und dritten Glases noch ein wenig festes Zinksalz und resp. Kupfersalz gebracht. Die Gläser standen gut isolirt mittelst Schellackfüssen auf einer gefirnissten Glasplatte. In das erste Glas tauchte ein amalgamirtes Stück reinen Zinkes, in das dritte ein Stück Kupfer. Durch zwei heberförmige Glasröhren, welche in der Mitte ihres horizontalen Theiles einen Glashahn zum Abschliessen enthielten und mit Wasser gefüllt waren, wurde nun das erste und ebenso das dritte Glas mit dem zweiten verbunden.

Die Krystalle wurden in Kupferfeilicht, das sich in kleinen kupfernen Schalen oder Kästchen befand, bis auf die zu prüfenden Theile ihrer Oberfläche eingehüllt, und in diesem Zustande einer höheren Temperatur so lange ausgesetzt, dass man ihre Temperatur als überall gleich annehmen durfte.

Da ein Theil der Bergkrystalle wegen ihrer Grösse nicht in den sonst angewandten*), aus doppelten Wänden mit dazwischen befindlichem Wasser bestehenden Gefässen erhitzt werden konnte, so geschah ihre Erhitzung in einem etwas grösseren kupfernen Kasten, welcher durch zwei Gasbrenner auf passender Temperatur erhalten wurde. Um aber auch hier eine ziemlich gleichmässige Temperatur zu erzielen, war in denselben, ungefähr 1^{cm} von seinen Wänden abstehend, noch eine zweite Hülle aus Eisenblech eingesetzt. In diese innere Hülle wurden die in Kupferfeilicht eingesetzten Krystalle gestellt und je nach ihrer Grösse $\frac{3}{4}$ bis $1\frac{1}{2}$ Stunde derselben hohen Temperatur ausgesetzt. Infolge des zu den verschiedenen Zeiten des Tages veränderlichen Druckes des Gases, welches die beiden unterhalb des kupfernen Gefässes befindlichen Flammen speiste, schwankte die Temperatur zwischen 120 bis 140° C. Der Vergleichung halber wurden meistens auch die kleineren Krystalle in derselben Vorrichtung erhitzt. Die Beobachtung der bei der Abkühlung auf den Krystallflächen auftretenden elektrischen Spannungen erfolgte, wenn die Temperatur auf 30° bis 40° gesunken war; bisweilen war die Abkühlung aber auch noch weiter vorgeschritten.

Ich habe eine grosse Anzahl (143) Bergkrystalle, sowohl einfache als zusammengesetzte untersucht, um eine möglichst vollständige Einsicht in die elektrischen Vorgänge nicht blos auf vollkommen regel-

---

Ich beabsichtigte ursprünglich jedes Mal, wenn die Spannungsdifferenz an den Polen dieses Elementes als Maass für die Empfindlichkeit des Elektrometers benutzt werden sollte, die Hähne zu öffnen, um die beiderseitigen Flüssigkeiten in Berührung zu bringen, und nach der Beobachtung wieder zu schliessen, um die Mischung der Flüssigkeiten zu verhindern. Es ergab sich aber, dass das Öffnen der Hähne gar nicht nöthig war; auch wenn sie geschlossen waren, zeigte sich an dem Zink und Kupfer, wenn der entgegengesetzte Pol abgeleitet war, stets dieselbe Spannung wie bei geöffneten Hähnen. Da sonach die Hähne nicht geöffnet zu werden brauchten, trat niemals eine Mischung der Flüssigkeiten ein und blieb das Element in unverändertem Zustande.

*) Diese Abhandl. Bd. XIV, S. 378.

mässig gestalteten, sondern auch auf den von der normalen Bildung abweichenden und ebenso auf zusammengesetzten Krystallen zu gewinnen. In diesem Abschnitte werde ich nun die Resultate dieser Versuche in möglichster Kürze zusammenzufassen.

Aus der oben angegebenen grossen Zahl von Bergkrystallen wähle ich für die speciellere Besprechung und Abbildung auf den beigegebenen Tafeln nur so viele aus, als zum Beweise der angeführten Resultate nothwendig sind. Ich bemerke nur noch, dass ich auch die früher geprüften und in der 1866 veröffentlichten Abhandlung bereits beschriebenen und abgebildeten Krystalle ebenfalls einer neuen Prüfung unterworfen habe; da dieselbe aber überall die älteren Beobachtungen bestätigte, so habe ich, mit Ausnahme von drei für die Bestimmung des elektrischen Verhaltens der Hauptaxe benutzten, keinen der früher untersuchten Krystalle unter die Abbildungen dieser Abhandlung aufgenommen; wo eine Beziehung auf dieselben nöthig wird, genügt es, auf die früheren Beobachtungen und Abbildungen im XIII. Bande dieser Abhandlungen zu verweisen.

Auf den dieser Abhandlung beigefügten Tafeln sind die Netze der Krystalle theils in natürlicher, theils in halber linearer Grösse (was durch die beigesetzten Brüche $\frac{1}{1}$ oder $\frac{1}{2}$ angedeutet ist) abgebildet. Nur drei kleine Krystalle Nr. 1, 2 und 3 mussten in doppelter Grösse ($\frac{2}{1}$) gezeichnet werden. Ich werde die einzelnen Prismenflächen in den Netzen mit den Zahlen 1 bis 6, und die Kanten durch die Zusammenstellung der beiden Zahlen, welche den in den Kanten zum Durchschnitt kommenden Flächen angehören, bezeichnen.

In die Netze sind die auf den einzelnen Flächen, wenn dieselben in ihrer ganzen Ausdehnung frei waren, durch die Annäherung der Spitze des Platindrahtes *V* beim Erkalten beobachteten elektrischen Spannungen eingetragen und der leichteren Übersicht wegen die positiven Zonen durch eine röthliche, die negativen durch eine grünliche Farbe kenntlich gemacht.

Bei der Annäherung des Platindrahtes *V* wirken aber auf diesen nicht blos die vertical unter seinem Ende befindlichen Theile des Krystalles, sondern auch die umliegenden Flächenstücke ein, und es kann unter Umständen die Polarität, welche gerade unter der Spitze des Platindrahtes *V* befindlich ist, durch eine stark entgegengesetzte Elektricität der nächsten Umgebungen verdeckt werden. So erscheint

z. B. der linke Rand der Prismenflächen 2 und 6 beim Krystall Nr. 4 in dem Netze negativ, obwohl an beiden Rändern noch schwache positive Spannung vorhanden ist, die aber durch die benachbarte stärker wirkende negative Elektricität verdeckt wird. Von dieser positiven Beschaffenheit der linken Ränder der beiden genannten Flächen kann man sich sofort überzeugen, wenn man bei einem neuen Versuche nur den linken Rand dieser Flächen frei lässt und den übrigen grösseren Theil derselben mit Kupferfeilicht bedeckt.

Da wie bereits oben bemerkt, für die aktino- und piezoelektrischen Vorgänge die genauere Kenntniss des thermoelektrischen Verhaltens der Prismenkanten von besonderer Wichtigkeit ist, so habe ich diese Kanten speciell auf ihre thermoelektrischen Spannungen untersucht, wobei sie allein nebst schmalen anliegenden Streifen der in ihnen zusammenstossenden Flächen aus dem Kupferfeilicht hervorragten. In den meisten Fällen sind die auf ihnen ausgeführten Beobachtungen auf die mit B bezeichneten Kantenlinien eingetragen worden.

B. Gesetze der thermoelektrischen Vorgänge auf den Bergkrystallen.

a. Möglichst einfache Krystalle.

α. An beiden Enden möglichst normal gebildete Krystalle.

Zu dieser Abtheilung gehören drei der auf den Tafeln abgebildeten Krystalle.

Krystall Nr. 1. Der Krystall Nr. 1 stammt von Middleville und ist mir durch Herrn Bergrath Weisbach aus der Freiberger Sammlung geliehen worden. Er ist vollständig wasserhell und trägt sämmtliche sechs Rhombenflächen in normaler Lage. An dem oberen Ende wechseln grosse und kleine Pyramidenflächen regelmässig ab; am unteren gewinnt aber wahrscheinlich infolge der daselbst stattgehabten Anwachsung die unterhalb 6 liegende Pyramidenfläche eine grössere Ausdehnung. Ausser der durch die oben erwähnte Anwachsung bedingten Verletzung findet sich noch eine ähnliche auf der Fläche 1. Der Krystall ist ein linker und Fig. 1, Taf. I stellt sein Netz in doppelt linearer Grösse dar.

Krystall Nr. 2. Fig. 2, Taf. I bildet das Netz dieses aus Herkimer Country stammenden Krystalles in doppelt linearer Grösse ab. Derselbe,

ebenfalls ein linker, trägt 5 Rhombenflächen in normaler Lage; wo die sechste oben auf der Kante (5, 6) erscheinen sollte, ist der Krystall etwas verletzt. Am oberen Ende wechseln grosse und kleine Pyramidenflächen ab; am unteren Ende ist aber eine Störung eingetreten, infolge deren die unteren Flächen 2 und 3 gewissermassen ihre Grösse vertauscht haben.

Krystall Nr. 3. Der Fig. 3, Taf. I gleichfalls in doppelter Grösse gezeichnete Krystall stammt aus derselben Gegend, wie der vorige, ist aber ein rechter; er besitzt 5 Rhombenflächen in normaler Lage. Die sechste, unten auf die Kante (3, 4) fallende, ist nicht sichtbar. Am oberen und unteren Ende wechseln grosse und kleine Pyramidenflächen ab, wenn auch öfter der Unterschied in der Grösse nicht sehr erheblich ist. Die unterhalb 3 liegende Pyramidenfläche ist sehr unvollkommen ausgebildet.

Die Hauptschwierigkeit für die Aufstellung eines Gesetzes über die thermoelektrische Vertheilung auf der Oberfläche der Bergkrystalle bildete der Mangel an ringsum vollkommen normal ausgebildeten Individuen, und es dürfte wohl kaum ein Krystall existiren, an welchem in aller Strenge die Gestaltung absolut regelmässig ist. Ein vollkommen normal gebildeter Bergkrystall sollte an jedem Ende abwechselnd grosse und kleine Pyramidenflächen tragen und zwar dergestalt, dass jede Prismenfläche, über welcher oben eine grosse Fläche liegt, unten eine kleine besitzt und umgekehrt; ausserdem müssten auf den abwechselnden Kanten die sogenannten Rhombenflächen, oder auch Trapezoederflächen erscheinen. Auf den oben beschriebenen drei möglichst vollständig ringsum ausgebildeten kleinen Bergkrystallen fanden sich ausser den Prismen- und Pyramidenflächen nur noch die Rhombenflächen; Trapezoederflächen habe ich an ihnen nicht wahrzunehmen vermocht.

Nach der von mir oben S. 473 aufgestellten Bezeichnung treten also an den obigen Krystallen mit den Flächen des sechsseitigen Prismas bei den beiden linken Individuen Nr. 1 und 2 die Flächen $-\left(l\frac{Pn}{2}\right)_{n=1}$, $+\left(l\frac{Pn}{2}\right)_{n=1}$ und die Flächen $+2P2$, bei dem rechten Nr. 3 dagegen die Flächen $-\left(r\frac{Pn}{2}\right)_{n=1}$, $+\left(r\frac{Pn}{2}\right)_{n=1}$ und die Flächen $+2P2$ in Combination. Der Kürze wegen werde ich jedoch im Folgenden die sämmtlichen gegen die Axe geneigten Flächen

allgemein als Pyramidenflächen, und wo eine Unterscheidung sich nöthig macht, die grösseren Flächen als Hauptrhomboeder- und die kleineren als Nebenrhomboederflächen bezeichnen.

Die thermoelektrische Vertheilung auf solchen Krystallen habe ich bereits in meiner früheren Abhandlung (Bd. XIII, S. 380) vollständig dargelegt und ich kann jetzt nur die an jenem Orte gemachten Angaben wortgetreu wiederholen. Es heisst daselbst:

»In einem an beiden Enden der Hauptaxe gleich vollkommen ausgebildeten einfachen Bergkrystalle treten beim Erkalten sechs elektrische Zonen, abwechselnd negativ und positiv, auf, und zwar gehen die negativen Zonen von den Flächen des Hauptrhomboeders am oberen Ende schief abwärts zu einer nächsten Fläche eben dieses Hauptrhomboeders am unteren Ende, während die positiven Zonen sich in gleich schiefer Richtung zwischen entsprechenden Flächen des Gegenrhomboeders erstrecken. Wir können hiernach, im Anschluss an die übliche Ausdrucksweise, dem Bergkrystalle sechs elektrische Pole, abwechselnd positiv und negativ, oder drei an ihren Enden entgegengestetzte elektrische Axen, die mit den sogenannten Nebenaxen der sechsseitigen Pyramide zusammenfallen, zuschreiben.«

»Die schiefe Richtung, in welcher sich die elektrischen Zonen von dem oberen Ende nach dem unteren ziehen, ist nun aber bei den beiden Modificationen des Bergkrystalles verschieden; sie ist nämlich stets parallel mit den Streifungen der Rhombenflächen, oder parallel mit den Combinationskanten dieser Flächen mit den Flächen des Hauptrhomboeders. Hieraus folgt, dass die positiven Zonen, welche zwischen den Flächen der Nebenrhomboeder liegen, stets über diejenigen Prismenkanten hinweggehen müssen, welche an ihrem oberen und unteren Endpunkte Rhombenflächen tragen, oder dass die positiven Pole oder die positiven Endpunkte der elektrischen Axen in die Mitten der eben bezeichneten verticalen Kanten des Prismas fallen, während die negativen Pole oder negativen Endpunkte den dazwischen liegenden Prismenkanten angehören«*).

*) Es ist diese Wiederholung nöthig geworden durch einen Aufsatz des Herrn Ch. Friedel in dem 2. Bd. des Bulletin de la Société minéralogique de France, 1879, S. 31: »Sur la pyroélectricité dans la topaze, la blende et le quartz. Herr Friedel führt in dieser Note nur die von mir auf den an beiden Enden regelmässig ausgebildeten rechten Krystallen nachgewiesene Lage der elektrischen Zonen



Bei den linken Krystallen Nr. 1 und Nr. 2 (Fig. 1 und 2) *) erstrecken sich die elektrischen Zonen im Allgemeinen schief von links oben nach rechts unten, bei dem rechten Krystalle Nr. 3 **) dagegen schief von rechts oben nach links unten; dabei gehen, wie dies zuvor angegeben, die positiven Zonen über diejenigen Prismenkanten, welche die Rhombenflächen tragen, während die negativen Zonen auf die nicht mit Rhombenflächen versehenen Kanten fallen.

Durch die oben S. 482 angedeuteten, infolge von Störungen im Wachsthum eingetretenen Abweichungen von der normalen Bildung der Krystalle wird die regelmässige Lage der elektrischen Zonen etwas abgeändert und verschoben, sodass z. B. eine Kante, welche positive Spannung zeigen sollte, infolge einer Ausdehnung der benachbarten negativen Zone negativ erscheint. Dies findet statt auf der Kante (1, 2) ***) des Krystalles Nr. 1, und auf der Kante (1, 2)

---

an, und glaubt eine, wie er sich ausdrückt, mit der Natur des Bergkrystalles besser übereinstimmende Vertheilung aufzustellen, indem er sagt: »que les arètes alternatives dans les cristaux simples sont de signe électrique opposé et sont de la même manière dans toute leur étendue. Les arètes qui portent les faces rhombes ont toujours donné une tension positive par le contact avec le plan d'épreuve chauffée (mit einer heissen Kugel, also bei steigender Temperatur), les arètes opposées donnant une tension négative. Les axes horizontaux du trigonoèdre, c'est à dire les diagonales de la base du prisme hexagonal du quartz seraient donc les axes de pyroélectricité«. Was nun die von Friedel bezeichnete Lage der elektrischen Pole überhaupt betrifft, so ist dies, wie man sieht, genau die von mir bereits im Jahre 1866 angegebene; dagegen ist die specielle Bestimmung Friedel's über diejenigen Kanten des Prismas, auf welchen beim Erkalten die positiven und negativen, oder beim Erwärmen die negativen und positiven Elektricitäten auftreten, unrichtig; die von Herrn Friedel auf den einzelnen Kanten angegebenen Polaritäten sind den von mir nachgewiesenen gerade entgegengesetzt. In den obigen Aussprüchen lauten sie zwar gleich, aber Friedel's Angaben beziehen sich auf die Erwärmung, während die meinigen für die Abkühlung gelten. Erst in dem nächsten Abschnitte kann ich erläutern, wie Herr Friedel zu diesen umgekehrten Angaben verleitet worden ist; es sei hier nur kurz bemerkt, dass er mittelst seines Verfahrens gar nicht die thermoelektrischen, sondern die aktinoelektrischen Erregungen beobachtet hat.

*) Ebenso auch bei dem ringsum ausgebildeten linken Krystalle Nr. 11 der früheren Abhandlung.

**) Ebenso bei den Krystallen Nr. 1 und 2 der früheren Abhandlung.

***) Die auf den Prismenkanten beobachteten Elektricitäten sind, wie schon bemerkt, auf den mit *B* bezeichneten geraden Linien angegeben.

des Krystalles Nr. 3, während bei dem Krystalle Nr. 2 die Kanten in regelmässiger Abwechslung positiv und negativ erscheinen.

Die schiefe Lage der elektrischen Zonen spricht sich auch noch in dem Umstande aus, dass an normal gebildeten Stellen auf den einer Kante anliegenden Stücken der beiden sie bildenden Prismenflächen die Intensitäten der elektrischen Spannungen in entgegengesetzten Richtungen wachsen und abnehmen. Auf dem zwischen den Flächen 2 und 4 liegenden, ganz normal gebildeten Theile des Krystalles Nr. 1 nimmt z. B. die negative Elektricität neben der Kante (2, 3) auf der Fläche 2 von oben nach unten ab, auf der Fläche 3 aber zu; einen gleichen Verlauf zeigt die positive Spannung neben der Kante (3, 4).

Sehr charakteristisch für den Unterschied der rechten und linken Bergkrystalle ist das elektrische Verhalten der sogenannten Pyramidenflächen. Bei linken Krystallen nimmt am oberen Ende auf den Flächen $-\left(l\frac{Pn}{2}\right)_{n=1}$ (des sogenannten Hauptrhomboeders) die elektrische Spannung nach rechts hin im negativen Sinne zu. Entweder zeigt der an die Prismenfläche grenzende Theil jener Flächen blos negative, nach rechts hin wachsende Polarität (Nr. 1 obere Fläche 2, 4 und 6; Nr. 2 obere Fläche 2 und 4), oder es geht die am linken Ende noch auftretende positive nach rechts hin in die negative über (Nr. 2 obere Fläche 6). An dem unteren Ende wachsen die negativen Spannungen in der Richtung von rechts nach links, d. h. diese unteren Flächen gleichen vollständig den am oberen Ende liegenden, wie man sofort erkennt, wenn man den Krystall umkehrt und dadurch sein unteres Ende zum oberen macht. Es darf ja auch bei ringsum normal ausgebildeten Krystallen kein Unterschied entstehen, mag das eine oder das andere Ende der Hauptaxe zum oberen gewählt werden; die Richtung der elektrischen Zonen muss dieselbe bleiben.

Während auf den grossen Flächen $-\left(l\frac{Pn}{2}\right)_{n=1}$ am oberen Ende die negative Spannung in der Richtung von links nach rechts zunimmt, wächst auf den kleinen Flächen $+\left(l\frac{Pn}{2}\right)_{n=1}$ dieses Endes in derselben Richtung die positive, wobei der an die Prismenfläche grenzende Theil entweder in seiner ganzen Ausdehnung positiv ist

(Nr. 1 obere Fläche 1, Nr. 2 obere Fläche 1 und 5) oder am linken Rande noch negative Spannung zeigt, die nach rechts hin in die positive übergeht (Nr. 1 obere Fläche 3 und 5).

In gerade entgegengesetzter Richtung ändern sich nun die Intensitäten der elektrischen Spannungen auf den rechten Krystallen. Auf den grossen Flächen $-\left(r\frac{Pn}{2}\right)_{n=1}$ des oberen Endes wachsen die Intensitäten von rechts nach links im negativen Sinne (Nr. 3 Fläche 1, 3 und 5) und in positivem Sinne auf den kleinen Flächen $+\left(r\frac{Pn}{2}\right)_{n=1}$ (Nr. 3 Fläche 4 und 6).

Die Flächen des sogenannten Hauptrhomboeders (und ebenso des Nebenrhomboeders) sind also nicht wie aus der von G. Rose gegebenen Darstellung folgen würde, bei rechten und linken Krystallen gleichartig, sondern von einander sehr verschieden, wie ich dies schon oben S. 474 ausgesprochen habe.

Der im Vorstehenden hervorgehobene Unterschied zwischen linken und rechten Bergkrystallen setzt uns in den Stand, bei einem einfachen Krystalle, welcher zwar die Flächen des sogenannten Haupt- und Nebenrhombeders deutlich erkennen lässt, aber weder Rhomben- noch Trapezflächen, also kein äusseres Merkmal zur Erkennung der Drehungsrichtung an sich trägt, durch die thermoelektrische Prüfung einer einzigen Rhomboederfläche zu entscheiden, ob derselbe ein linker oder ein rechter ist.

An Stelle der Prüfung einer Rhomboederfläche kann bei einem solchen Krystalle auch die Bestimmung des thermoelektrischen Verhaltens einer Prismenkante treten. Liegt die untersuchte Kante z. B. am oberen Ende zur Rechten einer grossen Rhomboederfläche, so ist der Krystall ein linker, wenn diese Kante negativ, dagegen ein rechter, wenn sie positiv ist.

Da sehr häufig, wenigstens das eine (obere) Ende der Bergkrystalle ziemlich normal ausgebildet ist, so treten auf den Rhomboederflächen an diesem Ende nicht leicht Verschiebungen der elektrischen Zonen auf, und es genügt daher zur sicheren Bestimmung der Links- oder Rechtsdrehung die Prüfung einer einzigen dieser Flächen. Dagegen erscheinen, wie ich oben gezeigt habe, solche Verschiebungen wohl auf den Seitenflächen und Kanten, wenn das untere Ende etwas von der normalen Gestaltung abweicht, und es wird dann

der Prüfung mehrerer Kanten oder Prismenflächen bedürfen, um sicher zu sein, dass die auf einer Kante beobachtete Polarität der normalen entspricht.

β. Krystalle mit abweichender Ausbildung der Enden.

Von der S. 482 beschriebenen normalen Ausbildung weicht nun die Gestalt sehr vieler Bergkrystalle ab*). Es kann, und dies ist ein oft eintretender Fall, das eine (obere) Ende noch die normale Anordnung und Grösse der Pyramidenflächen behalten, während sich an dem anderen (unteren) Abweichungen zeigen. Sehr häufig sind dabei die folgenden beiden Formen:

Es kommt öfter die Bildung vor, dass, während das eine (obere) Ende noch seine normale Gestalt behält, an dem anderen (unteren) nur eine Fläche des Hauptrhomboeders sich vorzugsweise entwickelt (Nr. 4).

Sodann erscheinen häufig an dem zweiten (unteren) Ende zwei grosse Pyramidenflächen, aber unterhalb zweier einander gegenüberliegenden Prismenflächen, sodass sie durch ihren Durchschnitt eine kürzere oder längere Schneide bilden. An den Enden dieser Schneide liegen dann die übrigen vier kleinen Flächen von nahe gleicher Grösse (Nr. 5, 6 und 7).

Bei sehr vielen Krystallen zeigen beide Enden der Hauptaxe Abweichungen von der normalen Bildung. Ich werde mich jedoch zum Nachweise eines Zusammenhanges zwischen der Gestaltung der Pyramidenflächen und der elektrischen Vertheilung im Folgenden auf die Mittheilung der Beobachtungen an solchen Krystallen beschränken, bei welchen wenigstens das eine (obere) Ende der Hauptaxe noch regelmässig ausgebildet ist; dieser Umstand gewährt den Vortheil, dass wir, von einer normalen elektrischen Vertheilung am oberen Ende ausgehend, die Abweichungen von derselben nach dem unteren Ende deutlich verfolgen können.

Zufällig gehören die sämmtlichen vier in diesem Paragraphen behandelten Krystalle zu den sogenannten linken. Der Krystall Nr. 4 (Fig. 4, Taf I) stammt aus der Schweiz, die drei übrigen Krystalle Nr. 5,

*) Es ist dies jedenfalls eine Folge kleiner in einer um 60° oder 180° gedrehten Stellung eingewachsener Stücke.

6 u. 7 (Fig. 5, 6 u. 7, Taf. I) von Striegau oder Järischau in Schlesien. Die Masse von Nr. 4, 6 und 7 ist wasserhell, während sie bei Nr. 5 trübe erscheint. Bei Nr. 4 sind die beiden Prismenflächen 1 und 2 mit einem Anfluge eines grauröthlichen Pulvers bedeckt; bei Nr. 7 bildet das untere Ende eine doppelte Schneide.

Das obere Ende zeigt bei den Krystallen Nr. 4, 5, 6 und 7 in regelmässiger Abwechselung drei grosse und drei kleine Rhomboederflächen *). Infolge dessen tritt die normale Vertheilung auf sämmtlichen oberen Pyramidenflächen hervor und es erhält sich diese normale Vertheilung auch noch in den oberen Theilen der Prismenflächen; ja bei Nr. 4, bei welchem die Abweichung in der Bildung des unteren Endes wohl die geringere ist, zeigen sämmtliche Prismenkanten in ihrer ganzen Länge, sowie auch am unteren Ende die an die Prismenflächen grenzenden Theile der grossen Pyramidenfläche 3 und der ihr links anliegenden Fläche 2 die normalen Polaritäten **). Bei den Krystallen Nr. 5, 6 und 7 treten dagegen schon auf den Prismenflächen Abweichungen ein; es bleiben zwar noch die sämmtlichen sechs Zonen, abwechselnd positiv und negativ, sichtbar, doch dehnen sich einzelne ungewöhnlich aus, sodass bei dem Krystall Nr. 6 die Kante (2, 3) und bei Nr. 7 die Kanten (2, 3) und (4, 5) nur in ihren oberen Theilen die normale negative Spannung zeigen; bei dem Krystall Nr. 5 besitzt die Kante (5, 6) in ihrer ganzen Länge negative Spannung anstatt positiver. Am unteren Ende findet sich bei den drei letzteren Krystallen auf einem Theile der Flächen noch die normale elektrische Vertheilung: bei Krystall Nr. 5 auf den unteren Pyramidenflächen 1, 2 und 3; bei Nr. 6 auf den Pyramidenflächen 3 und 4 und bei Nr. 7 auf den Pyramidenflächen 1, 2 und 4. Sehr stark ist dagegen die Störung auf der unteren Pyramidenfläche 5 bei dem Krystalle Nr. 5 ***).

*) Die Krystalle Nr. 4 und 6 entwickelten sehr starke Elektricität; es musste daher die Empfindlichkeit des Elektrometers verringert werden. Während sonst ein Daniell'sches Element einen Ausschlag von 50 Skth. erzeugte ($NE = 50$) S. 478, brachte es jetzt nur einen Ausschlag von 7,5 Skth. hervor, was in der Zeichnung durch das Zeichen $NE = 7,5$ angedeutet ist.

**) Die in der Mitte der grossen Pyramidenfläche 3 am unteren Ende auftretende positive Elektricität wird später S. 502 ihre Erklärung finden.

***) Die Vergleichung dieser Fläche 5 mit der oberen Pyramidenfläche 3 des Krystalles Nr. 14 und der Pyramidenfläche 6 des Krystalles Nr. 16 zeigt deutlich,

Auf den prismatischen Seitenflächen hat bei dem Krystall Nr. 6 die negative Polarität eine grössere Ausdehnung als die positive; dafür erscheint die positive auf den Pyramidenflächen des unteren Endes vorwaltend. Umgekehrt verhält sich der Krystall Nr. 7; bei ihm überwiegt auf den Prismenflächen die positive Spannung, dagegen auf den Pyramidenflächen des unteren Endes die negative.

Während das obere Ende (Spitze) bei den Krystallen Nr. 4, 5, 6 und 7, wie dies schon aus der elektrischen Vertheilung auf den daselbst befindlichen Pyramidenflächen hervorgeht, positive Spannung besitzt, zeigt sich nur bei den Krystallen Nr. 5 und 6 die Schneide am unteren Ende positiv, dagegen die untere Spitze bei Nr. 4 und die gespaltene Schneide bei Nr. 7 negativ.

γ. Nur an dem einen Ende ausgebildete, an dem andern aber angewachsen gewesene, und jetzt verbrochene Krystalle.

Während einfache, ringsum möglichst normal ausgebildete Bergkrystalle sehr selten sind, und wohl stets auch nur eine geringe Grösse besitzen, ist die Anzahl derjenigen einfachen Krystalle, welche an dem einen Ende ziemlich normal gestaltet, an dem anderen aber ursprünglich angewachsen gewesen und dann abgebrochen worden, viel beträchtlicher und auch die Grösse derselben oft sehr ansehnlich. Ich habe auf den Tafeln die Netze von sechs derselben und zwar die grösseren nur in halber linearer Grösse abgebildet. Vier derselben Nr. 8, 9, 10 und 11 sind linke Krystalle, die beiden anderen Nr. 12 und 13 rechte. Der Krystall Nr. 8 ist ganz farblos; bei den Krystallen Nr. 9 und 12 ist zwar die Masse auch farblos, aber ihre Oberfläche wird, namentlich auf den Pyramiden- und Trapezoederflächen, mit einem feinen grünen Staube von Helminth bedeckt. Die drei anderen Krystalle sind nelkenbraun, Nr. 10 und 11 dunkler als Nr. 13. Der Krystall Nr. 8 stammt vom St. Gotthard, Nr. 9 von Tavetsch, Nr. 10, 11 und 13 aus dem Maderaner Thal und Nr. 12 vom Kreuzlipass aus der Schweiz. Die braun gefärbten Krystalle liefern den Beweis, dass der Farbstoff, der jedenfalls aus Kohle besteht, die Entstehung und Anhäufung der Elektricität nicht hindert.

---

dass die Störung auf der vorliegenden Fläche 5 durch die Anwesenheit eines um 180° gedrehten Stückes hervorgebracht wird.

Ausser den Flächen des Prismas und der beiden Rhomboeder finden sich an diesen Krystallen noch Trapezoederflächen in regelmässiger Anordnung*); die Rhombenflächen sind nicht immer vorhanden. An dem Krystall Nr. 12, welcher auch an seinem unteren Ende noch Reste von zwei Rhomboederflächen trägt, sind sogar alle sechs Trapezoederflächen (in der Figur mit α bezeichnet) vorhanden.

Der Krystall Nr. 12 zeigt auf den Flächen 4 und 5 wiederholte Abstufungen und Absätze; ferner sind auf einigen anderen Flächen Nähte sichtbar; dennoch ist er aber durchaus einfach; auf allen Absätzen finden sich in richtiger Lage die Trapezoederflächen.

Die Flächen des Hauptrhomboeders zeigen bei den linken Krystallen Nr. 8, 9, 10 und 11 am linken Rande positive, am rechten negative Spannung. Bei den beiden rechten Krystallen Nr. 12 und 13 haben die beiden Polaritäten auf den Hauptrhomboederflächen die umgekehrte Lage. Ob auf den kleinen Flächen des Nebenrhomboeders beide Elektricitäten am unteren Rande auftreten, oder nur eine, die positive oder die negative, hängt von der speciellen Bildung an der betreffenden Stelle ab. Ist die kleine Fläche mehr über den positiven Theil der Prismenfläche gestellt, so erscheint sie überall positiv (Nr. 9, Fläche 3); liegt sie mehr über dem negativen Theile der Prismenfläche, so besitzt sie überall negative Spannung (Nr. 9 Fläche 1, Nr. 12 Fläche 2), während sie bei einer mittleren Stellung an der einen Seite positive, an der anderen negative Elektricität zeigt (Nr. 9 Fläche 5, Nr. 12 Fläche 4).

Da die elektrische Vertheilung auf den Prismenflächen und den prismatischen Seitenkanten regelmässig ist, habe ich die Kanten und die auf ihnen beobachteten Spannungen nicht besonders dargestellt.

b. Zusammengesetzte Krystalle.

Die meisten grösseren Bergkrystalle erscheinen zwar äusserlich als einfache Individuen, besitzen aber dessenungeachtet gewöhnlich nicht in ihrer ganzen Masse dieselbe Orientirung der Moleküle.

---

*) Bei Krystall Nr. 13 erscheint oben an einer Kante (2, 3) bei α auch eine sehr schmale Trapezoeder- oder Rhombenfläche; ein Beweis, dass hier ein kleines um 180° gedrehtes Stück eingeschoben ist. Infolge dessen wird die negative Spannung an dieser Stelle aufgehoben.

Man betrachtet solche Krystalle als Zwillinge, bei welchen zwei Individuen mit parallelen Hauptaxen, aber in einer um 60° oder 180° verschiedenen Stellung so miteinander verwachsen sind, dass die äusseren Begrenzungen beider die Gestalt eines einfachen Krystalles darbieten.

Aus Mangel an geeigneten Krystallen muss ich mich in den folgenden Mittheilungen auf solche Zwillingskrystalle beschränken, bei welchen die beiden verwachsenen Individuen gleichartig, also beide entweder rechte oder linke sind. Für solche steht mir aber ein ziemlich reichliches Material zur Verfügung.

Als äusseres Kennzeichen solcher Verwachsungen zweier gleichartigen Individuen dient die Lage der Trapezoeder- und Rhombenflächen; ein Auftreten derselben auf benachbarten Kanten bezeichnet im Allgemeinen ein daselbst in anderer Orientirung befindliches Stück. Auch kann die Beschaffenheit der Prismen- oder Pyramidenflächen, nämlich die auf ihnen sichtbaren Nähte*), sowie Unterschiede der durch diese Nähte getrennten Flächenstücke in Glanz und Glätte darauf hinweisen**).

Wenn ein Bergkrystall um 60° oder 180° gedreht wird, so hat dies in elektrischer Beziehung den Erfolg, dass an die Stelle einer positiven Halbaxe eine negative tritt, und umgekehrt. Sind also einzelne Stücke eines Bergkrystalles gegen die Hauptmasse desselben verdreht, so muss sich dies in einer Störung der elektrischen Vertheilung an der betreffenden Stelle kundgeben, und umgekehrt kann die Beobachtung solcher Störungen verwendet werden, um die Orientirung der Moleküle zu erkennen.

α. Ringsum ausgebildete Krystalle.

Krystall Nr. 14. Eine eigenthümliche Bildung zeigt der Fig. 14 in seinem Netze gezeichnete rauchbraune linke Krystall Nr. 14 aus dem Maderaner Thal. In seiner unteren Hälfte ist er einfach; da-

*) Dass das blosse Auftreten von scheinbaren Nähten kein untrügliches Zeichen der Zusammensetzung von verschieden orientirten Stücken liefert, habe ich oben S. 490 angedeutet.

**) Gar sehr bedauere ich, dass ich auf eine optische Prüfung der Krystalle habe verzichten müssen; es fehlt hier aber an jeder Gelegenheit, Bergkrystalle schleifen und schneiden zu lassen. Eine Versendung nach auswärts hätte nicht viel nützen können; ohne specielle Beaufsichtigung lassen sich eben solche ins Einzelne gehende Untersuchungen nicht durchführen.

gegen enthält er in seiner oberen Hälfte ein kleineres Stück in einer um 180° gedrehten Stellung.

Am unteren Ende liegen die Trapezoederflächen regelmässig abwechselnd auf den Kanten (1, 2), (3, 4), (5, 6); in halber Höhe findet sich auch auf der Kante (1, 2) bei β die obere Trapezoederfläche. Dagegen treten am oberen Ende zwar zwei dieser Flächen auf den Kanten (3, 4) und (5, 6) auf, die dritte ist aber von der Kante (1, 2) auf die Kante (2, 3) verschoben. Die Grenze des in der oberen Hälfte eingeschobenen, um 180° gedrehten Stückes geht von der Mitte der Kante (1, 2), wo bei β die Trapezoederfläche liegt, auf der Fläche 1 durch eine Naht deutlich erkennbar nach links oben (nach α), sodass sie die Pyramidenfläche oberhalb 1 noch einschliesst. Von der Mitte β der Kante (1, 2) läuft ferner die Grenze über die Fläche 2 bis zur Kante (2, 3) nach γ, steigt dort nach oben (δ) und schliesst dann die linke Hälfte der Pyramidenfläche über 3 noch ein (ε). Diese letztere Pyramidenfläche (über 3) ist durch eine Naht in eine linke stark glänzende und in eine weniger glänzende rechte Hälfte getheilt; die linke Hälfte gehört dem Hauptrhomboeder, die rechte dem Nebenrhomboeder an.

Mit der zuvor angegebenen, aus äusseren Kennzeichen hergeleiteten Bildung des Krystalles stimmt nun auch die elektrische Vertheilung auf seiner Oberfläche überein. In der unteren Hälfte ist die Vertheilung vollständig normal, und dasselbe gilt auch von der oberen Hälfte mit Ausschluss des zuvor bezeichneten Theiles. Die normale Vertheilung findet sich also hier oben von der Prismenkante (2, 3) und der Mitte der Pyramidenfläche oberhalb 3 nach rechts hin auf den Flächen 3, 4, 5 und 6 bis zur Mitte der Prismenfläche 1. Die oberhalb 1 liegende Pyramidenfläche gehört schon dem gedrehten Theile an; sie verhält sich wie eine Fläche des Hauptrhomboeders und ebendies gilt von der linken Hälfte der Pyramidenfläche 3, während die rechte Hälfte dieser letzteren Fläche wie bereits zuvor erwähnt, dem Nebenrhomboeder angehört. Infolge dessen entsteht auf der Pyramidenfläche 3 die eigenthümliche elektrische Vertheilung, dass die Mitte der Fläche negativ ist, der linke und rechte Rand aber positive Spannung zeigen*). Die obere Hälfte

*) Dieser Vertheilung gleicht genau die auf der unteren Pyramidenfläche 5 des Krystalles Nr. 5 beobachtete; nur sind die Polaritäten die entgegengesetzten.

der Prismenkante (1, 2) ist, der Stellung dieses Theiles entsprechend, negativ (Fig. 14 *B*). Da die Grenze in der Kante (2, 3) aufwärts steigt, so tritt auf dieser Kante auch oben die normale negative, jedoch nur in geringer Intensität auf.

β. Nur an dem einen Ende ausgebildete, an dem anderen verbrochene Krystalle.

Die Stücke, welche gegen die Hauptmasse eines Krystalles gedreht erscheinen, sind bald kleiner, bald grösser und können auch in getrennten Theilen auftreten. Ich werde mit dem einfachsten Falle beginnen, wo nur ein Stück von geringer Ausdehnung eingeschoben ist.

Krystall Nr. 15. Der linke Krystall Nr. 15 (in den Figuren 15 in halber linearer Grösse dargestellt) aus dem Maderaner Thale trägt am oberen Ende die Trapezoederflächen auf den Kanten (1, 2) und (3, 4), aber nicht auf der Kante (5, 6); dafür erscheint jedoch eine Trapezoederfläche unten auf der Kante (4, 5) bei *β*. Der Krystall enthält ein in gedrehter Stellung befindliches Stück von der rechten Hälfte der Fläche 4 bis zum rechten Rande der Fläche 5, wie dies der Fig. 15 *A* gezeichnete, durch die Mitte des Krystalles gelegte Querschnitt nachweist, wo das eingeschobene Stück durch die Linie *abc* angedeutet ist. In diesen Querschnitt (Fig. 15 *A*) sind auch die auf den Kanten in der Mitte des Krystalles beim Erkalten beobachteten elektrischen Spannungen eingetragen.

Die Vertheilung auf den Prismen- und Pyramidenflächen ist regelmässig bis auf die Fläche 5, wo eben das eingeschaltete Stück liegt; infolge dieser Einschaltung vermag auf Kante (4, 5) die negative Spannung kaum aufzutreten und auf Kante (5, 6) erscheint die positive sehr geschwächt. Unmittelbar neben der Kante (4, 5) beginnt auf der Fläche 5 die positive Zone. Infolge der Einschaltung dieses gedrehten Stückes gehört auch die Pyramidenfläche oberhalb 5 nicht dem Nebenrhomboeder, sondern dem Hauptrhomboeder an; sie zeigt daher die elektrische Vertheilung der Fläche eines Hauptrhomboeders und spielt auch, wie aus der Zeichnung ersichtlich, in Bezug auf ihre Grösse die Rolle einer solchen; eine Erscheinung, die sich auch in anderen Fällen wiederholt. Auf der Pyramidenfläche 4 ist hierdurch die negative Polarität soweit geschwächt, dass sie am rechten Rande nicht mehr zur Erscheinung kommt.



Krystall Nr. 16. Der linke Krystall Nr. 16 (in Fig. 16 in halber linearer Grösse dargestellt) vom Gletscher »auf der Burg« bei Visch (Wallis) trägt Trapezoëderflächen an den Kanten (1, 2) und (3, 4), aber dann nicht an der Kante (5, 6), sondern an der Kante (4, 5). Er besitzt, wie dies im Querschnitt Fig. 16 *A* angedeutet ist, ein verdrehtes Stück, welches von der linken Hälfte der Prismenfläche 4 (*a*) bis zur rechten Hälfte der Fläche 6 (*b*) reicht, also über die Kanten (4, 5) und (5, 6) hinweggeht, sodass an diesen Kanten eine gegen die Hauptmasse entgegengesetzte Polarität entsteht. In dem obersten Drittel der Prismenfläche 6 tritt das Ende dieses Stückes noch in dem schmalen positiven Streifen auf. Ebenso deutlich ergeben sich die Grenzen auf den beiden Pyramidenflächen 4 und 6. Die linke Hälfte der Pyramidenfläche 4 und die rechte der Fläche 6 besitzen noch in ihren Molekülen die Orientirung der Hauptmasse, während die rechte Hälfte der Fläche 4 und die linke der Fläche 6, sowie die ganze Fläche 5 dem verdrehten Stücke angehören. Die Pyramidenfläche 5 ist also die Fläche eines Hauptrhomboeders, wie ja die direct unter ihr liegende Trapezoederfläche schon andeutet, und dem entsprechend zeigt sich auch ihre elektrische Vertheilung. Durch das Zusammentreffen zweier, verschiedenen Rhomboedern angehörigen Hälften entstehen auf den Pyramidenflächen 4 und 6 die eigenthümlichen elektrischen Vertheilungen. Wie die elektrische Vertheilung auf der Rhomboederfläche 4 andeutet, muss sich in der Mitte der Prismenfläche 4 ein negativer Streifen herabziehen, ähnlich wie auf der Prismenfläche 6 ein positiver. Bei den in Fig. 16 eingetragenen Beobachtungen erschien jedoch auf dieser Mitte nur eine gegen die Ränder verringerte positive Spannung; in anderen Versuchsreihen trat aber dieser negative Streifen deutlich hervor und ist deshalb in den Querschnitt Fig. 16 *A* aufgenommen worden.

Krystall Nr. 17. Der dem hiesigen mineralogischen Museum gehörige rechte Krystall Nr. 17 vom St. Gotthardt trägt Trapezoederflächen an den Kanten (1, 2), (3, 4) und (5, 6), ausserdem aber noch an der Kante (6, 1), ein Beweis eines hier eingefügten Stückes, welches von der linken Hälfte der Prismenfläche 6 bis gegen die Mitte der Fläche 1 reicht (*abc* in Fig. 17 *A*). Ebendies zeigt auch die elektrische Vertheilung; in der Mitte der Fläche 1 tritt eine schmale negative Zone auf, während auf Fläche 6 gegen die Mitte

hin nur eine Verringerung der Intensität der positiven Spannung beobachtet wird. Auf der Kante (6, 1) und ihrer Umgebung ist die Polarität die umgekehrte von der auf der übrigen Hauptmasse des Krystalles auftretende. Die Einschaltung dieses verdrehten Stückes macht sich ausserdem auch noch durch die Schwächung der elektrischen Spannungen auf den benachbarten Kanten (5, 6) und (1, 2) bemerkbar.

Krystall Nr. 18. Bei dem rechten Krystalle Nr. 18 (Fig. 18 in halber Grösse dargestellt) von Tavetsch liegt eine Trapezoederfläche an den Kanten (1, 2) und (3, 4), aber nicht an der Kante (5, 6); dagegen an der Kante (4, 5), zum Anzeichen eines hier eingeschalteten verdrehten Stückes. Dasselbe beginnt (Fig. 18 *A*, *abc*) auf der linken Hälfte der Prismenfläche 4 und reicht bis über die Kante (4, 5). Ausserdem giebt sich durch die elektrische Vertheilung noch ein zweites kleines Stück auf der Kante (5, 6) und auf der Pyramidenfläche oberhalb 6 kund. Durch das grössere gedrehte Stück wird die elektrische Vertheilung auf der Prismenfläche 4 und der über ihr liegenden Pyramidenfläche und auf der Kante (4, 5) abgeändert, während das kleinere Stück nur oben auf der Kante (5, 6) die positive Spannung in die negative verkehrt, und dann noch oberhalb der Prismenfläche 6 anstatt einer Fläche des Nebenrhomboeders die Fläche eines Hauptrhomboeders auftreten lässt.

Krystall Nr. 19. Bei dem linken vom St. Gotthardt stammenden Krystalle Nr. 19 (Fig. 19 in halber Grösse dargestellt) bildet der Theil von der rechten Hälfte der Prismenfläche 1 bis etwas über die Prismenkante (3, 4), sowie die Fläche 5 die Hauptmasse des Krystalles. Von der Pyramidenfläche 1 und resp. 3 zieht sich die negative Zone über die Kanten (1, 2) und resp. (3, 4) und von der Pyramidenfläche 2 die positive Zone über die Kante (2, 3) hinab; eben dieser Vertheilung entspricht die elektrische Vertheilung auf der Fläche 5, so dass auch noch die Polarität auf der Kante (4, 5) und dem grösseren Theile der Kante (5, 6) die normale (d. h. der Hauptmasse entsprechende) ist. Dagegen findet sich auf der Fläche 4 ein schmales (*abcd*) und von der Kante (5, 6) bis etwas über die Mitte der Fläche 1 ein grösseres verdrehtes Stück (*efgh*) eingeschoben (Fig. 19 *A*), wodurch die Kante (6, 1) und der obere Theil der Kante (5, 6) die umgekehrte Polarität erhalten.

Krystall Nr. 20. Der rechte Krystall Nr. 20 stammt gleich dem vorhergehenden vom St. Gotthardt. Die an ihm auftretenden Trapezoederflächen weisen auf mannichfache Einschiebungen um 180° gedrehter grösserer und kleinerer Stücke hin. Auf der Kante (6, 1) findet sich die matte Fläche eines linken Trapezoeders nebst Rhombenfläche; letztere ist parallel ihrer Combinationskante mit der Fläche 6 schwach gestreift. Auf der Kante (1, 2) liegen zwei matte Flächen, die eine einem linken, die andere einem rechten Trapezoeder angehörend. Auf der Kante (2, 3) treten glatte Flächen zweier linken Trapezoeder auf. Auf der Kante (3, 4) zeigt sich eine glatte Fläche eines linken und eine matte Fläche eines rechten Trapezoeders; dagegen ist auf der Kante (4, 5) weder eine Trapezoeder- noch eine Rhombenfläche wahrzunehmen. Auf der Kante (5, 6) endlich erscheint wieder die glatte Fläche eines linken Trapezoeders nebst einer sehr kleinen Rhombenfläche.

Fig. 20 stellt das Netz dieses Krystalles in halber linearer Grösse dar; Fig. 20 *A* in derselben Grösse den Querschnitt durch die Mitte des Krystalles. In dem Querschnitte Fig. 20 *A* habe ich die zwei grösseren eingeschobenen Stücke durch punktirte Linien *aed* und *bfc* angedeutet. Betrachten wir den von *a* über die Fläche 1, 2 bis zu *b* auf der Fläche 3, und ebenso den von *c* auf der Fläche 4 bis zu *d* auf der Fläche 5 sich erstreckenden Theil als dem Hauptkrystalle angehörend, so sind in ihn zwei um 180° gedrehte grössere Stücke eingeschoben. Das eine *dea* geht von *d* über die Fläche 6 bis *a* auf der Fläche 1, und sein Verlauf ist auf den Prismenflächen, besonders aber auch auf den Pryramidenflächen sichtbar. Das andere kleinere Stück *bfc* reicht von *b* auf der Fläche 3 bis *c* auf der Fläche 4. Bei einem starken Erhitzen (über 160° C.) waren in dem Krystalle zwei Sprünge entstanden, der eine bei *c*, der andere bei *d*, welche ziemlich eben sind und nahe parallel mit den prismatischen Seitenkanten verlaufen. Man darf ihre Entstehung wohl als eine Folge des Aneinanderstossens der verschieden orientirten Stücke betrachten.

Mit dieser angegebenen Zusammensetzung ist nun die elektrische Vertheilung im Einklange. Wäre der Hauptkrystall vollständig vorhanden, so müssten die Kanten (6, 1), (2, 3) und (4, 5) negativ, und die Kanten (1, 2), (3, 4) und (5, 6) positiv sein. In dem vorliegenden Krystalle gehören aber nur die Kanten (1, 2), (2, 3) und

zum Theil (4, 5) diesem Hauptkrystalle an, während die Kanten (3, 4), (5, 6) und (6, 1) auf den eingeschobenen um 180° gedrehten Stücken sich finden, und daher eine dem Hauptkrystalle entgegengesetzte Polarität zeigen (Fig. 20 *B*). Infolge der eingeschobenen Stücke wird die positive Zone auf den rechten Hälften der Fläche 3 bei *b* (Fig. 20 *A*), der Fläche 4 bei *c*, und der Fläche 5 bei *d* durch die auf den rechts daneben liegenden Kanten erscheinende negative Elektricität abgebrochen. Ähnliches geschieht mit der negativen Zone auf der linken Hälfte der Fläche 1 bei *a*. Auf den Flächen 3, 4 und 5 zeigt sich infolge dieser Bildung auf der rechten Hälfte ein mehr oder weniger breiter positiver, und in der Mitte der Fläche 1 ein ziemlich breiter negativer Streifen.

Die in Fig. 20 *A* eingetragenen elektrischen Polaritäten geben, wie schon bemerkt, die Vertheilung in einem durch die Mitte des Krystalles gelegten Querschnitte. Wie die Beobachtungen auf den Kanten Fig. 20 *B* zeigen, weicht die Vertheilung nach oben hin infolge der Änderung der Grenzen der eingeschobenen Stücke etwas ab; die Kanten (4, 5) und (5, 6) sind in der Mitte negativ, nach oben hin aber ganz oder zum Theil positiv.

Von Hauptrhomboederflächen ist vollständig vorhanden die Fläche 6 auf dem grösseren eingeschobenen Stücke, und von dem Nebenrhomboeder die Fläche des Hauptkrystalles 2. Auf der Hauptrhomboederfläche geht, wie es bei rechten Krystallen sein muss; die Elektricität in der Richtung von rechts nach links vom positiven zum negativen, auf dem Nebenrhomboeder in derselben Richtung vom negativen zum positiven. Auf den Pyramidenflächen 1, 3, 4 und 5 stossen Haupt- und Nebenrhomboeder an einander; infolge dessen liegt auf der Fläche 1 die negative Zone, und auf den Flächen 3 und 4 das Maximum der positiven Elektricität mehr in der Mitte.

c. Elektrisches Verhalten der Enden der Hauptaxe.

Zu der Zeit, in welcher ich meine frühere Untersuchung über die thermoelektrischen Eigenschaften des Bergkrystalles ausführte, war ich noch in der damals allgemein geltenden Ansicht befangen, dass überhaupt nur in der Richtung hemimorph gebildeter Axen

elektrische Spannungen auftreten könnten. Ich habe mich daher damals auf die Prüfung des elektrischen Verhaltens der Nebenaxen, nach welchen eben eine hemimorphe Bildung vorhanden ist, beschränkt, und das Verhalten der Hauptaxe, deren Enden nicht hemimorph gestaltet sind, nicht specieller beobachtet. Es heisst in der oben angeführten Abhandlung nur mit Bezug auf ältere, von mir im Jahre 1839 gemachte Beobachtungen: »Bei einzelnen Krystallen boten die Enden der Hauptaxe allerdings verschiedene Elektricitäten dar; jedoch habe ich daraus nicht mit Bestimmtheit auf eine mit der krystallographischen Hauptaxe parallele elektrische Axe zu schliessen gewagt.«

Durch meine späteren Untersuchungen über das thermoelektrische Verhalten des Topases, Schwerspathes u. s. w. habe ich nachgewiesen, dass auch auf nicht hemimorph gebildeten Krystallen thermoelektrische Vorgänge auftreten, dass aber bei solchen Krystallen keine polaren Axen existiren, dass vielmehr die beiden gleichgestalteten Enden einer Axe dieselbe elektrische Polarität zeigen. Es erschien daher jetzt nöthig, die nicht hemimorph gebildete Axe des Bergkrystalles auf ihr thermoelektrisches Verhalten zu prüfen, und das Interesse an einer solchen Untersuchung wurde noch durch den Umstand erhöht, dass, wenn auch, wie bemerkt, nach der Hauptaxe dieser Krystalle kein eigentlicher Hemimorphismus auftritt, doch sehr oft die beiden Enden der Hauptaxe eigenthümliche Unterschiede in der Ausbildung der an ihnen liegenden Flächen zeigen, die sich dann auch in der elektrischen Vertheilung auf diesen Flächen aussprechen.

Da bei den nicht hemimorph gestalteten Krystallen des Topases, des Kalkspathes u. s. w. die blosse Verschiedenheit der Axen hinreicht, um elektrische Spannungen infolge von Temperaturänderungen zu erzeugen, so kann man allgemein die Frage stellen, ob nicht bei hemimorphen Krystallen, während in der Richtung der hemimorphen Axe eine polarelektrische Vertheilung erscheint, auch in der Richtung der anderen nicht hemimorphen Axen elektrische Pole, aber freilich an beiden Enden einer Axe gleichnamige, auftreten. Dieselben müssten sich durch eine Verschiedenheit in der Ausdehnung der beiden von den Enden der polaren Axe ausgehenden elektrischen Spannungen auf den mit dieser letzteren Axe parallelen Flächen kund geben.

Ein nach dieser Richtung hin an den Krystallen des Zuckers angestellter Versuch hat ein negatives Resultat ergeben. Die Krystalle des Zuckers gehören zum monoklinischen Systeme*). Nehmen wir die an ihren Enden ungleich ausgebildete Axe zur Orthodiagonale, so laufen die Flächen $0P$ und $\infty P\infty$ mit dieser Orthodiagonale parallel. Obwohl nun die verticale Axe und die Klinodiagonale in ihren Grössen verschieden sind, so zeigt sich doch auf den genannten Flächen kein Unterschied in der Ausbreitung der von den beiden Enden der Orthodiagonale ausgehenden elektrischen Zonen.

Bei dem Turmalin kann man die Flächen des dreiseitigen Prismas als zu dem einen Ende der Hauptaxe gehörig betrachten; durch sein Auftreten entsteht auch nach den Nebenaxen eine hemimorphe Bildung. Ich habe aber nicht vermocht, auf den Flächen des sechsseitigen und des dreiseitigen Prismas bestimmte Unterschiede in der Ausbreitung der von den Enden der Hauptaxe ausgehenden positiven und negativen Spannungen wahrzunehmen.

Anders gestalten sich nun aber die Verhältnisse beim Bergkrystalle.

Wir wollen zunächst an den ringsum ausgebildeten Krystallen Nr. 1 bis 7 diejenigen Enden der Hauptaxe betrachten, welche normal gestaltet sind, d. h. abwechselnd drei grosse und drei kleine Rhomboederflächen tragen, und nicht durch Anliegen an andere Körper in ihrer Entwickelung gehemmt wurden. Solche vollkommen normale Bildungen finden wir an dem oberen Ende der Krystalle Nr. 1, 4, 5, 6 und 7. Auf den Flächen dieses Endes zeigen sich keine Nähte oder sonstige Andeutungen von Verwachsungen, und die Flächen des Nebenrhomboeders reichen nicht bis zur Spitze, die allein von den Flächen des Hauptrhomboeders gebildet wird. Sämmtliche zuletzt genannten Krystalle sind zufällig linke.

Wie die in die Netze dieser Krystalle eingetragenen elektrischen Beobachtungen nachweisen, ist die Basis der Hauptrhomboederflächen des oberen Endes vorzugsweise negativ, und zwar wächst die negative Spannung bei diesen linken Krystallen in der Richtung von links nach rechts; in einzelnen Fällen tritt am linken Rande auch noch die positive auf. In diesen letzten Fällen (Nr. 6) nimmt dann nach

*) De thermoelectricitate crystallorum, Halae 1839; Pogg. Ann. Bd. 49, S. 493.

oben hin die positive Spannung zu. Ist die Basis überall negativ, so nimmt die negative Spannung nach oben hin ab und geht in eine positive über. Bei allen fünf Krystallen zeigt nun auch das obere Ende der Hauptaxe, wenn der Krystall bis auf dieses in Kupferfeilicht eingehüllt wird, beim Erkalten eine positive Spannung, welche bei den Krystallen Nr. 4 und 6, und auch noch bei Nr. 5 sehr beträchtlich, bei Nr. 1 und 7 aber geringer ist*).

Am unteren Ende ist bei dem Krystall Nr. 1 die Fläche 6 des Nebenrhomboeders wohl infolge eines hier stattgehabten Anliegens beträchtlich vergrössert; jedoch zeigt dieses Ende noch positive Spannung. Bei dem Krystall Nr. 4 besitzt allerdings die Fläche des Hauptrhomboeders 3 am unteren Ende eine bedeutende Grösse; aber auch die nebenliegenden Flächen 2, 4 und 6 des Nebenrhomboeders reichen bis zum unteren Ende, an welchem sich durch den Durchschnitt der Flächen 3 und 6 eine kurze Schneide bildet. Diese Schneide zeigt beim Erkalten negative Elektricität. Am unteren Ende des Krystalles Nr. 5 und 6 ist durch den Durchschnitt der Fläche 5 des Hauptrhomboeders und der vergrösserten Fläche 2 des Nebenrhomboeders eine Schneide entstanden; dieselbe wird beim Erkalten positiv, jedoch schwächer als das obere Ende**). Bei Nr. 7 findet am unteren Ende eine ähnliche Bildung statt; der Krystall erscheint daselbst gewissermassen aus zwei zusammengewachsenen zu bestehen, von denen jeder in einer Schneide endigt. Dieses untere Ende zeigt negative Spannung.

Bei dem Krystall Nr. 3 reicht an beiden Enden eine Fläche des Nebenrhomboeders bis zur Spitze; beide Enden geben aber beim Erkalten positive Elektricität. Der Krystall Nr. 2 hat an seinem oberen Ende seitlich angelegen; es zeigt wohl infolge dessen dieses Ende keine elektrische Spannung beim Erkalten; dagegen giebt das untere, an welchem durch die Vergrösserung der Fläche 2 des Nebenrhomboeders eine kurze Schneide entsteht, noch positive Elektricität.

---

*) Es ist dies nicht blos eine Eigenthümlichkeit der linken Krystalle. Dasselbe Verhalten zeigt auch das obere Ende eines rechten Bergkrystalles von Neumark in Schlesien, der unter Fig. 19 und 20 in meiner früheren Abhandlung vom Jahre 1866 abgebildet ist.

**) Genau ebenso verhält sich auch der in der früheren Abhandlung unter Fig. 25 und 26 abgebildete Krystall, welcher mit Nr. 5 in seiner Gestalt übereinstimmt.

Unter den 14 Enden der Hauptaxen der sieben ringsum ausgebildeten Krystalle sind also 11 (darunter sämmtliche normal gestaltete) positiv, ein Ende ist unelektrisch, und nur zwei nicht normal gebildete zeigen negative Polarität.

Bei den an dem unteren Ende verbrochenen Krystallen Nr. 8 und 9 zeigt das obere ausgebildete Ende der Hauptaxe schwache positive Spannung, während bei Nr. 12 daselbst eine äusserst geringe negative auftritt. Bei diesem letzteren Krystalle breitet sich die negative Spannung auf den Hauptrhomboederflächen allmählig abnehmend bis zur Spitze aus. Ähnlich verhält sich auch das obere Ende bei Nr. 13. Die oberen Enden der Krystalle Nr. 10 und 11 sind gleichfalls sehr schwach negativ. Die Krystalle Nr. 10, 11 und 13 stammen von demselben Fundorte (Maderaner Thal) und sind mehr oder weniger nelkenbraun gefärbt.

Im Allgemeinen tritt die positive Elektricität auf den Enden der Hauptaxe mit grösserer Intensität auf, als die negative.

Überblicken wir die vorstehenden Angaben, so dürfte die Annahme wohl gerechtfertigt sein, dass auf den Bergkrystallen bei normaler und ungestörter Ausbildung auch in der Richtung der Hauptaxe bei Temperaturveränderungen eine Elektricitätsentwickelung eintritt, die jedoch entsprechend der gleichen Ausbildung beider Enden, an diesen beiden Enden von gleicher Beschaffenheit, und zwar beim Erkalten positiv, ist.

Diese Annahme findet auch durch die folgenden Beobachtungen noch weitere Bestätigung.

Drei in meiner früheren Abhandlung von 1866 beschriebene und untersuchte Bergkrystalle von Striegau oder Järischau in Schlesien waren durch zwei senkrecht gegen die Hauptaxe geführte Schnitte in drei Stücke zerlegt, und die Schnittflächen des mittelsten Stückes behufs einer optischen Prüfung polirt worden. Ich habe diese drei Krystalle jetzt benutzt, um das elektrische Verhalten der Hauptaxe noch näher kennen zu lernen.

Bei dem linken Krystall Nr. 21 (Nr. XVIII der früheren Abhandlung) hat weder die thermoelektrische noch auch die optische Untersuchung irgend Anzeichen von Zusammensetzung ergeben. Fig. 21 stellt die Netze der drei Stücke in natürlicher Grösse dar.

Sein oberes Ende besitzt drei grosse Hauptrhomboederflächen,

die sich genau so verhalten, wie ich oben S. 485 angegeben habe. Das obere Ende selbst zeigt daher positive Spannung. Die Schnittfläche *A* an dem unteren Ende des oberen Stückes ist (Fig. 21 *A*) in ihrer Mitte und nach den drei positiven Kanten hin positiv. Ähnlich verhält sich die obere Schnittfläche *B* des mittleren Stückes, nur zieht sich die positive Elektricität mehr auf die Mitte zurück. Ihr gleicht die untere Schnittfläche *C* an diesem Stücke, und auch die obere Schnittfläche *D* am unteren Stücke; jedoch hat die positive Spannung an Intensität abgenommen. Diese in der Mitte der Schnittflächen auftretende positive Spannung kommt endlich am unteren Stücke in der Mitte der unteren grossen Rhomboederfläche 2 ebenfalls zur Erscheinung*), während die am untersten Ende befindliche stark zur Seite geschobene Schneide schwach negativ ist. Es durchzieht also den Krystall in der Mitte von oben bis unten eine an ihren Enden positive Axe.

Der gleichfalls linke Krystall Nr. 22 (Nr. XIX der früheren Abhandlung) trägt oben auf den Kanten (6, 1) und (3, 4) sehr schmale Rhombenflächen. Er ist nicht durchaus einfach. Die optische Untersuchung des mittleren Stückes ergab dicht am Rande der Fläche 4 nach 3 hin im convergenten polarisirten Lichte Airy'sche Spiralen, ein Beweis von eingeschalteten kleineren rechtsdrehenden Partien. Ich beschränke mich aber hier auf das elektrische Verhalten der Hauptaxe. Das von den drei Flächen des Hauptrhomboeders gebildete obere Ende ist positiv. Die untere Schnittfläche (Fig. 22 *A*) am oberen Stücke zeigt in der Mitte und nach den Flächen 6 und 1 hin positive Spannung. Auch auf den beiden Schnitten (Fig. 22 *B* und *C*) am mittleren Stücke sind die Mitten positiv, und es erstreckt sich diese positive Spannung von hier aus nach den Flächen 1 und 3. Dagegen fehlt die positive Zone auf der oberen Schnittfläche (Fig. 22 *D*) des unteren Stückes; dieselbe ist durchweg, ebenso wie die unteren beiden Spitzen, in welche der Krystall endigt, negativ.

Der Krystall Nr. 23 (Nr. VII der früheren Abhandlung) ist ein rechter. Er ist jedoch nicht völlig einfach; in dem mittleren Stücke

*) Genau derselbe Vorgang wiederholt sich bei dem Krystalle Nr. 4, wo auf dem unteren Ende die positive Polarität ebenfalls in der Mitte der grossen Fläche 3 des Hauptrhomboeders hervortritt, während die untere Schneide negativ erscheint.

zeigen sich im Polarisationsapparate mit convergentem Lichte am Rande der Fläche 3 Airy'sche Spiralen. Das obere Ende der Hauptaxe besitzt positive Spannung; dieselbe tritt auf den Flächen 1 und 5 des Hauptrhomboeders erst nahe an der Spitze auf. Die untere Schnittfläche (Fig. 23 *A*) am oberen Stücke trägt nur nach der Kante (3, 4) hin positive Elektricität, während der übrige Theil negativ ist. Die positive Zone hat auf den Schnittflächen des mittleren Stückes (Fig. 23 *B* und *C*) eine grössere Ausdehnung; sie erstreckt sich von der Kante (2, 3) über die den Flächen 3, 4 und 5 anliegenden Theile bis zur Kante (5, 6). Die obere Schnittfläche (Fig. 23 *D*) am unteren Stücke zeigt dagegen keine Spur einer positiven Spannung; sie ist überall, ebenso wie das untere eine Schneide darstellende Ende, negativ.

Bei allen drei Krystallen beginnt also am oberen Ende der Hauptaxe eine positive Spannung, die sich bei Nr. 21 und 22 in der Mitte des Krystalles, bei Nr. 23 näher an der Fläche 4 herabzieht, und bei Nr. 22 selbst auf einer grossen Rhomboederfläche des unteren Endes noch hervortritt, während sie bei den Krystallen Nr. 22 und 23 das untere Ende nicht erreicht, sondern infolge der Bildungsverhältnisse ungefähr $\frac{1}{3}$ vom unteren Ende aufhört und ins Negative übergeht.

III. Aktinoelektricität.

Da bereits im Vorworte die Entstehung der Aktinoelektricität im Allgemeinen erläutert ist, so lassen sich, bevor ich zu den Resultaten der Untersuchung der einzelnen Krystalle übergehe, die verschiedenen Verfahren, mittelst welcher die Bestimmungen und Messungen der aktinoelektrischen Spannungen ausgeführt worden sind, gleich hier im Zusammenhange beschreiben.

A. Verfahren bei den Beobachtungen.

Ein anfangs fast ausschliesslich angewandtes Verfahren bestand in Folgendem: Auf eine quadratische Messingplatte war ein starker Cylinder von Siegellack aufgeschmolzen; auf dem oberen Ende desselben sass ein Kupferdraht, dessen eines Ende eine kupferne Kugel von 17^{mm} Durchmesser trug, während mit dem anderen Ende, nachdem

die Messingplatte auf den kleinen neben dem Elektrometer befindlichen eisernen Ofen *B* (Taf. III Fig. IV) gelegt war, der dünne zum Goldblättchen des Elektrometers führende Platindraht *W* verbunden wurde. Um die Bergkrystalle bequem zu stellen, und überhaupt handhaben zu können, waren sie auf kleinen runden Metallscheiben mittelst Siegellack in verticaler Stellung ihrer Hauptaxe befestigt. An die zuvor genannte Kugel wurde nun, während das Goldblättchen des Elektrometers zur Erde abgeleitet war, die zu prüfende Stelle des Bergkrystalles (z. B. eine Stelle der Prismenkante) bis zur Berührung herangerückt und einige Zeit stehen gelassen, um jede etwa durch Reibung erregte Elektricität zum Verschwinden zu bringen.

Wurde die Ableitung des Goldblättchens zur Erde aufgehoben, so genügte es schon, vor den Krystall, d. h. auf die von der Kugel abgewandte Seite desselben, ein brennendes Streichhölzchen oder die Flamme eines Wachsstockes zu halten, um bei stark erregbaren Krystallen einen sehr beträchtlichen Ausschlag im Elektrometer hervorzurufen. Da jedoch durch die hierbei nothwendigen Bewegungen der Hand und des Armes, sowie durch die Flamme selbst Störungen entstanden, so wurde folgende Einrichtung getroffen.

Hinter einem doppelten Metallschirme brannte eine Gasflamme. Der Schirm sollte die Strahlung vom Gehäuse des Elektrometers abhalten, weil sonst die Erwärmung desselben fortwährend nicht unbeträchtliche Änderungen in der Ruhelage des Goldblättchens hervorgerufen hätte. Die Strahlen der Flamme fielen auf einen Hohlspiegel von 120^{mm} Brennweite und 205^{mm} Öffnung. Das durch ihn erzeugte Bild der Flamme entstand ungefähr an der hinteren Kante des Krystalles, an welche die kupferne Kugel angelegt war.

Um ferner grössere Bewegungen der Hand und des Armes zu vermeiden, war in die Leitung des Gases zur Lampe ein Hahn (Haupthahn) eingeschaltet, der von dem vor dem Elektrometer sitzenden Beobachter geöffnet und geschlossen werden konnte. Neben diesem Haupthahne lag eine ebenfalls mit einem Hahne versehene Nebenleitung, welche das Gas noch zur Lampe gelangen lies, wenn auch der Haupthahn geschlossen war. Der Hahn in der Nebenleitung wurde jedoch so gestellt, dass nur eine ausserordentlich geringe Gasmenge hindurch strömte; auf dem Gasbrenner erhielt sich daher

noch ein sehr winziges, kaum sichtbares Flämmchen, wenn der Haupthahn geschlossen war. Um nun die Wirkung der Bestrahlung eintreten zu lassen, genügte die geringe Bewegung der rechten Hand zur Drehung des Haupthahnes, und ebenso, wenn der Erfolg des Verschwindens der Strahlung gemessen werden sollte, das Zurückdrehen des Hahnes. Zum Schutze gegen die selbst durch diese geringen Bewegungen möglicherweise erzeugte Reibungselektricität war vor die Hand noch ein grösseres zur Erde abgeleitetes Blech gestellt. Überhaupt war das Elektrometer und der zuleitende Draht möglichst mit Metallschirmen verdeckt, um die durch die Flamme erzeugten elektrischen Störungen abzuhalten. Die Flamme der Lampe war ebenfalls zur Erde abgeleitet, indem ein mit letzterer verbundener Platindraht den unteren Rand der Flamme berührte.

Vor jeder Beobachtung wurde das Goldblättchen mittelst eines langen mit der Erde in Verbindung stehenden Kupferdrahtes, welcher an den dünnen Platindraht *W* angelegt wurde, zur Erde abgeleitet; die linke Hand, welche den Kupferdraht bewegte, befand sich weit unterhalb und war durch abgeleitete Metallschirme möglichst verdeckt. Sofort nach der Isolirung des Goldblättchens durch Wegziehen des Kupferdrahtes wurde der Haupthahn durch die bereits in passender Lage befindliche rechte Hand geöffnet und der im Elektrometer entstehende Ausschlag gemessen.

Sollte die Wirkung der Bestrahlung eine oder mehrere Secunden nach ihrem Beginne untersucht werden, so wurde der Kupferdraht an den dünnen Platindraht *W* angelegt, der Haupthahn mit einem bestimmten Secundenschlage geöffnet und dann erst nach einer oder mehreren Secunden der Kupferdraht vom Platindrahte entfernt.

War beabsichtigt, nicht die Wirkung des Eintritts der Strahlung, sondern die durch das Aufhören derselben entstehenden elektrischen Vorgänge zu beobachten, so wurde, wenn der durch den Eintritt der Strahlung entstandene Ausschlag sein in 30 bis 40 Secunden ausgebildetes Maximum erreicht hatte, das Goldblättchen durch Anlegen des Kupferdrahtes an den Platindraht entladen, und dann nach Entfernung des Kupferdrahtes durch Drehen des Haupthahnes die Flamme ausgelöscht. Sollten dagegen die Vorgänge, welche eine oder mehrere Secunden nach dem Auslöschen der Flamme eintreten, untersucht werden, so blieb der Kupferdraht nach dem Auslöschen der Flamme noch eine

oder mehrere Secunden mit dem Platindrahte in Berührung und wurde erst in dem gewünschten Zeitpunkte entfernt.

Die mit der Oberfläche des Krystalles in Berührung gebrachte Kugel ermöglichte eine starke Bindung der Elektricität und es wurde dadurch allerdings ein erheblicher Ausschlag im Elektrometer erzielt. Dagegen konnte dieselbe, eben wegen ihrer Grösse, zur genaueren Untersuchung über die elektrische Vertheilung der aktinoelektrischen Spannungen auf den einzelnen Punkten einer Prismenfläche nicht verwandt werden. Besser eignete sich für diesen Fall ein gerader Kupferdraht, dessen Ende an Stelle der Kugel an die verschiedenen Theile der Fläche herangeschoben wurde. Doch gilt auch hier dasselbe, was oben S. 480 über die auf den Platindraht *V* seitens der umliegenden Flächenstücke ausgeübten Vertheilungswirkungen gesagt worden. Der Ausschlag des Goldblättchens war, wenn die Kugel an der Kante stand, etwas mehr als dreimal so gross, als wenn das Ende des Drahtes die Kante berührte.

Bei dem zuvor beschriebenen Verfahren wurden die aktinoelektrischen Spannungen stets auf der Seite bestimmt, welche dem Eintritte der Strahlung entgegengesetzt war. Es liess sich aber auch leicht eine Einrichtung treffen, bei welcher diese Spannungen auf derselben Seite gemessen werden konnten, auf welche die Strahlung auffiel. Anstatt eines geraden, wurde ein, wie Fig. V (Taf. IV) in halber Grösse zeigt, mehrfach gebogener Kupferdraht *abcde* angewandt; derselbe ging auf der hinteren Seite des Krystalles *K* aufwärts, dann über das obere Ende desselben hinweg und wurde mit dem horizontalen, rückwärts gebogenen Ende seines vorderen Schenkels *de* an die verschiedenen Punkte der Kante *K* (oder Fläche), welche die Strahlung empfing, angelegt. Zwischen die hintere Kante oder Fläche des Krystalles und den daselbst aufsteigenden Schenkel des Drahtes war zur Verhütung von Vertheilungswirkungen seitens der hinteren Theile des Krystalles auf dieses Drahtstück ein kleines zur Erde abgeleitetes Metallblech *S* gestellt.

Ein anderes Verfahren, bei welchem ebenfalls die elektrischen Spannungen auf der Seite gemessen wurden, auf welche die Strahlen einfielen, schloss sich eng an das bei der Messung der thermoelektrischen Spannungen benutzte an. Gerade wie bei den thermoelektrischen Versuchen wurde der Bergkrystall in Kupferfeilicht soweit

eingesetzt, dass, wenn z. B. eine Kante geprüft werden sollte, nur die beiden in ihr zum Durchschnitt kommenden Prismenflächen je nach den Umständen ganz oder nur zum Theil hervorragten. Auf diese Weise erhielt der Krystall trotz seiner oft sehr unregelmässigen Begrenzung eine bestimmte feste Lage und war an allen Theilen, welche nicht geprüft werden sollten, mit der Erde in leitender Verbindung. Nachdem der Krystall durch Anhauchen*) unelektrisch gemacht und in seiner kupfernen Schale (oder Kästchen) neben dem Elektrometer aufgestellt worden, wurde der zu prüfenden Stelle das untere Ende des S. 477 beschriebenen und von der Hebelvorrichtung LL' getragenen Platindrahtes V, ebenso wie bei den thermoelektrischen Beobachtungen, bis fast zur Berührung genähert oder auch aufgelegt. Sodann wurden die Strahlen einer Gasflamme mittelst eines oberhalb des Krystalles angebrachten Spiegels auf die freie Oberfläche desselben geworfen. Der 1^{mm} dicke Platindraht V und die sein oberes Ende tragende dünne Glasröhre TA hinderten die Bestrahlung des Krystalles nur sehr unbedeutend. Um bei Krystallen von grösseren Dimensionen eine ausgedehntere Fläche bestrahlen zu können, wurden zwei Gasbrenner mit ihren Schnitten parallel nahe bei einander aufgestellt; es konnte übrigens nach Belieben der eine oder der andere Brenner allein oder beide zusammen entzündet werden. Durch Verschiebung der Spitze des Platindrahtes über die verschiedenen Punkte des Krystalles liess sich die Vertheilung auf der freien Oberfläche näher bestimmen.

Ward das kupferne Kästchen isolirt und mit dem Goldblättchen des Elektrometers verbunden, so konnte auch sehr bequem die beim Bestrahlen in dem Kästchen durch Vertheilung erregte freie Elektricität, welche der auf der aus dem Kupferfeilicht hervorragenden Kante auftretenden entgegengesetzt ist, beobachtet werden.

Die Anordnung eines oberhalb des Krystalles aufgestellten Spiegels gestattet bei einiger Abänderung auch sehr leicht, die durch eine Bestrahlung in der Richtung der Hauptaxe auf den Kanten und Flächen des Prismas entstehenden aktinoelektrischen Spannungen zu

*) Das Abblasen mit einer Alkoholflamme reicht, wie ich späterhin S. 527 zeigen werde, nicht hin, oder führt allein angewendet nicht zum gewünschten Ziele; es bedarf nach dem Abblasen mit der Alkoholflamme stets schliesslich noch eines Anhauchens.

beobachten. Man stellt den Bergkrystall, welcher wie bei dem früheren Verfahren in verticaler Stellung seiner Hauptaxe auf eine Metallscheibe aufgekittet ist, unterhalb des Spiegels und rückt die früher beschriebene mit dem Elektrometer verbundene kupferne Kugel (oder Draht) an die betreffende Stelle der Kante oder Fläche.

Da sich bei den Versuchen mit der Flamme sehr bald ergab, dass nicht die leuchtenden Strahlen, sondern besonders die Wärmestrahlen die Elektricität im Bergkrystalle hervorrufen, so schien es auch nöthig, dunkle Wärmestrahlen auf den Krystall einwirken zu lassen, und zwar konnte auch jetzt wieder die elektrische Spannung auf der der Wärmequelle entgegengesetzten Seite des Krystalles oder auf derjenigen, auf welche die Strahlung direct auffiel, beobachtet werden.

Um die auf der von der Wärmequelle abgewandten (hinteren) Seite des Krystalles entstehende Elektricität zu bestimmen, wurde die kupferne Kugel an eine Kante gebracht, und ein hohler mit heissem Wasser gefüllter Messingwürfel in geringem Abstande der vorderen Kante gegenüber aufgestellt. Je nachdem die Seite des Würfels blank oder berusst war, wurde auch der Unterschied in der Ausstrahlung gemessen.

Sollte dagegen die Elektricität auf derselben Seite, auf welche die Strahlung einfiel, gemessen werden, so liess sich dies leicht in folgender Weise ausführen.

Eine Messing- oder Kupfer- oder Zinkkugel trug einen kurzen Stiel; in diesem befand sich eine Durchbohrung, in welche mittelst einer Schraube das untere Ende des an der S. 477 erwähnten Hebelvorrichtung sitzenden dickeren Platindrahtes V eingeklemmt werden konnte. Die Kugel wurde in heissem Wasser bis zu der gewünschten Temperatur erhitzt, mittelst einer Zange mit ihrem Stiele über den Platindraht geschoben und festgeklemmt. Der Platindraht V berührte dabei den Draht uw und war durch ihn zur Erde abgeleitet. Durch Niederlassen des Hebels LL' wurde der Platindraht V und mit ihm die Kugel, sowie der zum Elektrometer führende dünne Platindraht W isolirt. Unterhalb der Kugel stand der zu untersuchende Krystall bis auf die zu prüfende Kante oder Fläche in Kupferfeilicht eingesetzt. Durch die Hebelvorrichtung liess sich mittelst Umdrehung der Schraube N' die heisse mit dem Goldblättchen des Elektrometers in

Verbindung stehende Kugel der Kante oder Fläche des Krystalles beliebig nähern und auch ohne erhebliche Reibung mit ihr zur Berührung bringen. Die Strahlung der Kugel bewirkte das Hervortreten der Aktinoelektricität, und die von dieser auf die Kugel ausgeübte Vertheilungswirkung konnte durch den Ausschlag des Goldblättchens gemessen werden.

Wenn nun bei der Annäherung der heissen Kugel oder der Berührung mit ihr an der aus dem Kupferfeilicht hervorstehenden Kante die eine Elektricität erregt wird, so muss die entgegengesetzte auf das Metallfeilicht wirken. Man kann auch diese letztere nachweisen, wenn man das Kästchen mit Kupferfeilicht, in welches der Krystall eingesetzt ist, mittelst Schellack oder Siegellack isolirt und durch den dünnen Platindraht *W* mit dem Elektrometer verbindet. Wird die erhitzte, mit der Erde in Verbindung bleibende Kugel der aus dem Metallfeilicht hervorragenden Kante durch Niederlassen des Hebels *LL'* z. B. bis zur Berührung genähert, so zeigt das Elektrometer die entgegengesetzte Elektricität von derjenigen, welche auf der hervorragenden Kante zuvor mittelst der Kugel beobachtet worden war.

Durch die im Vorstehenden beschriebenen Verfahren konnten nun die Gesetze über die Entstehung der aktinoelektrischen Spannungen festgestellt werden.

B. Gesetze der aktinoelektrischen Vorgänge auf Bergkrystallen.

a. Einfache Krystalle.

Wenn die Strahlung der Sonne, einer Flamme oder eines erhitzten Körpers einen einfachen Bergkrystall durchdringt, so erscheinen gleichzeitig auf allen sechs Kanten des verticalen Prismas elektrische Pole; und es ist für die Entstehung derselben überhaupt gleichgültig, in welcher Richtung die Strahlen durch den Krystall gehen; sie können selbst parallel mit der Hauptaxe, also senkrecht zu den Nebenaxen des Krystalles gerichtet sein. Diese sechs elektrischen Pole sind abwechselnd positiv und negativ, so dass jede Nebenaxe an dem einen ihrer Enden einen positiven, an dem anderen einen negativen Pol trägt, und zwar stimmen dieselben in Bezug auf die Art der in

ihnen auftretenden Elektricität mit der bei der Abkühlung auf denselben Krystallen entstehenden thermoelektrischen Spannung überein. Es zeigen also beim Eintritt der Strahlung und während der Dauer derselben diejenigen drei Kanten, an welchen die Rhomben- oder Trapezoederflächen auftreten, oder wenn sie vollständig vorhanden wären, auftreten würden, positive, die drei anderen aber negative Spannungen.

Die Intensität der elektrischen Spannungen erreicht in sehr kurzer Zeit, gewöhnlich schon in 30 bis 40 Secunden, ihr Maximum und bleibt auf diesem Maximum, so lange die Bestrahlung in gleicher Stärke anhält, und soweit nicht eine andere Erregung von entgegengesetzter Polarität eine Schwächung hervorbringt. Man kann sich am leichtesten hiervon überzeugen, wenn man 30 bis 40 Secunden nach dem Beginne der Bestrahlung die an der Kante des Krystalles stehende und mit dem Goldblättchen des Elektrometers verbundene kupferne Kugel zur Erde ableitet und darauf wieder isolirt. Es zeigt sich bei ungeänderter Fortdauer der Strahlung kein neuer Ausschlag nach derselben Seite wie zuvor; es tritt vielmehr aus einer sogleich zu erörternden Ursache eine sehr langsame Bewegung des Goldblättchens nach der entgegengesetzten Seite ein.

Durch die Bestrahlung wird nämlich auch eine geringe Erwärmung der Masse des Krystalles hervorgerufen. Als bei Anwendung der mittelst des Spiegels concentrirten Strahlung zweier dicht hintereinander befindlichen Gasflammen an die Stelle der kupfernen Kugel die 10^{mm} im Durchmesser haltende blanke Kugel eines Thermometers gebracht wurde, stieg das Quecksilber dieses Instrumentes in 35 Secunden um 3^{0} C. Nun habe ich zuvor erwähnt, dass die aktinoelektrische Polarität, welche bei der Bestrahlung auf den einzelnen Kanten auftritt, mit derjenigen thermoelektrischen übereinstimmt, welche eben diese Kanten bei der Abkühlung einnehmen; sie ist also derjenigen, welche bei der Erwärmung erzeugt wird, entgegengesetzt. Durch die eben erwähnte Steigerung der Temperatur des Krystalles wird folglich eine der Aktinoelektricität entgegengesetzte Thermoelektricität entwickelt, welche entweder den Maximalausschlag, wenn man ihn hat fortbestehen lassen, etwas vermindert, oder wenn man durch Ableitung das Goldblättchen in die ursprüngliche Ruhelage zurückgeführt hat, eine langsame Bewegung desselben nach der entgegengesetzten Seite veranlasst.

Es möge die Mittheilung einer Beobachtung genügen. Die Kante (1, 2) des Krystalles Nr. 12, an welcher oben und unten eine Trapezoederfläche liegt, stand an der kupfernen Kugel und die Strahlung traf auf die Kante (4, 5) und deren Umgebung. Die Wirkung der Strahlung rief eine so starke positive Aktinoelektricität hervor, dass das Goldblättchen schon nach wenigen Secunden aus dem Gesichtsfelde des Mikroskopes verschwand. 40 Secunden nach Beginn der Strahlung wurde nun die kupferne Kugel abgeleitet. Bei ungeänderter Fortdauer der Strahlung bewegte sich das Goldblättchen in negativem Sinne, jedoch in 45 Secunden nur um 7 Skth.; nach einigen Minuten betrug der negative Ausschlag erst 18 Skth. u. s. w. Als nun die Strahlung aufgehoben und die auf der Kugel vorhandene Elektricität abgeleitet wurde, ging das Goldblättchen noch ungefähr 1 Minute lang ein wenig nach der negativen Seite und fing dann mit dem Eintritt der Erkaltung an, sich wieder nach der positiven zu bewegen.

Dieser Gegensatz zwischen der durch die Bestrahlung erzeugten Aktinoelektricität und der durch Steigerung der Temperatur entstandenen Thermoelektricität zeigt sich auch sehr deutlich in folgendem Vorgange: Wenn man in die obere Schale des kleinen, neben dem Elektrometer befindlichen eisernen Ofens *B* Kupferfeilicht bringt und einen Bergkrystall gerade so in dasselbe einsetzt, als ob man eine Kante auf ihre thermoelektrischen Spannungen untersuchen wollte, d. h. nur diese Kante und die sie bildenden Flächen unbedeckt lässt, so treten im Anfange der Erhitzung aktinoelektrische Spannungen auf. Ich will den Vorgang an einem speciellen Falle erläutern und bemerke nur noch zuvor, dass, um die elektrische Spannung der Mitte der Kante zu messen, das untere Ende des dickeren Platindrahtes *V*, welcher durch den Draht *W* mit dem Goldblättchen des Elektrometers verbunden war, dieser Mitte mittelst der Hebelvorrichtung *LL'* genähert wurde.

Der Krystall Nr. 4 wurde so in das auf dem Ofen befindliche Kupferfeilicht eingesetzt, dass nur die Kante (6, 1), welche keine Rhombenfläche trägt, nebst dem grössten Theile der Flächen 6 und 1 frei blieb. In den Ofen wurde eine Alkohollampe mit kleiner Flamme gestellt und die elektrische Beschaffenheit der Mitte der Kante in sehr kurzen Zwischenzeiten mittelst Annäherung des Platindrahtes, wie bei den thermoelektrischen Untersuchungen geprüft. Sobald nach

dem Anzünden der Lampe die Erhöhung der Temperatur bis zu den an den unteren Theilen des Krystalles anliegenden Kupferfeilspähnen hindurch gedrungen war, entstand infolge der von diesen erhitzten Kupfertheilchen in den Krystall dringenden Strahlung eine aktinoelektrische Erregung; bereits eine Minute nach dem Anzünden der Lampe wurde ein Ausschlag von — 6 Skth. beobachtet, der ziemlich rasch bis — 33 Skth. stieg und dann abnahm, um nach und nach in den dieser Kante bei steigender Temperatur entsprechenden thermoelektrischen positiven Ausschlag überzugehen*).

---

*) Bei meinen früheren im 13. Bd. dieser Abhandlungen veröffentlichten Untersuchungen über die thermoelektrischen Eigenschaften des Bergkrystalles habe ich sämmtliche Krystalle auf dem zuvor bezeichneten kleinen Ofen erhitzt und ihr elektrisches Verhalten auch während des Steigens der Temperatur beobachtet. Es könnte daher seltsam erscheinen, dass von mir damals die aktinoelektrischen Spannungen auf den Bergkrystallen nicht bemerkt worden sind. Dieselben sind nun aber allerdings von mir wahrgenommen worden; ich habe indess damals die beim Beginne des Erhitzens auftretende Polarität, welche der bei steigender Temperatur des Krystalles entstehenden entgegengesetzt ist, also mit der beim Erkalten sich zeigenden übereinstimmt, durch das Versuchsverfahren veranlasst, als eine Wirkung der Erkaltung betrachtet.

Die Oberfläche mancher Bergkrystalle isolirt nämlich öfter sehr mangelhaft infolge der Condensation von Wasserdämpfen. Ich habe daher bei den früheren Beobachtungen den Bergkrystall vor dem zur genaueren Ermittelung seines thermoelektrischen Verhaltens bestimmten Versuche stets vorläufig auf dem kleinen eisernen Ofen in Eisenfeilicht eingehüllt etwas erhitzt und wieder erkalten lassen. Beim Beginn der neuen Erhitzung trat nun eine Polarität auf, wie sie der vorhergehenden Abkühlung entsprach und ich habe daher diese, wie zuvor nachgewiesen, aktinoelektrische Erregung noch als einen Rest der von jener Abkühlung herrührenden Thermoelektricität angesehen.

Wie wenig bisweilen die Oberfläche der Bergkrystalle isolirt, möge folgende Thatsache beweisen. Behufs der Untersuchung der Aktinoelektricität hatte ich einen an seinem unteren Ende ziemlich ebenen Bergkrystall in verticaler Stellung mittelst arabischen Gummis auf eine Zinkplatte aufgeklebt und die eine Kante desselben an die mit dem Elektrometer verbundene kupferne Kugel herangerückt. Sobald die Kugel isolirt wurde, zeigte sich im Elektrometer ein langsam wachsender positiver Ausschlag, dessen Maximalwerth sogleich auf ein vorhandenes Element Kupfer-Zink-Wasser schliessen liess. Es blieb jener Ausschlag aus, wenn die Kupferkugel durch eine Zinkkugel ersetzt wurde, oder auch wenn der Bergkrystall einige Grade über die Temperatur des Zimmers erwärmt und hierdurch die leitende Feuchtigkeitsschicht von seiner Oberfläche entfernt wurde.

Durch die mangelhafte Isolation der Oberfläche erklärt es sich, wenn bei Krystallen von der Temperatur des Zimmers je nach dem Feuchtigkeitszustande

Beim Beginn der Bestrahlung eines Bergkrystalles mittelst einer Gasflamme bewegt sich das Goldblättchen rasch vorwärts, später langsamer, um in 30—40 Secunden ein Maximum zu erreichen. Als z. B. die Kante (1, 2) des Krystalles Nr. 12 an der kupfernen Kugel stand und die freie Strahlung einer in 270^{mm} von der genannten Kante abstehenden Gasflamme (Schnittbrenner) auf die gegenüberliegende Seite des Krystalles fiel, wurden nach Verlauf der in der ersten Columne der nachstehenden Tabelle verzeichneten Anzahl von Secunden die in der zweiten Columne stehenden Ausschläge beobachtet.

Nach Beginn der Strahlung verflossen	Beobachtete Ausschläge	Reducirte Ausschläge	Zuwachs in 5 Secunden
0 Secunden	0 Skth.	0 Skth.	
5 -	+ 19 -	+ 18,7 -	+ 18,7 Skth.
10 -	+ 30 -	+ 28,5 -	+ 9,8 -
15 -	+ 36,5 -	+ 34,5 -	+ 6,0 -
20 -	+ 40,5 -	+ 37,5 -	+ 3,0 -
25 -	+ 43,5 -	+ 39,5 -	+ 2,0 -
30 -	+ 45,5 -	+ 41,0 -	+ 1,5 -

Die Ausschläge des Goldblättchens wachsen, wenn sie etwas grösser werden, nicht mehr den elektrischen Spannungen genau proportional. Es wurde durch besondere Versuche die Abweichung von der Proportionalität ermittelt, und die dritte Columne enthält die Werthe, welche den elektrischen Spannungen proportional sind.

Dass die Zuwachse in gleichem Zeitraume mit der Dauer der Bestrahlung abnehmen, lässt sich auch auf die Weise zeigen, dass man die kupferne Kugel erst 5, 10, 15 Sec. u. s. f. nach Beginn der Bestrahlung isolirt. In einem solchen Versuche, wo die Kante (1, 2) des Krystalles Nr. 12 von einer in 270^{mm} Abstande befindlichen Gasflamme bestrahlt wurde, entstanden die in der zweiten Columne aufgeführten Ausschläge, wenn nach dem Beginn der Bestrahlung die

der Luft gleiche Bestrahlungen derselben Kanten zu verschiedenen Zeiten etwas verschiedene aktinoelektrische Spannungen hervorrufen; durch geringe Erwärmungen wird infolge besserer Isolirung der Oberfläche eine grössere Spannung ermöglicht. Ebenso erklärt sich hierdurch die Beobachtung, dass sehr häufig eine zweite Bestrahlung einen etwas höheren Werth giebt als die erste, infolge deren eben der Krystall etwas erwärmt worden.

Isolirung der kupfernen Kugel erst nach Verlauf der in der ersten Columne angegebenen Zahl von Secunden eintrat.

Isolirung trat ein nach	Beobachtete Ausschläge	Corrigirte Ausschläge
0 Secunden	+ 44 Skth.	+ 40 Skth.
5 -	+ 30 -	+ 28,5 -
10 -	+ 14,5 -	+ 14,5 -
15 -	+ 11 -	+ 11 -
etc.	etc.	etc.

Erhält man die Intensität der Strahlung unverändert, so bleibt, wie schon hervorgehoben, die Aktinoelektricität auf ihrem Maximum. Wird dabei die an der Kante des Krystalles stehende kupferne Kugel abgeleitet, so kehrt das Goldblättchen in seine Ruhelage zurück und geht nach wiederhergestellter Isolirung infolge der entstehenden Thermoelektricität langsam in geringem Grade nach der entgegengesetzten Seite. Hebt man unmittelbar nach wiedererfolgter Isolirung der Kugel die Strahlung auf, so verschwindet die im Krystall erregte Aktinoelektricität; es wird die durch ihre Einwirkung auf der kupfernen Kugel gebundene Elektricität frei und treibt das Goldblättchen nach der entgegengesetzten Seite.

Ebenso wie die Intensität der Aktinoelektricität innerhalb eines Zeitraumes von 30—40 Secunden nach dem Anzünden der Flamme ein Maximum erreichte, ebenso steigt auch nach dem Auslöschen der Flamme innerhalb eines gleichen Zeitintervalles der Ausschlag nach der entgegengesetzten Seite auf ein Maximum, d. h. innerhalb dieses Zeitintervalles sind die aktinoelektrischen Schwingungen wieder verschwunden. Leitet man die Kugel, wenn die durch die Strahlung erzeugte elektrische Spannung ihr Maximum erreicht hat, nicht ab, so kehrt, abgesehen von der schwachen thermoelektrischen Erregung, nach dem Auslöschen der Flamme das Goldblättchen innerhalb des obigen Zeitintervalles zur Ruhelage zurück.

Der Vorgang beim Verschwinden der Aktinoelektricität entspricht in seinem Verlaufe dem beim Entstehen. Das Anwachsen der elektrischen Spannung ist gleich nach dem Beginn der Bestrahlung stärker, später mit der Annäherung an das Maximum immer geringer; ebenso erfolgt das Verschwinden erst rascher, dann gegen das Ende immer langsamer. Beide Vorgänge folgen demselben Gesetze.

Als die kupferne Kugel an der Kante (1, 2) des Krystalles Nr. 12 stand und die durch eine in 270^{mm} Entfernung stehende Flamme erzeugte Aktinoelektricität ihr Maximum erreicht hatte, wurde die Kugel abgeleitet, wieder isolirt und dann die Flamme ausgelöscht. Die Beobachtung ergab zu den in der ersten Columne stehenden Zeiten die in der zweiten verzeichneten Ausschläge. Die dritte Columne enthält die reducirten Ausschläge, wie sie eintreten würden, wenn dieselben den elektrischen Spannungen genau proportional wären. Die vierte Columne giebt den Zuwachs in je 5 Secunden.

Nach dem Auslöschen der Flamme verflossen	Beobachtete Ausschläge	Reducirte Ausschläge	Zuwachs in je 5 Secunden
0 Secunden	0 Skth.	0 Skth.	
5 -	— 19,0 -	— 18,5 -	— 18,5 Skth.
10 -	— 27,0 -	— 26,0 -	— 7,5 -
15 -	— 33,0 -	— 31,0 -	— 5,0 -
20 -	— 39,0 -	— 36,0 -	— 5,0 -
25 -	— 41,0 -	— 38,0 -	— 2,0 -
30 -	— 44,0 -	— 40,0 -	— 2,0 -
35 -	— 45,0 -	— 41,0 -	— 1,0 -

Ebenso wie beim Anwachsen lässt sich auch beim Verschwinden der zuerst raschere, später langsamere Verlauf nachweisen, wenn man die kupferne Kugel nicht bereits im Momente des Auslöschens der Flamme isolirt, sondern diese Isolirung erst 5, 10 u. s. f. Secunden später bewirkt.

Die zuvor beschriebene Form des Anwachsens der Aktinoelektricität infolge einer eingetretenen Bestrahlung weist auf einen zu überwindenden Widerstand hin, welcher durch die erforderliche Betheiligung der materiellen Moleküle an den elektrischen Schwingungen veranlasst wird. Dieser Widerstand wird um so grösser, je schneller die Schwingungen werden und kann durch eine gegebene Bestrahlungsintensität nur bis zu einer gewissen Höhe überwunden werden. Dauert die Strahlung fort, so bleibt die aktinoelektrische Spannung auf gleicher Höhe, und die fortwährend zur Erhaltung der elektrischen Schwingungen in unveränderter Stärke verwendete Arbeit der Wärmestrahlung setzt sich in eine Erhöhung der Temperatur der Moleküle um.

Dieser Widerstand der materiellen Moleküle folgt auch aus dem sofort nach dem Aufhören der Strahlung beginnenden Abnehmen der

aktinoelektrischen Schwingungen; der Verlauf dieser Abnahme beweist ebenfalls wieder, dass der Widerstand bei grösserer Geschwindigkeit der kreisförmigen Schwingungsbewegungen stärker ist, indem die Schwingungen, wie oben gezeigt, nach dem Auslöschen der Flamme anfangs rascher, später langsamer abnehmen.

Da das Maximum der Aktinoelektricität von der Stärke der Bestrahlung abhängt, so muss jedes Schwanken in der Intensität der letzteren eine entsprechende Veränderung in dem Ausschlage des Goldblättchens zur Folge haben.

Das Maximum der aktinoelektrischen Spannung ist nun, wenigstens bei schwachen Einwirkungen, der Intensität der Bestrahlung direct proportional, wie sich aus folgenden Beobachtungen ergiebt.

Die Kante (1, 2) des Krystalles Nr. 12 stand an der mit dem Goldblättchen verbundenen kupfernen Kugel; der Kante (4, 5) gegenüber war eine Gasflamme aufgestellt. Als sich die Flamme in 118^{mm} Abstand von der kupfernen Kugel befand, zeigte sich ein Ausschlag von + 41 Skth.*); wurde die Flamme auf 166^{mm} entfernt, so betrug der Ausschlag + 20,5 Skth., und als ihre Entfernung auf 214^{mm} vergrössert war, nur noch 12 Skth. Nun verhält sich

$$166^2 : 118^2 = 41 : 20{,}7$$

$$\text{und } 214^2 : 118^2 = 41 : 12{,}5.$$

Die aktinoelektrischen Spannungen verhalten sich also umgekehrt wie die Quadrate der Abstände der Flammen oder wie die auf den Krystall fallende Intensität der Strahlung.

Es wurden ferner anstatt eines, zwei Gasbrenner in gleichen Abständen von der Kante des Krystalles nebeneinander gestellt, so dass nach Belieben nur der eine oder der andere oder beide angezündet werden konnten. Die eine Flamme erzeugte einen Ausschlag von 11,5 Skth., die andere von 10 Skth.; beide zusammen gaben dagegen 22,5 Skth.

Bei den vorstehenden Versuchen berührte die kupferne Kugel mit ihrem vordersten Punkte die Kante des Krystalles. Wird die Kugel von der Kante mehr und mehr entfernt, so nehmen die Ausschläge ab. In der folgenden Beobachtungsreihe berührte die kupferne Kugel zuerst die Kante (1, 2) des Krystalles Nr. 12 und wurde dann

*) Das Elektrometer war absichtlich weniger empfindlich gemacht als sonst.

allmählig von dieser entfernt. Der Abstand zwischen dem vordersten Punkte der Kugel und der Kante (1, 2) liess sich aber nur angenähert messen. Die zur Bestrahlung dienende Flamme blieb unverändert in 200^{mm} Abstand von der Kante (1, 2); die Empfindlichkeit des Elektrometers war höher als gewöhnlich gewählt.

Abstand der Kugel von der Kante	Ausschlag des Goldblättchens im Elektrometer
0	+ 83,0
2	+ 44,5
4	+ 27,5
6	+ 19,5
8	+ 17,0
10	+ 14,5
13	+ 10,0
32	+ 4,7

Der Ausschlag des Blättchens wird durch Entfernen der kupfernen Kugel nicht blos geringer, weil ihr Abstand von der positiven Kante (1, 2) sich vergrössert, sondern auch durch den Umstand, dass dabei ihr Abstand von den benachbarten negativen Kanten (6, 1) und (2, 3) in geringerem Verhältnisse wächst als von der Kante (1, 2).

Im Allgemeinen hängt bei sonst gleicher Beschaffenheit der einfachen Bergkrystalle die Stärke der auf den Kanten auftretenden Aktinoelektricität ausser von der Intensität der Strahlung auch von der Grösse der Krystalle ab, so dass Krystalle mit grösserem Querschnitte eine höhere elektrische Spannung zeigen, als kleinere Krystalle. Es wirken ja dann eine grössere Anzahl Schwingungen oder polarelektrisch gewordener Moleküle auf die kupferne Kugel ein und ausserdem ist die Vertheilungswirkung der entgegengesetzten Polarität auf den beiden seitlich liegenden Kanten durch die grössere Entfernung derselben von der Kugel geschwächt.

Es liegt wohl die Frage nahe, ob die Erregung der Aktinoelektricität von der Temperatur des bestrahlten Bergkrystalles abhängig ist. Entscheidende Versuche hierüber waren durch die mannigfachen Störungen, welche die auf das Gehäuse des Thermometers wirkenden und die Ruhelage des Goldblättchens verändernden Wärmeeinflüsse hervorriefen, mit unüberwindlichen Schwierigkeiten verbunden.

Es schien jedoch, als ob eine Temperaturerhöhung des Krystalles bis 70° die Erregung der Aktinoelektricität durch die Strahlung der Flamme in erheblicher Weise nicht veränderte.

Es ist schon früher erwähnt worden, dass die Erregung der Aktinoelektricität durch die Wärmestrahlen, namentlich durch die rothen und jenseits des Roth gelegenen Strahlen mit grossen Wellenlängen erfolgt. Zum Nachweise dieses Ausspruches mögen folgende Angaben dienen.

Von der Wärmestrahlung einer Gasflamme gingen, wenn der Betrag derselben durch die von ihr hervorgerufene aktinoelektrische Spannung gemessen wird, durch ein tiefdunkelviolettes Glas und ebenso durch ein mit Kupferoxydul gefärbtes rothes Glas 34 pCt., durch eine farblose Glasplatte 25 pCt., durch ein nicht sehr tief gefärbtes grünes Glas 23 pCt. und durch ein dunkelblaues Kobaltglas 16 pCt.

Als die Strahlung einer solchen Gasflamme mittelst der Melloni-schen Säule untersucht wurde, liessen die zuvor bezeichneten Gläser folgende procentische Mengen durch:

Tiefdunkelviolettes Glas	53 pCt.
Rothes Glas	53 pCt.
Farbloses Glas	36 pCt.
Dunkelgrünes Glas	31 pCt.
Dunkelblaues Kobaltglas	27 pCt.

Die Reihenfolge der verschiedenen Gläser in Betreff ihrer Fähigkeit, die wirksamen Strahlen durchzulassen, ist für die aktinoelektrischen Strahlen dieselbe wie für die auf die Thermosäule wirkenden; merkwürdig ist aber, dass die aktinoelektrische Wirkung durch die Einschaltung der Gläser in stärkerem Maasse geschwächt wurde, als die vom Russ der Thermosäule aufgenommene. Die aktinoelektrischen Wirkungen sind nur ungefähr $\frac{2}{3}$ so gross, als die auf die Thermosäule ausgeübten.

Als eine parallelepipedische mit Schwefelkohlenstoff gefüllte Glasflasche, deren äussere breitere Seiten 45^{mm} von einander abstanden, in den Weg der Strahlen des Gaslichtes gestellt wurde, betrug die aktinoelektrische Spannung 20 pCt. von der durch die freie Strahlung bewirkten. Eben so gross war die Wirkung, wenn ein durch Jod

tiefdunkelroth gefärbter Schwefelkohlenstoff angewandt wurde. Durch Wasser und Alaunlösung gingen ungefähr 8 pCt. hindurch.

Bei Messung der von der Gasflamme ausgehenden Strahlung durch die Thermosäule liess der farblose und der mit Jod gefärbte Schwefelkohlenstoff 37 pCt., Wasser 14 pCt. und Alaunlösung 13 pCt. hindurch.

Die Flamme des Wasserstoffes zeigte ungefähr dieselben Wirkungen wie die Gasflamme. Eine genaue Messung sowohl der freien Strahlung als auch der durch farbige Gläser und Flüssigkeiten hindurch gelassenen war jedoch nicht möglich, da sich die Wasserstoffflamme nicht constant erhalten liess.

Das elektrische Kohlenlicht erzeugte nicht so starke aktinoelektrische Spannungen, als man wohl erwarten möchte. Dasselbe wurde durch eine dynamoelektrische Maschine (System Hefener von Alteneck) erzeugt und besass eine Helligkeit von 4000 Normalkerzen, oder die mehr als 200fache Intensität einer Gasflamme. Als dasselbe in 400^{mm} Abstand den Krystall Nr. 12 bestrahlte und die kupferne Kugel in der Mitte der Kante (1, 2) stand, gab das in seiner Empfindlichkeit absichtlich geschwächte Elektrometer einen Ausschlag von 27 Skalentheilen. Wurde dann an die Stelle der Kohlenspitzen eine Gasflamme (Schnittbrenner) gebracht, so rief dieselbe einen Ausschlag von 4 Skth. hervor. Es war also die Wirkung des Kohlenlichtes nur ungefähr 7 Mal stärker als die der einfachen Gasflamme. Als die obengenannten Gläser eingeschaltet wurden, erschien die Schwächung der Strahlung aber geringer als bei der Gasflamme.

Wie schon oben S. 461 erwähnt, wurden die ersten Versuche über die Erregung der Aktinoelektricität in den Bergkrystallen mittelst des durch einen Spiegel concentrirten Sonnenlichtes ausgeführt; es soll daher jetzt die Wirkung der direkten Strahlen der Sonne mit der einer gewöhnlichen Gasflamme verglichen werden. Als die Flamme eines einfachen Schnittbrenners 270^{mm} von der Kante (1, 2) des Krystalles Nr. 12 entfernt stand, erzeugte sie bei einer bestimmten Empfindlichkeit des Elektrometers einen Ausschlag von 19,5 Skth. Wurde nun der Krystall, während die Kugel wieder an derselben Stelle der Kante (1, 2) stand, der freien Strahlung der Sonne ausgesetzt (30. Mai Mittags), so entstand ein Ausschlag von 23,8 Skth.

Da die aktinoelektrische Spannung vorzugsweise durch die dunklen

Wärmestrahlen erzeugt wird, so liess sich eine solche Wirkung auch, wie schon oben S. 508 angedeutet, von einem mit heissem Wasser gefüllten Würfel erwarten. Als die berusste Seite eines Würfels von 100mm Seite von der Kante (4, 5) des Krystalles Nr. 12 um 20mm abstand und die kupferne Kugel die Mitte der gegenüberliegenden Kante (1, 2) berührte*), so gab bei einer Temperatur des Wassers im Würfel von 50° C. das Elektrometer einen Ausschlag von 26 Skth.; derselbe sank auf 4 Skth., wenn anstatt der berussten eine blanke Seite derselben Kante gegenübergestellt wurde.

Schliesslich mögen hier noch einige nach dem letzten S. 508 beschriebenen Verfahren ausgeführte Beobachtungen eine Stelle finden, um zu zeigen, welche geringen Strahlungen erforderlich sind, um schon merkbare aktinoelektrische Spannungen auf den Bergkrystallen hervorzurufen.

Der Krystall Nr. 12 war so in Kupferfeilicht eingehüllt, dass nur die Kante (1, 2) und die sie umgebenden Flächenstücke aus demselben hervorragten. Das kupferne Kästchen, welches den Krystall enthielt, wurde neben das Elektrometer auf den kleinen Ofen *B* gestellt, eine Messingkugel von 22,5mm Durchmesser an den dickeren Platindraht *V* des Hebelarmes *L L'* befestigt und mittelst des Hebels der Kante (1, 2) dieses Krystalles genähert oder ohne erhebliche Reibung auf dieselbe aufgelegt.

Hatte die Kugel nahe dieselbe Temperatur wie der Krystall (20° C.), so entstand beim Annähern ein Ausschlag von + 1 Skth., beim Auflegen ging derselbe in — 1 über. Als dagegen die Kugel eine Temperatur von ungefähr 80° besass, erzeugte das Annähern einen Ausschlag, der innerhalb 20 bis 30 Secunden sein Maximum + 12 Skth. erreichte und bis + 23 stieg, als die Kugel bis zur Berührung mit der Kante niedergelassen wurde.

Nun wurde die Kugel mit der Erde in Verbindung gesetzt und sofort wieder isolirt. Während die Kugel ruhig auf der Kante lag, entstand jetzt ein negativer Ausschlag, der nach ½ Minute — 3, nach 1 Minute — 6, nach 1½ Minute — 9 Skth. u. s. w. betrug; er war die Folge der durch die Erwärmung der Kante entstehenden Thermo-

*) Der Abstand der berussten Würfelfläche von der Kugel betrug 64mm, da der Durchmesser des Krystalles 44mm mass.

elektricität. Am Ende des Versuches betrug die Temperatur der Kugel höchstens noch 40° C.*).

In einer anderen Versuchsreihe war die Temperatur des Krystalles 21° C. Als die Temperatur der Kugel ungefähr 50° C. betrug, entstand beim Annähern an die zuvor benutzte Kante ein Ausschlag von + 5, der beim Auflegen auf die Kante bis + 16 stieg. Hatte die Kugel nur die Temperatur von ungefähr 34°, so entstand beim Annähern ein Ausschlag von 2,5 Skth., und beim Auflegen auf die Kante von + 9 Skth. War die Temperatur der Kugel auf 28° C. gesunken, so betrug der Ausschlag beim Annähern + 1, beim Auflegen + 5 Skth. In diesem letzten Falle zeigte also die Kugel nur eine 7° C. höhere Temperatur als die Kante des Krystalles.

Nach der im Vorstehenden gegebenen allgemeinen Darstellung

---

*) Im Jahre 1880 hatte Herr Ch. Friedel (siehe die Anmerkung auf S. 483) Versuche über die Thermoelektricität der Krystalle in der Weise angestellt, dass er eine metallene Halbkugel, welche durch einen Draht mit der Nadel eines durch Branly etwas abgeänderten Thomson'schen Elektrometers verbunden war, in heissem Wasser erwärmte und auf den Krystall legte. Wird dieses Verfahren z. B. auf den Turmalin angewandt, so zeigt das Ende der Hauptaxe, auf welches die heisse Halbkugel gelegt wird, eine elektrische Spannung, welche der Erwärmung der Masse des Turmalins entspricht.

Ganz anderes gestaltet sich nun aber der Vorgang, wenn die heisse Kugel auf die Kante eines Bergkrystalles gelegt wird. Hier tritt, wie wir oben gesehen haben, zuerst eine andere Erscheinung, die Aktinoelektricität, und zwar in erheblicher und ziemlich rasch ein Maximum erreichender Stärke auf. Erst später beginnt der Einfluss der Erwärmung sich geltend zu machen und bewirkt eine langsame Bewegung des Goldblättchens nach der entgegengesetzten Seite, oder, wenn die aktinoelektrische Spannung nicht abgeleitet ist, ein Abnehmen des Ausschlages. Während in dem oben angeführten Versuche infolge der entstandenen Aktinoelektricität das Goldblättchen in höchstens 30 Secunden eine Ablenkung von + 23 Skth. aus der Ruhelage zeigte, betrug infolge der Thermoelektricität der negative Ausschlag in ½ Minute nur — 3 Skth.

Herr Friedel hat bei seinen Versuchen nur den ersten starken Ausschlag, welcher von der Aktinoelektricität herrührt, beobachtet, die bei fortdauernder Berührung der Kante durch die heisse Kugel aber entstehende Abnahme desselben, oder den entgegengesetzten Ausschlag, welcher nach einer Entladung der Kugel sich zeigt und allein der Thermoelektricität angehört, nicht wahrgenommen. Indem nun Herr Friedel die aktinoelektrische Spannung für die bei steigender Temperatur entstehende thermoelektrische nahm, mussten seine Angaben über die Lage der positiven und negativen thermoelektrischen Pole gerade der thatsächlich auftretenden thermoelektrischen Polarität entgegengesetzt lauten.

der aktinoelektrischen Vorgänge bleibt in Bezug auf die einzelnen einfachen Krystalle nur wenig hinzuzufügen. Von allen Krystallen, mit Ausnahme von Nr. 2, 3 und 5, welche infolge der geringen Länge ihrer Nebenaxe zu aktinoelektrischen Untersuchungen sich nicht eigneten, sind neben den auf die Thermoelektricität bezüglichen Abbildungen unter dem Buchstaben *C* die durch die Mitte derselben gelegten Querschnitte gezeichnet und in die Eckpunkte der Sechsecke die ungefähr in der Mitte der betreffenden Kante gemachten aktinoelektrischen Messungen eingetragen worden. Bei diesen Messungen wurden die Strahlen zweier dicht hintereinander gestellten Gasflammen (gewöhnliche Schnittbrenner) durch den oben S. 504 beschriebenen Hohlspiegel auf den Krystall geworfen, während die mit dem Elektrometer verbundene kupferne Kugel nahe in der Mitte der Höhe die zu prüfende Kante berührte. Es sind indess die auf den verschiedenen Krystallen gefundenen Werthe nicht streng vergleichbar. Wenn auch die Empfindlichkeit des Elektrometers auf ziemlich gleicher Höhe erhalten wurde, so änderte sich mit dem im Laufe des Tages wechselnden Gasdrucke die Grösse der Flamme und ausserdem hatte der Spiegel für die verschiedenen Krystalle nicht völlig genau dieselbe Stellung. Dagegen sind die auf demselben Individuum ausgeführten Messungen in Bezug auf die vorher erwähnten Umstände im Allgemeinen vergleichbar; es können aber auch auf einem durchaus homogenen Krystalle an einzelnen Kanten Abweichungen eintreten, wenn die Grössen der Nebenaxen ungleich sind und wenn die Längen der Kanten durch ungleiche Ausbildung der Pyramidenflächen sehr von einander verschieden sind. Auch durch die Beschaffenheit der Oberflächen der Prismenflächen können Abweichungen hervorgerufen werden. Wenn z. B. die direct von der Strahlung getroffenen Flächen matt oder mit feinem Staube bedeckt sind, so wird die in den Krystall eindringende und auf die hintere an die kupferne Kugel anliegende Kante gelangende Wärmestrahlung geschwächt werden und also die Aktinoelektricität in geringerer Stärke erscheinen. Schliesslich können auch kleine um 180° gedrehte, sonst nicht weiter erkennbare Theile in manchen Krystallen vorhanden sein, die zwar die regelmässige Vertheilung der Polaritäten unter die sechs Kanten noch nicht stören, wohl aber schwächend auf die Elektricität der ihnen benachbarten Kanten einwirken.

Auf dem Krystalle Nr. 1 ist an der Kante (1, 2) die beim Erkalten auftretende thermoelektrische Zone etwas verschoben, so dass diese Kante (Taf. I, Fig. 1 *B*,) eine schwache negative Spannung anstatt der positiven zeigt. Bei der Bestrahlung erscheint aber auf dieser Kante nicht die negative, sondern die normale positive Elektricität; (eben so tritt daselbst beim Druck S. 542 die normale negative auf). Auch die Mitte der Kante (2, 3) des Krystalles Nr. 6 giebt bei der Bestrahlung noch die normale negative Spannung (Fig. 6 *C*), während bei der Abkühlung dieselbe an dieser Stelle bereits durch die positive verdrängt wird.

Nachdem im Vorstehenden die auf den Kanten auftretenden Vorgänge beschrieben sind, will ich für die einfachen Krystalle auch wenigstens ein Beispiel der aktinoelektrischen Spannungen auf den Prismenflächen mittheilen. Die Fläche 1 des Krystalles Nr. 12 stand dem Spiegel gegenüber, die auf ihr durch die Strahlung zweier Gasflammen erzeugte Elektricität wurde in der S. 506 beschriebenen Weise mittelst des Taf. IV, Fig. V abgebildeten Drahtes *abcde* gemessen. Die beobachteten Werthe sind auf der neben Fig. 12 *C* gezeichneten Linie $\alpha\beta$, welche den Durchschnitt einer horizontalen Ebene durch die Mitte der Fläche 1 darstellt, aufgeführt.

Ähnlich verhielt sich auch die über dieser Fläche 1 liegende grosse Pyramidenfläche; die nach der Kante (6, 1) hinliegenden Theile zeigten negative, die der Kante (1, 2) benachbarten positive Elektricität. Die beobachteten Ausschläge waren schwächer als auf der Prismenfläche.

b. Zusammengetzte Krystalle.

Krystall Nr. 14. Dieser Krystall (vergl. S. 491) enthält in seiner oberen Hälfte ein um 180° gedrehtes Stück, infolge dessen die obere Hälfte der Kante (1, 2) thermoelektrisch negativ erscheint (Fig. 14 *B*). Genau in gleicher Weise wie die thermoelektrischen sind nun die aktinoelektrischen Spannungen vertheilt.

Fig. 14 *C* stellt einen Querschnitt durch diesen Krystall $\frac{1}{4}$ vom oberen und Fig. 14 *C'* einen solchen $\frac{1}{4}$ vom unteren Ende dar. In diese beiden Zeichnungen sind die aktinoelektrischen Spannungen eingetragen, welche beobachtet wurden, als bei Anwendung des S. 504 beschriebenen Verfahrens die kupferne Kugel an den Eck-

punkten dieser Querschnitte stand. Während nun der Querschnitt durch die untere Hälfte (Fig. 14 *C'*) die normale elektrische Vertheilung zeigt, erscheint in der oberen Hälfte Fig. 14 *C* auf der Kante (1, 2) anstatt der positiven die negative Polarität, und auf der Kante (2, 3) ist ebenso wie auch bei der Thermoelektricität (vergl. S. 493) infolge des anliegenden eingewachsenen Stückes die der Hauptmasse des Krystalles entsprechende negative Spannung geschwächt, während sie in der unteren Hälfte, wo jene Störung fehlt, kräftig hervortritt.

Krystall Nr. 15. Da bei den grossen Bergkrystallen Nr. 15—20 auch die Vertheilung auf den Prismensflächen genauer verfolgt werden sollte, so wurde ausser dem bisher gewöhnlich angewandten Verfahren, wobei die kupferne Kugel an einer Kante stand, auch das S. 506 erläuterte benutzt. Der Taf. IV, Fig. 5 abgebildete, mehrmals rechtwinklig gebogene Kupferdraht *abcde* berührte dabei mit dem freien Ende *e* seines kurzen horizontalen Theiles die betreffende Stelle der Kante oder Fläche des Krystalles, und die durch den Spiegel reflectirte Strahlung zweier Flammen fiel direct auf die zu prüfende Kante oder Fläche. Da infolge des geringen Querschnittes des Drahtes die elektrische Vertheilung seitens des Krystalles auf diesen Draht schwächer wirkt und der Leiter ausserdem eine grössere Länge besitzt, so muss bei diesem Verfahren der Ausschlag im Elektrometer geringer ausfallen als bei Anwendung der Kugel. Es sind daher die nach beiden Verfahren gemachten Beobachtungen in Bezug auf die Intensität nicht mit einander vergleichbar.

Der Krystall Nr. 15 enthält ein um 180° gedrehtes Stück, welches von der rechten Hälfte der Fläche 4 bis zur rechten Hälfte der Fläche 5 reicht (vergl. S. 493). Die in einem Querschnitte durch die Mitte auf den Kanten und Flächen mittelst der Kugel beobachteten aktinoelektrischen Spannungen sind in die Zeichnung Fig. 15 *C* eingetragen. Die Vertheilung der positiven und negativen Elektricität auf den Kanten stimmt, wie eine Vergleichung von Fig. 15 *C* mit Fig. 15 *B* zeigt, mit den beim Erkalten auftretenden thermoelektrischen Spannungen im Allgemeinen überein; nur tritt bei der Bestrahlung auf der Kante (4, 5) bereits die dem eingeschobenen Stücke entsprechende positive Spannung auf, während beim Erkalten die Kante (4, 5) selbst noch eine sehr schwache negative Spannung erhielt, und erst dicht daneben auf der Fläche 5 die positive sich zeigte.



In Fig. 15 *C'* sind die Beobachtungen eingetragen, welche mittelst des gebogenen Drahtes *abcde* auf verschiedenen Punkten der Flächen 4, 5 und 6 in eben diesem Querschnitte ausgeführt wurden.

Krystall Nr. 16. Das in diesem Krystalle vorhandene um 180⁰ gedrehte Stück reicht, wie bereits S. 494 nachgewiesen, von der linken Hälfte der Fläche 4 bis zur rechten Hälfte der Fläche 6. Fig. 16 *C* stellt den durch die Mitte des Krystalles geführten Querschnitt dar und in diesen sind die an den einzelnen Punkten desselben mittelst der Kugel ausgeführten Messungen eingetragen worden. Wie bei der Thermoelektricität zeigen auch hier die Kanten (4, 5) und (5, 6) eine in Bezug auf die elektrische Vertheilung am grösseren Stücke umgekehrte Polarität. In den Querschnitt Fig. 16 *C'* sind die mittelst des Drahtes *abcde* auf den verschiedenen Punkten desselben gemachten Beobachtungen eingeschrieben. Die beim Erkalten auf der Fläche 4 (Fig. 16 *A*) erscheinende schwache negative, und ebenso die auf der Fläche 6 sich zeigende schwache positive treten bei der Bestrahlung (Fig. 16 *C'*) nicht hervor, sondern geben sich nur durch eine Schwächung der positiven Spannung auf der Fläche 4 und der negativen auf der Fläche 6 kund. Diese Abweichung zwischen den aktinoelektrischen und den beim Erkalten auftretenden thermoelektrischen Spannungen hat ihren Grund in den verschiedenen Verhältnissen, unter welchen die Beobachtungen ausgeführt worden sind. Bei den thermoelektrischen Untersuchungen war der Krystall bis auf die zu prüfenden Flächen 4 und resp. 6 in Kupferfeilicht eingehüllt und daher an dem grössten Theile seiner Oberfläche abgeleitet, während bei den aktinoelektrischen Beobachtungen der Krystall völlig frei stand und auf allen Theilen seiner Oberfläche die daselbst erregte Elektricität behielt. Es liegen mir auch thermoelektrische Beobachtungen vor, bei welchen die Einhüllung nicht so vollständig war, als zuvor angegeben, was zur Folge hatte, dass bei der Abkühlung die negative Zone auf der Fläche 4 nicht erschien, sondern sich nur durch die Schwächung der positiven Spannung zu erkennen gab, und dass auf der Fläche 6 die positive Spannung nur auf einer sehr kurzen Strecke in der rechten oberen Hälfte auftrat.

Krystall Nr. 17. Das eingeschobene, um 180⁰ gedrehte Stück reicht von der Kante (5, 6) bis nahe zur Mitte der Fläche 1 (vergl.



oben S. 494). Fig. 17 *C* stellt die in dem mittleren Querschnitte mittelst der Kugel ausgeführten aktinoelektrischen Beobachtungen dar. In Fig. 17 *C'* sind die mit dem Drahte *abcde* auf den verschiedenen Punkten dieses Querschnittes beobachteten aktinoelektrischen Spannungen eingetragen. Bei der thermoelektrischen Untersuchung erschien auf der Kante (5, 6) Fig. 17 *A* noch die dem Hauptkrystalle entsprechende positive Spannung; und ebendiese wurde auch bei der Bestrahlung unter Anwendung der Kugel beobachtet (Fig. 17 *C*); bei den Versuchen mit dem Drahte *abcde* dagegen trat bei der Bestrahlung auf dieser Kante schon die dem eingeschobenen Stücke angehörende negative auf.

Krystall Nr. 18. Die Zusammensetzung dieses Krystalles ist S. 495 speciell erläutert. Fig. 18 *C* enthält die im mittleren Querschnitte mittelst der Kugel und Fig. 18 *C'* die mittelst des Drahtes *abcde* gemachten aktinoelektrischen Beobachtungen. Die Kante (5, 6) gab mittelst des Drahtes oben eine Spannung — 12, in der Mitte — 7 und unten + 5. Sie stimmt also in ihrem Verhalten im Allgemeinen mit dem bei der Erkaltung beobachteten überein, nur reichte die negative Polarität bei der Erkaltung nicht bis zur Mitte, während diese Mitte bei der Bestrahlung noch negativ gefunden wurde. Die Kante (3, 4) zeigt ein eigenthümliches Verhalten; beim Beginne der Bestrahlung giebt das Goldblättchen einen schwachen positiven Ausschlag, der aber sehr bald abnimmt und in einen schwachen negativen übergeht.

Krystall Nr. 19. Auf S. 495 ist die Lage der beiden in diesen Krystall eingeschobenen Stücke genauer angegeben; die aktinoelektrischen Spannungen stimmen mit den bei der Erkaltung auftretenden überein; selbst auf der Kante (5, 6) zeigt sich bei der thermoelektrischen Prüfung während der Abkühlung ebenso wie bei der Bestrahlung der obere kleinere Theil positiv, die Mitte und der untere Theil aber negativ.

Krystall Nr. 20. Die Zusammensetzung dieses Krystalles ist S. 496 erläutert. Fig. 20 *C* stellt die in dem Querschnitte durch die Mitte mittelst des Drahtes *abcde* ausgeführten aktinoelektrischen Beobachtungen dar. Dieselben stimmen mit den thermoelektrischen bei der Erkaltung überein, nur ist infolge der schon mehrfach erwähnten verschiedenen Verhältnisse die Ausbreitung der einzelnen

Zonen etwas abweichend und auf der Fläche 3 wird bei der Bestrahlung die schwache positive Spannung nicht sichtbar, sondern giebt sich blos durch eine beträchtliche Schwächung der negativen kund.

C. Über die Wirkung des Überstreichens eines Bergkrystalles mit einer Alkoholflamme.

Ein im Allgemeinen sehr brauchbares Verfahren, um einen an seiner Oberfläche elektrisch geladenen Nichtleiter unelektrisch zu machen, besteht in dem Überstreichen dieser Oberfläche mit einer Alkoholflamme. Am bequemsten wendet man die Flamme eines an dem unteren Ende eines mässig starken Kupferdrahtes befestigten und in Alkohol getauchten kleinen Baumwollenbausches an. Liegt die zu bestreichende Fläche horizontal, so treibt man beim Überfahren durch schwaches Blasen die Flamme gegen die Fläche. Dabei wird die an der Oberfläche selbst befindliche Elektricität von der Flamme hinweg genommen, die an den unterhalb der Oberfläche liegenden Theilchen haftende aber in ihrer Wirkung nach aussen dadurch aufgehoben, dass die Flamme eine für die Neutralisirung erforderliche Menge entgegengesetzter Elektricität auf die Oberfläche führt, welche dann durch die in den unterhalb liegenden Schichten befindliche gebunden wird.

Ich habe dieses Verfahren bei meinen thermoelektrischen Untersuchungen vielfach benutzt, um die Oberflächen der Krystalle unelektrisch zu machen. Bei Krystallen, welche durch Temperaturänderungen nur schwach elektrisch werden, wirkt nach kurzem Anblasen mit der Flamme die Oberfläche derselben nicht mehr auf den mittelst des Hebels genäherten Platindraht; dagegen tritt bei Krystallen, welche schon durch sehr schwache Temperaturänderungen starke elektrische Spannungen erlangen, unmittelbar nach dem Anblasen, wenn solches nicht sehr kurz gewesen, eine der Abkühlung der betreffenden Stelle entsprechende Elektricität auf. Wird der mit dem Elektrometer in Verbindung stehende Platindraht V entladen, und die Oberfläche des Krystalles durch Anhauchen (Beschlag mit Wasser) für den Augenblick unelektrisch gemacht, so zeigt sich, wenn man den Platindraht wieder nähert, nochmals eine, wenngleich schwächere Spannung in demselben Sinne, weil eben die Abkühlung noch fortdauert.

In der beschriebenen Weise treten z. B. die Erscheinungen beim Turmalin und brasilianischen Topas ein. Die nach dem Anblasen mit der Flamme wahrnehmbare Elektricität entspricht also der Abkühlung, die durch die Erwärmung erzeugte wurde bereits durch die Flamme selbst hinweggenommen oder neutralisirt.

Ganz anders gestalten sich nun die Vorgänge beim Bergkrystalle, wenn seine Oberfläche mit einer Alkoholflamme überstrichen wird. Die von der Alkoholflamme ausgehende Strahlung erregt in dem Krystalle eine aktinoelektrische Spannung; dieselbe wird aber durch die mittelst der Flamme auf die Oberfläche übertragene entgegengesetzte Elektricität neutralisirt. Würde die Strahlung unverändert fortbestehen, so würde also der Krystall unelektrisch erscheinen. Mit dem Zurückziehen der Flamme hört aber die Strahlung auf und zugleich verliert die Oberfläche ihre Ableitung. Sofort verschwindet nun die im Krystall entstandene aktinoelektrische Spannung, während die ihr entgegengesetzte auf der isolirenden Oberfläche haftende nicht entweichen kann, und nach aussen hin wirksam wird. Die Oberfläche des Krystalles muss also nach dem Bestreichen mit der Alkoholflamme eine elektrische Spannung zeigen, welche mit der beim Erwärmen auftretenden übereinstimmt; denn die aktinoelektrische Spannung hat dasselbe Vorzeichen, wie die beim Erkalten erscheinende, die durch sie auf der Oberfläche gebunden gewesene und jetzt frei gewordene daher dasselbe, wie die beim Erwärmen entstehende, und diese letztere ist es eben, welche auf den genäherten Platindraht vertheilend wirkt. Auch erreicht der im Elektrometer entstehende Ausschlag sehr schnell sein Maximum, weil die Aktinoelektricität rasch verschwindet, während beim Turmalin der nach dem Bestreichen mit der Alkoholflamme sich zeigende Ausschlag nur mit sehr mässiger Geschwindigkeit auf sein Maximum ansteigt.

Auf warmen Bergkrystallen tritt derselbe Vorgang beim Überstreichen mit der Alkoholflamme auf, wie bei Krystallen von gewöhnlicher Temperatur.

Auf Krystallen, welche durch Strahlung stark aktinoelektrisch erregt werden, lässt sich durch Überstreichen mit der Alkoholflamme leicht eine so starke elektrische Spannung erzeugen, dass das Goldblättchen des Elektrometers ganz aus dem Felde des Mikroskopes getrieben wird.

Besitzt ein Bergkrystall die Temperatur des Zimmers, so ist es leicht, denselben durch Anhauchen, also durch Erzeugung eines leitenden Beschlages, unelektrisch zu machen. Dagegen giebt es kein sicheres Mittel, die Oberfläche eines heissen Bergkrystalles in unelektrischen Zustand zu versetzen. Bisweilen gelingt es wohl, durch ein ausserordentlich kurzes Anblasen der Oberfläche mit der Alkoholflamme den grössten Theil der vorhandenen Elektricität zu beseitigen, gewöhnlich aber häuft man auf den überstrichenen Kanten eine in ihrem Vorzeichen mit der beim Erwärmen entstehenden übereinstimmende Elektricität an. Dass diese Elektricität nicht durch die geringe Erwärmung der Masse des Bergkrystalles hervorgerufen wird, ergiebt sich mit voller Bestimmtheit aus dem Umstande, dass solche schwachen Temperaturerhöhungen unfähig sind, so starke elektrische Wirkungen hervorzurufen; ferner müsste ja, wenn die Erwärmung der Grund wäre, wie beim Turmalin, infolge der nach dem Zurückziehen der Flamme eintretenden Abkühlung eine dieser entsprechende elektrische Spannung sich zeigen.

D. Umkehrung der im Vorhergehenden beschriebenen aktinoelektrischen Erscheinungen.

Die durch Wärmeänderungen hervorgerufenen Erscheinungen haben meistens die Eigenschaft, dass bei entgegengesetzt gerichteter Wärmebewegung auch ein in bestimmter Weise entgegengesetzter Erfolg resultirt. Wir haben im Vorhergehenden eine warme Kugel der Kante eines auf gewöhnlicher Temperatur befindlichen Bergkrystalles genähert, und wollen nun die Frage stellen, welcher Vorgang eintritt, wenn eine kalte Kugel an die Kante eines heissen Bergkrystalles gebracht wird.

Wenn die warme Kugel der Kante eines kälteren Bergkrystalles genähert wird, so entsteht, wie wir sahen, diejenige Elektricität auf dieser Kante, welche dieselbe bei sinkender Temperatur annimmt. Ist dieser Vorgang umkehrbar, so steht zu erwarten, dass durch Annäherung einer kalten Kugel an die Kante eines erhitzten Bergkrystalles eine Polarität auf derselben erzeugt wird, wie sie daselbst bei der Erwärmung auftritt.

Im Folgenden werde ich nachweisen, dass der zuletzt angedeutete Vorgang in der That erzeugt wird. Leider ist es aber nicht möglich, denselben so rein darzustellen, wie die Elektricitätserregung im kalten Krystalle durch den Eintritt einer Wärmestrahlung. Bei dem umgekehrten Versuche wirkt fortwährend die durch Änderung der Temperatur in der Masse des Krystalles entstehende Thermoelektricität in hohem Grade störend ein, und dies um so mehr, als sich nicht der Bergkrystall, wie andere thermoelektrische Krystalle, durch Überstreichen mit der Alkoholflamme für einige Augenblicke unelektrisch machen lässt.

Ich will zunächst die Vorgänge, wie sie sich der Beobachtung darbieten, an zwei speciellen Fällen erläutern.

Der Krystall Nr. 8 wurde so in das in einem passenden kupfernen Kästchen befindliche Kupferfeilicht eingehüllt, dass die Kante (5, 6) nebst den anliegenden Flächenstücken aus demselben hervorragte, und eine halbe Stunde in den 150° C. heissen Ofen gestellt. Sofort nach dem Herausnehmen aus dem Ofen wurde das Kästchen auf den Ofen *B* neben das Elektrometer gestellt, und eine an dem Platindrahte *V* des Hebels *LL'* befestigte messingene Kugel von 21^{mm} Durchmesser, welche die Temperatur des Zimmers besass, der Mitte der Kante genähert und dann durch Drehung der Schraube *N'* Fig. IV ohne Reibung auf dieselbe aufgelegt.

Die Kante (5, 6) wird beim Erhitzen negativ; unmittelbar nach dem Herausnehmen aus dem Ofen zeigte das Elektrometer beim Annähern der Kugel bis zu 0,5^{mm} Abstand einen Ausschlag von — 100 Skth.; dieser Ausschlag stieg beträchtlich, als die kalte Kugel auf die Kante gelegt wurde.

Durch die eintretende Abkühlung nahm die negative Spannung ab. Nach vier Minuten erzeugte die Annäherung der Kugel auf 0,5^{mm} einen Ausschlag von — 9 Skth., der beim Auflegen auf die Kante bis — 52 stieg. Nach Verlauf von noch drei Minuten erzeugte dieselbe Annäherung schon einen positiven Ausschlag + 4, der beim Auflegen in — 44 überging; bald darauf betrug der Ausschlag beim Annähern + 8, beim Auflegen — 26. Wurde die Kugel ohne Reibung von der Kante abgehoben und in isolirtem Zustande, aber mit dem Goldblättchen des Elektrometers in Verbindung bleibend, entfernt, so ging das Goldblättchen in die Ruhelage zurück, ein Beweis, dass

auf die Metallkugel keine Elektricität übergegangen war, sondern nur Vertheilungswirkungen stattgefunden hatten.

Nach weiterer Abkühlung entstand bei Annäherung auf 0,5^{mm} ein Ausschlag von + 31 Skth., der durch Auflegen der Kugel sich auf + 2 verminderte. Als die Kugel mit der Kante in Berührung blieb, wuchs der Ausschlag wieder im positiven Sinne, eine Folge der Abkühlung der Masse des Krystalles durch die kalte Kugel. Bald darauf gab dieselbe Annäherung einen Ausschlag von + 43, der beim Auflegen der Kugel auf + 26 zurück ging, aber beim ruhigen Liegen der Kugel auf der Kante bald über + 50 Skth. stieg.

Es mögen noch die Beobachtungen auf einer beim Erwärmen positiven Kante folgen.

Der Krystall Nr. 13 wurde so in Kupferfeilicht eingesetzt, dass nur die Kante (4, 5) nebst den anliegenden Flächenstücken frei blieb; er wurde eine Stunde auf 125^0 C. erhitzt. Nach dem Herausnehmen ergab sich bei Annäherung der Kugel ein starker positiver Ausschlag, der beim Auflegen der kalten Kugel sich noch vergrösserte. Sieben Minuten später erzeugte die Annäherung einen Ausschlag + 20, der beim Auflegen bis zu + 35 stieg. Nach Verlauf von noch einer Minute brachte die Annäherung bis auf 3 oder 4^{mm} Abstand einen Ausschlag — 4 hervor, der bei weiterer Annäherung bis auf 0,5^{mm} in + 7 überging, und beim Auflegen der Kugel bis + 20 stieg.

Drei Minuten später wurde der Krystall mit einer Alkoholflamme überblasen, was, wie im Vorhergehenden (S. 528) nachgewiesen, den Krystall wieder stark positiv machte. Nach einiger Zeit betrug der Ausschlag beim Annähern + 20 und stieg beim Auflegen der Kugel auf + 45. Nach einigen Minuten wurde beim Annähern bis 3^{mm} ein Ausschlag — 3 beobachtet, der bei weiterer Annäherung bis 0,5^{mm} in + 6 überging, und beim Auflegen der Kugel bis + 19 stieg.

Aus den vorstehenden Versuchen ergiebt sich, dass die Annäherung der kalten Kugel an die Kante eines heissen Bergkrystalles und noch mehr das Auflegen der kalten Kugel auf die Kante eine Elektricität hervorruft, welche in ihrem Vorzeichen nicht mit der durch Abkühlung, sondern vielmehr mit der durch Steigerung der Temperatur auf derselben Kante erzeugten thermoelektrischen Spannung übereinstimmt. Die Wirkung der infolge der Berührung der heissen Kante mit der kalten Kugel eintretenden Abkühlung der Masse des

Bergkrystalles beginnt erst mehrere Secunden später sich bemerkbar zu machen. Die beim Annähern und beim Auflegen der kalten Kugel auftretende elektrische Erregung kann also nicht thermoelektrischen Ursprunges sein, sondern hat ihren Grund in den zwischen dem heissen Krystalle und der kalten Kugel eintretenden Wärmestrahlungen.

Ich wende mich nun schliesslich zur Erklärung der zuvor beschriebenen Erscheinungen.

Wir haben gesehen, dass jede Wärmestrahlung aktinoelektrische Spannungen in den Bergkrystallen hervorruft, welche Richtung dieselbe auch haben möge. So entstanden solche (S. 511) auch beim Erhitzen der Krystalle in Kupferfeilicht, und konnten beim Beginnen des Erhitzens an der freiliegenden Kante nachgewiesen werden; bei weiterem Fortschreiten der Temperatursteigerung in der Masse des Krystalles wurden sie jedoch durch die stärker hervortretende entgegengesetzte thermoelektrische Erregung verdeckt. Ebenso entstehen sie, wenn als Wärmequelle ein erhitzter Bergkrystall genommen wird. Es dauern ferner bei constanter Strahlung die aktinoelektrischen Spannungen in gleicher Stärke fort; der Wärme ausstrahlende Körper kommt dabei nur insofern in Betracht, als er eben Wärme ausstrahlt. Es werden daher bei einem Bergkrystalle alle erhitzten Moleküle durch ihre allseitige Strahlung in demselben aktinoelektrische Spannungen hervorrufen; dieselben können aber nicht in ihrer Polarität auftreten, weil sie durch die stärkeren entgegengesetzten thermoelektrischen verdeckt werden. Je höher die Temperatur eines Bergkrystalles ist, desto stärker müssen auch die aktinoelektrischen Schwingungen oder Spannungen werden.

In einem Bergkrystalle, der erhitzt wird und eben z. B. die Temperatur 130° erreicht hat, finden sich also gleichzeitig zwei entgegengesetzte elektrische Erregungen, eine thermoelektrische und eine aktinoelektrische; in der Wirkung nach aussen überwiegen jedoch die ersteren. Trägt eine Kante die Rhomben- oder Trapezoederflächen, so erscheint sie also jetzt negativ elektrisch; diese Polarität giebt sich auch kund, wenn ihr die kalte Kugel langsam genähert wird. Durch weitere Annäherung und besonders durch Auflegen der Kugel auf die Kante steigt der negative Ausschlag des Goldblättchens, erstens infolge der Annäherung, dann aber auch zweitens, weil infolge der Strahlung aus dem Innern des Krystalles gegen die kalte

Kugel die positive Aktinoelektricität geschwächt wird, während die negative Thermoelektricität nicht so schnell abnimmt, d. h. durch die infolge einer Abkühlung entstehende positive Thermoelektricität nicht so stark geschwächt wird, da die Abkühlung in den materiellen Molekülen langsamer vor sich geht.

Durch die Erhitzung ist ein Quantum negativer Elektricität auf der Oberfläche jener Kante und ihrer Umgebungen angehäuft, das wegen der isolirenden Eigenschaft des Bergkrystalles nicht sofort von selbst verschwinden kann; dasselbe wird theils durch die Berührung mit den Lufttheilchen, theils auch durch vielleicht nicht vollkommene Isolation etwas vermindert werden, aber im Beginne der Abkühlung und in den nächstfolgenden Minuten immer noch so beträchtlich sein, dass es nach aussen hin stärker wirkt, als die durch die allmählige Abkühlung entstehende positive Elektricität und die auf dieser Kante vorhandene positive Aktinoelektricität, welche letztere sich allerdings mit dem Sinken der Temperatur auch vermindert.

Nehmen wir den Zeitpunkt, wo beim Erkalten die Kante nach aussen keine elektrische Wirkung ausübt, also z. B. auf dem genäherten Platindrahte *V* keine elektrische Vertheilung erzeugt, so heben sich die thermoelektrischen und aktinoelektrischen Spannungen in ihrer Wirkung nach aussen auf. Da nun die aktinoelektrischen Spannungen auf der gewählten Kante positiv sind, so muss die von der Erhitzung herrührende negative Spannung noch gerade um den Betrag der aktinoelektrischen grösser sein, als die bis jetzt durch die Erkaltung erzeugte positive. Wird nun die kalte Kugel genähert und aufgelegt, so nimmt die Aktinoelektricität sehr schnell ab, während die Thermoelektricität sich in den ersten Secunden fast nicht ändert; es entsteht also ein negativer Ausschlag, weil jetzt die negative noch von der Erwärmung herrührende überwiegt.

Ist die Temperatur dann so weit gesunken, dass die Resultirende sämmtlicher elektrischer Erregungen nach aussen schwach positiv wirkt, so ist die Summe der durch die Erkaltung erzeugten positiven Thermoelektricität und der positiven Aktinoelektricität um ein Geringes stärker, als der Rest der von der Erwärmung herrührenden negativen Thermoelektricität. Die kalte Kugel wird also bei Annäherung bis auf 3 oder 4^{mm} einen schwach positiven Ausschlag geben, der aber bei weiterer Annäherung und namentlich beim Auflegen auf die

Kante in einen negativen übergeht. Die Schwächung der positiven aktinoelektrischen Spannungen lässt dann die noch vorhandenen negativen thermoelektrischen wieder überwiegen.

Wenn nun schliesslich die von der Erhitzung herrührende negative Elektricität von der infolge der Abkühlung entstandenen positiven überwunden ist, so wirken nach aussen die aktinoelektrischen und die thermoelektrischen Spannungen in gleichem Sinne; die kalte Kugel, bis auf 4^{mm} genähert, theilt dem Goldblättchen starke positive Spannung mit. Wird die kalte Kugel weiter genähert, oder noch besser aufgelegt, so wird die Aktinoelektricität sofort geschwächt, die Summe der positiven Elektricitäten also kleiner, und der positive Ausschlag des Goldblättchens vermindert sich. Lässt man die Kugel auf der Kante liegen, so sinkt auch die Temperatur der Masse des Krystalles und es steigert sich dadurch die positive Thermoelektricität, so dass also der positive Ausschlag des Goldblättchens wieder zu wachsen beginnt.

Da durch die Strahlung des heissen Krystalles gegen die kalte Kugel stets sofort die positiven aktinoelektrischen Spannungen der in Rede stehenden Kante geschwächt werden, so muss der Ausschlag, welcher bei Annäherung der Kugel auf mässigen Abstand entsteht, durch weitere Annäherung und besonders durch Auflegen auf die Kante in der Weise sich ändern, dass das Goldblättchen sich in der Richtung der negativen Elektricität bewegt.

Hiernach sieht man leicht, dass der Vorgang beim Auflegen der kalten Kugel auf die Kante des Krystalles genau derselbe bleibt, wenn auch der Kante auf irgend eine Weise noch Elektricität von aussen her zugeführt worden ist.

Gesetzt, es gelänge, wenn der auf 130^0 erhitzte Krystall aus dem Ofen genommen ist, die Kante durch kurzes Abblasen mit einer Alkoholflamme unelektrisch zu machen, so dass sie also nach aussen nicht wirkt. Soll, wie angenommen, die Kante nach aussen unelektrisch erscheinen, so muss die Flamme der Oberfläche so viel positive zuführen oder von der auf ihr durch die thermoelektrische Erregung entstandenen negativen so viel übrig lassen, dass die Wirkung der positiven Aktinoelektricität und der auf der Oberfläche vorhandenen negativen sich im äusseren Raume aufheben. Wird nun die kalte Kugel der Kante genähert oder aufgelegt, so nimmt sofort die positive Aktino-

elektricität ab, die in ihrer Stärke fast unverändert gebliebene negative Elektricität überwiegt also in der Wirkung nach aussen und das Elektrometer zeigt negative Spannung an, d. h. dieselbe Polarität, wie sie beim Erhitzen der Kante auftritt.

Wird die kalte Kugel der Kante eines erhitzten Bergkrystalles genähert, auf welcher keine Rhomben- und Trapezoederflächen erscheinen können, so treten genau dieselben Vorgänge, nur mit entgegengesetzten Vorzeichen auf.

Die Einwirkungen der kalten Kugel auf den erhitzten Krystall sind um so stärker, je höher die Temperatur der Kante und je niedriger die Temperatur der Kugel ist.

IV. Piezoelektricität.

A. Verfahren bei den Beobachtungen.

Bei den oben S. 462 erwähnten Versuchen, polare Elektricität in hemimorphen Krystallen durch Druck zu erzeugen, brachten die Herren J. und P. Curie die Krystalle, an welche senkrecht gegen die hemimorph gebildete Axe ebene Flächen angeschliffen waren, zwischen die Backen eines Schraubstockes, welche inwendig behufs der Isolirung mit parallelepipedischen Stücken von Hartgummi bekleidet waren. Die inneren Seiten dieser Parallelepipeda waren mit Stanniol belegt und an diese Stanniolflächen wurden dann die senkrecht gegen die hemimorph gestaltete Axe angeschliffenen Flächen angelegt. Die eine Stanniolbelegung stand mit dem Elektrometer, die andere mit der Erde in leitender Verbindung.

Es lag mir daran, die Krystalle auch in ihrer natürlichen Begrenzung, also ohne Anschleifen von Flächen, zu untersuchen und es gelang dies in vollständigster Weise. Es genügte z. B. einen einfachen Bergkrystall mit zwei gegenüberstehenden Prismenkanten zwischen die zuvor beschriebenen Backen des Schraubstockes zu bringen, um durch Druck und Nachlassen des Druckes sehr starke elektrische Spannungen zu erzeugen.

Bei diesem Verfahren liess sich jedoch die Stärke des Druckes nicht wohl abmessen; ferner trat bei manchen Krystallen eine eigen-

thümliche Nachwirkung ein, welche durch die mangelhafte Elasticität des Hartgummis veranlasst sein konnte.

Ich wählte daher ein anderes Verfahren, bei welchem der Druck in völlig constanter Weise unterhalten und seiner Grösse nach genau gemessen werden konnte.

An einen einarmigen, 24^{cm} langen, aus einem auf die hohe Kante gestellten Eisenstreifen gebildeten Hebel, dessen Axe von zwei auf einem starken Zinkbleche befestigten Eisenstäben gehalten wurde, war 12^{cm} von dem Drehpunkte entfernt auf seiner unteren Seite ein würfelförmiges Stück Hartgummi angeschraubt und dessen untere Fläche mit einer 2^{mm} dicken Zinnplatte belegt. Ein gleiches Stück Hartgummi, aber auf seiner oberen Fläche mit einer Zinnplatte belegt, konnte in verschiedenen Höhen unterhalb des ersten aufgestellt werden. Diese Höhe wurde der Dicke des zu prüfenden Krystalles angemessen stets so gewählt, dass, wenn der Krystall sich in der richtigen Lage zwischen den beiden mit Zinn belegten Hartgummistücken befand, der Hebel möglichst horizontal stand. Das zur Erzeugung des Druckes bestimmte Gewicht befand sich am Ende des Hebels. Das blosse Aufheben und Niederlassen desselben, wozu nur eine geringe Bewegung der Hand erforderlich war, genügte somit zur Aufhebung und Wiederherstellung des Druckes.

Dieser kleine Apparat liess sich sehr bequem gleich neben dem öfter erwähnten Hebelwerk LL' (S. 477) auf einem niedrigen Stative befestigen; die eine der auf den Hartgummistücken sitzenden Zinnplatten wurde sodann mit dem dicken Platindraht V jenes Hebelwerkes verbunden, die andere aber zur Erde abgeleitet. Durch eine geringe Abwärtsbewegung des Platindrahtes V, welcher den Draht uw berührte, mittelst des Hebels LL' konnte die mit dem Goldblättchen des Elektrometers in Verbindung stehende Zinnplatte isolirt und durch eine Aufwärtsbewegung des Hebels (bis zum Anlegen an den Draht uw) wieder zur Erde abgeleitet werden.

An demselben Hebel sass neben dem erwähnten Hartgummistück ein zweites gleiches, aus dessen unterer Fläche aber ein ungefähr 2^{mm} dicker schmaler Zinnstreifen hervorragte. Derselbe war in einen Einschnitt des Hartgummistückes eingeschoben. Seine untere hervorstehende Kante war zu einer stumpfen Schneide zugeschärft, und

wurde benutzt, wenn der Druck auf eine bestimmte linienförmige Stelle einer Krystallfläche ausgeübt werden sollte.

Der Faden, an welchem das zur Ausübung des Druckes bestimmte Gewicht hing, ging durch einen Schlitz in der Zinkplatte; die Hand zum Heben und Niederlassen des Gewichtes befand sich also unterhalb der mit der Erde leitend verbundenen Zinkplatte. Ausserdem hing zum weiteren Schutze gegen möglicherweise durch die Bewegung der Hand entstehende Elektricität ein breiter Staniolstreifen von der Zinkplatte herab und schützte die Leitung zum Elektrometer vollständig gegen jeden störenden Einfluss.

Sollte die Elektricität beim Eintritt und beim Aufhören des Druckes gemessen werden, so wurde das Goldblättchen kurz vor dem Niederlassen und Aufheben des Gewichtes durch Abwärtsbewegen des Hebels LL' isolirt. Handelte es sich um die elektrischen Erregungen, welche eine oder mehrere Secunden nach dem Eintritte oder dem Aufhören des Druckes auftreten, so blieb beim Niederlassen oder resp. Aufheben des Gewichtes das Goldblättchen noch zur Erde abgeleitet und wurde erst eine oder mehrere Secunden später isolirt.

Bei der Prüfung der prismatischen Seitenflächen erhielt der Krystall durch das blosse Auflegen einer Seitenfläche auf eine Zinnplatte infolge der nicht völlig ebenen Beschaffenheit dieser Fläche öfter eine unsichere Lage; eben dies trat auch bei der Untersuchung der Kanten ein, wenn dieselben nicht geradlinig ausgebildet waren, oder wenn der Querschnitt des Krystalles ein Sechseck von sehr ungleichen Seiten darstellte. Um diesen Übelstand zu beseitigen, wurden die betreffenden Krystalle gerade wie bei den thermoelektrischen Versuchen in Kupferfeilicht eingehüllt, so dass nur die zu prüfenden Flächen oder Kanten frei blieben. Durch mehrmaliges Aufstauchen des Kästchens, welches das Kupferfeilicht enthielt, legten sich die Feilspähne so dicht an den Krystall, dass bei der nicht unbedeutenden Grösse desselben eine feste Lage erzielt wurde, und ein Druck von 1 Kilogr. keine Verschiebung bewirkte. Dies Verfahren hatte ausserdem noch den Vortheil, dass ausser der Kante oder Fläche, auf welche der Druck ausgeübt werden sollte, alle übrigen Theile des Krystalles zur Erde abgeleitet waren. Wurde das Kästchen mit dem Krystall selbst isolirt, und mit dem Goldblättchen des Elektrometers

durch den Draht *W* verbunden, so liess sich auch die der Spannung der gedrückten Kante entgegengesetzte Elektricität beobachten.

B. Gesetze der piezoelektrischen Vorgänge auf Bergkrystallen.

a. Einfache Krystalle.

Die auf den Kanten der einfachen Krystalle Nr. 1 bis 13 durch einen Druck von 1 Kilogramm erzeugten elektrischen Spannungen habe ich in die bei jedem Krystalle mit *D* bezeichnete Figur, welche den Querschnitt durch die Mitte desselben darstellt, eingetragen. Beim Nachlassen dieses Druckes tritt ein gleich grosser Ausschlag des Goldblättchens nach der entgegengesetzten Seite ein. Da die Beschreibung der einzelnen Krystalle früher gegeben und ihr Netz in den mit *A* bezeichneten Figuren dargestellt ist, so lässt sich leicht die Beziehung der piezoelektrischen Spannungen zu der Krystallform erkennen.

Für alle Kanten sämmtlicher einfachen Bergkrystalle gilt ausnahmelos das Gesetz: Auf denjenigen Kanten, welche Rhomben- oder Trapezoederflächen tragen, oder wo sie bei vollzähliger Ausbildung liegen würden, tritt bei Vermehrung des Druckes negative, bei Verminderung desselben positive Spannung auf; die anderen drei Kanten verhalten sich gerade umgekehrt; beim Druck erscheint auf ihnen positive, beim Nachlassen desselben negative Polarität.

Auch auf den Kanten (1, 2) der Krystalle Nr. 1 und 3 (Fig. 1 *D* und 3 *D*), sowie auf der Kante (5, 6) des Krystalles Nr. 5 (Fig. 5 *D*) und in der Mitte der Kante (2, 3) des Krystalles Nr. 6 (Fig. 6 *D*) treten die dem soeben aufgestellten Gesetze entsprechenden elektrischen Spannungen auf. Die bezeichneten Kanten der Krystalle Nr. 1 und 6 gaben auch bei der Bestrahlung die normalen aktinoelektrischen Polaritäten (S. 523), während sich in dem bei der Erkaltung auftretenden thermoelektrischen Spannungen Störungen zeigten.

Aus den vorhergehenden Angaben folgt, dass sämmtliche Kanten bei Vermehrung des Druckes dieselbe Polarität zeigen, wie sie thermoelektrisch bei steigender Temperatur beobachtet wird, und ebenso andererseits bei Verminderung des Druckes in ihrer elektrischen Spannung mit der beim Erkalten entstehenden übereinstimmen.

Schon oben S. 462 habe ich erwähnt, dass die Herren J. und P. Curie zufolge ihrer Versuche die allgemeine Regel glaubten aufstellen zu können, dass jede Annäherung der Moleküle, möge sie durch Druck oder Abkühlung erzeugt werden, und ebenso andererseits jede Entfernung der Moleküle, möge sie eine Folge des Nachlassen eines Druckes oder einer Erwärmung sein, dieselbe elektrische Polarität hervorbringe. Wie man sieht, widersprechen die obigen Beobachtungen an den Bergkrystallen diesem Gesetze. J. und P. Curie geben für die piezoelektrischen Spannungen die richtige Polarität für die einzelnen Kanten an, dagegen sind ihre Ansichten über die thermoelektrischen irrthümlich; die wirklich auftretenden thermoelektrischen Spannungen sind nämlich auf den Kanten den von ihnen angenommenen gerade entgegengesetzt*).

Die Herren J. und P. Curie erwähnen, dass sich ihre Untersuchungen erstreckt haben auf die Krystalle der Blende, des chlorsauren Natrons, des Boracits, des Turmalins, des Bergkrystalles, des Kieselzinkerzes, des Topases, der gewöhnlichen Weinsäure, des Zuckers und des Seignettesalzes.

In dieser Aufzählung findet sich ein Mineral, der Topas, welches, wie ich gezeigt habe, nicht hemimorph ist**). Ferner sind die thermoelektrischen Vorgänge bei der Blende, dem chlorsauren Natron und dem Seignettesalze noch nicht hinreichend festgestellt. Es bleiben also von den zuvorgenannten Substanzen nur sechs übrig, welche in ihrem thermoelektrischen Verhalten vollständig bekannt sind.

Es existiren nun aber noch drei ausgezeichnet hemimorphe Substanzen: das neutrale weinsaure Kali, der Milchzucker und der Struvit. Das thermoelektrische Verhalten des neutralen weinsauren Kalis habe

---

*) Die Herren J. und P Curie sind zu ihrer Annahme durch die Angabe des Herrn Friedel (s. oben S. 483 und S. 521) veranlasst worden. Ich habe oben S. 521 bereits gezeigt, dass Herr Friedel bei seinen Versuchen mittelst Auflegens einer heissen Kugel gar nicht die infolge der Erwärmung eintretende thermoelektrische Spannung, sondern die aktinoelektrische beobachtet hat. Da nun diese letztere mit der beim Erkalten entstehenden übereinstimmt, Herr Friedel aber glaubte die bei der Erwärmung entstehende Thermoelektricität beobachtet zu haben, so musste, wie schon hervorgehoben, seine Angabe gerade die umgekehrte Polarität enthalten.

**) Diese Abhandlungen Bd. XIV, S. 359 ff.

ich bereits 1841 *) dargelegt; meine Beobachtungen über den Milchzucker werde ich in einer späteren Abhandlung erläutern, während die elektrische Vertheilung am Struvit schon 1846 von Hausmann **) angegeben worden ist.

In einer kurzen Mittheilung in den Berichten dieser Gesellschaft ***) habe ich ausgesprochen, dass die von J. und P. Curie aufgestellte Regel nicht blos beim Bergkrystalle, sondern auch bei zwei der zuletztgenannten hemimorphen Substanzen, dem neutralen weinsauren Kali und dem Struvit, nicht zutrifft.

Nehmen wir beim neutralen weinsauren Kali die hemimorphe Axe als Hauptaxe, so zeigt dasjenige Ende, welches durch die Flächen eines horizontalen Prismas zugeschärft wird, beim Erwärmen negative und beim Erkalten positive Spannung, während die entgegengesetzte an dem gegenüberliegenden Ende, welches ausser anderen Flächen die gegen die Hauptaxe senkrechte Endfläche trägt, erscheint. Beim Druck wird nun das erstere (beim Erkalten positive) Ende negativ und das zweite (beim Erkalten negative) Ende positiv. Beim Nachlassen des Druckes treten die entgegengesetzten Elektricitäten auf.

Der Struvit trägt an dem einen Ende grosse Flächen eines horizontalen Prismas, an dem anderen die gerade Endfläche. Das erstere Ende wird beim Erkalten positiv, durch Druck aber negativ, das zweite beim Erkalten negativ und beim Druck positiv. Beim Erwärmen, ebenso wie beim Nachlassen des Druckes sind die Polaritäten den zuvor angegebenen entgegengesetzt.

Die Herren J. und P. Curie fügen ihrer allgemeinen Regel den Zusatz bei, dass, wenn ihre Auffassung richtig wäre, ein Krystall, welcher nach seiner hemimorphen Axe einen negativen Ausdehnungscoefficienten besitzt, durch Druck dieselbe Polarität zeigen müsste, wie durch Erwärmung.

Beim neutralen weinsauren Kali und beim Struvit sind die Ausdehnungscoefficienten durch die Wärme unbekannt; für den Bergkrystall folgt aber aus Fizeau's Bestimmungen ein positiver Ausdehnungscoefficient nach den hemimorphen Nebenaxen, der sogar

*) Poggendorff's Annalen, Bd. 53, S. 620.
**) Nachrichten von der G.-A.-Universität zu Göttingen. 1846. S. 121.
***) Berichte der math.-phys. Klasse d. K. Sächs. Ges. d. Wiss. 1880. S. 144.

grösser ist als nach der Hauptaxe, so dass also die Abweichung von der durch J. und P. Curie aufgestellten Regel nicht durch diesen Umstand erklärt werden kann.

Überblicken wir die in den Figuren Nr. 1 bis 13 unter *D* bei den einfachen Bergkrystallen eingetragenen Zahlen, so zeigen die meisten derselben sich nahe gleich. Wo einzelne Kanten, z. B. Kante (5, 6) von Nr. 5 einen von den auf den übrigen Kanten beobachteten merklich verschiedenen Werth geben, liegt wohl der Grund in einer sonst nicht erkennbaren Einschaltung eines um 180° gedrehten kleinen Stückes; für eben diese Kante giebt auch die Bestrahlung den geringsten Werth und bei der Abkühlung erscheint daselbst schwache negative Spannung anstatt der positiven, wie sie der Vertheilung auf den übrigen Kanten entsprechen würde.

Während also die einfachen Bergkrystalle durch einen gleichen Druck nahe dieselbe elektrische Spannung zeigen, treten in den thermoelektrischen Spannungen sehr beträchtliche Unterschiede auf. Die Krystalle Nr. 4 und 12 erhalten durch gleichen Druck nahe dieselben elektrischen Spannungen; bei der Abkühlung sind dieselben auf dem Krystall Nr. 4 viel grösser als bei dem Krystall Nr. 12.

Zur Erklärung dieses Unterschiedes zwischen den Intensitäten der durch Druck und Erkaltung erzeugten Elektricitäten könnte man vielleicht die Ansicht aufstellen wollen, dass derselbe durch eine Verschiedenheit in der isolirenden Eigenschaft der Oberfläche der einzelnen Krystalle bedingt sei. Für die Grösse der piezoelektrischen Spannungen würde nämlich eine etwas weniger isolirende Oberflächenbeschaffenheit ohne wesentlichen Einfluss sein, weil die Elektricität plötzlich eintritt und unmittelbar darauf gemessen wird, während bei der thermoelektrischen Prüfung die Entwickelung der elektrischen Spannungen erst allmählig in längerer Zeit erfolgt. Eine Vergleichung der untersuchten Krystalle bestätigt die Ansicht aber nicht. So hat der Krystall Nr. 1 nahe denselben Querschnitt wie der Krystall Nr. 6; während nun der erstere eine vollkommen glatte Oberfläche zeigt, erscheint dieselbe bei Nr. 6 matter, noch viel matter ist dieselbe beim Krystall Nr. 5, und dessenungeachtet geben die Krystalle Nr. 5 und Nr. 6 viel stärkere thermoelektrische Spannungen als der Krystall Nr. 1. Übrigens ist auch eine grosse Verschiedenheit in der isolirenden Beschaffenheit der Oberfläche bei den thermoelektrischen Versuchen



um so weniger wahrscheinlich, als während ihrer Ausführung die Temperatur des Krystalles über der des Zimmers liegt, also ein Niederschlag von Wasserdampf nicht wohl eintreten kann.

Die Herren J. und P. Curie haben angegeben, dass die elektrische Spannung proportional mit dem Drucke wächst. Es möge hier eine Versuchsreihe zur Bestätigung dieses Gesetzes folgen, die zugleich zeigen soll, welche geringen Drucke überhaupt erforderlich sind, um noch merkbare piezoelektrische Spannungen zu erhalten. Da beim Nachlassen des Druckes stets gleich grosse Ausschläge nach der entgegengesetzten Seite erfolgen, so beschränke ich mich auf die Angabe der beim Eintritt des Druckes entstehenden elektrischen Spannung.

Auf der Kante (5, 6) des Krystalles Nr. 12 entstand durch den Druck von 1000 gr. ein Ausschlag von + 48 Skth.; bei 500 gr. betrug er + 23,5; bei 200 gr. + 9; bei 100 gr. + 4,5; bei 50 gr. + 2,2; bei 20 gr. + 1 und bei 10 gr. + 0,5 Skth. Da sich die bei diesen Messungen benutzte Empfindlichkeit meines Elektrometers noch mehr als verdoppeln lässt, so würde selbst eine Veränderung des Druckes auf der Kante eines Bergkrystalles um 1 gr. hinreichen, um eine merkbare piezoelektrische Spannung zu erzeugen.

Bisher waren nur die elektrischen Spannungen in Betracht gezogen, welche an den Endpunkten derjenigen Nebenaxen auftreten, in deren Richtung der Druck stattfand. Es entsteht nun aber die Frage, wie sich bei dem Drucke in der Richtung einer bestimmten Nebenaxe die beiden anderen Nebenaxen verhalten. Durch die Pressungen in der Richtung einer Nebenaxe wird nach dieser Dimension eine Zusammendrückung, dagegen nach der Richtung der beiden anderen Nebenaxen eine Ausdehnung eintreten und einer solchen entsprechen in der That die Beobachtungen.

Die beiden Zinnstücke, an welchen die obere und untere Kante des Bergkrystalles anlagen, wurden mit der Erde leitend verbunden, so dass die in den gedrückten Kanten selbst entwickelte Elektricität abgeleitet ward, und an die Mitte einer der seitlichen Kanten wurde eine kleine messingene mit dem Goldblättchen des Elektrometers in Verbindung stehende Kugel bis zur Berührung herangerückt. Diese Ausschläge sind übrigens ihrer Grösse nach nicht mit denen vergleichbar, welche bei gleichem Drucke durch die Vertheilungswirkung der gedrückten Kante auf die ihnen anliegenden Zinnstücke ausgeübt

werden. Als z. B. beim Krystall Nr. 13 die Zusammendrückung in der Richtung von der Kante (1, 2) zur Kante (4, 5) stattfand, zeigte die Mitte der Kante (5, 6) bei einem Drucke von 2 Kilogr. + 5 Skth. und die Mitte der Kante (6, 1) — 16 Skth., während die erstere Kante (Fig. 13 *D*), wenn der Druck von 1 Kilogr. auf sie direct ausgeübt wird, — 45, die zweite aber bei gleichem Verfahren + 44 ergab.

Ein gleicher Erfolg, wie zuvor, stand auch zu erwarten, wenn der Krystall in der Richtung einer sogenannten Zwischenaxe, d. h. der Verbindungslinien der Mittelpunkte zweier parallelen Prismenflächen, gedrückt und die um 90° von dieser Richtung abstehende Kante geprüft wird. Der Druck auf die Fläche kann durch ein ebenes Zinnstück oder durch eine aus Zinn bestehende Schneide (siehe S. 536) erfolgen. Als z. B. ein Druck von 1,6 Kilogr. mittelst einer Schneide auf die Mittellinie der einzelnen nach oben gewandten Flächen des Krystalles Nr. 13 ausgeübt wurde, gaben die um 90° abstehenden Kanten die folgenden Ausschläge:

Druck auf die Fläche	Kugel an Kante	Ausschlag
1	(5, 6)	+ 11
2	(6, 1)	— 21
3	(1, 2)	+ 21
4	(2, 3)	— 14
5	(3, 4)	+ 19
6	(4, 5)	— 14

Die Polaritäten sind also auch hier gerade die entgegengesetzten von den in Fig. 13 *D* eingetragenen. Die Intensitäten gestatten wegen der verschiedenen Verhältnisse keine Vergleichung.

Als bei einem Bergkrystalle, an welchem zwei gegen die Hauptaxe senkrechte Ebenen angeschliffen waren, ein Druck parallel mit der Hauptaxe ausgeübt wurde, traten auf den Seitenkanten auch schwache elektrische Spannungen ein; dieselben liessen sich aber nicht mit Sicherheit deuten, weil die beiden angeschliffenen Flächen nicht völlig parallel waren, und nicht ermittelt werden konnte, welche ihrer Punkte eigentlich aufgelegen hatten.

Wird ein Krystall mit einer Prismenfläche auf eine Zinnplatte gelegt, und auf die obere Fläche an verschiedenen Stellen mittelst der S. 536 beschriebenen und durch den dünnen Draht *W* mit dem

Goldblättchen des Elektrometers verbundenen Zinnschneide ein Druck ausgeübt, so treten daselbst ebenfalls elektrische Spannungen auf; sie nehmen von den Rändern der Fläche nach der Mitte hin ab, jedoch ohne dass der Übergangspunkt der einen Elektricität in die andere genau in die Mitte fällt. Als Beispiel mögen die Beobachtungen auf den Flächen 3 und 6 des Krystalles Nr. 12 dienen; die an den einzelnen Punkten gemessenen Intensitäten der durch einen mittelst der Schneide ausgeübten Druck von 0,8 Kilogr. sind in Fig. 12 *D'* und *D''* an den betreffenden Stellen eingetragen worden.

b. Zusammengesetzte Krystalle.

Wie die in die mit *D* bezeichneten Querschnitte Nr. 1 bis 13 eingetragenen Polaritäten lehren, entsprechen bei den einfachen Bergkrystallen die piezoelektrischen Spannungen den thermo- und aktinoelektrischen, d. h. an den Kanten, wo bei der Abkühlung oder der Bestrahlung positive Polarität auftritt, erscheint beim Zusammenpressen negative, und ebenso umgehrt für die anderen Kanten. Es ist ferner beim Druck und ebenso beim Nachlassen des Druckes die Polarität auf der ganzen Kante dieselbe.

In diesem Verhalten entstehen nun Abweichungen, wenn der Krystall um 180° gedrehte Stücke enthält, in der Nähe dieser Einwachsungen. Es zeigt oft eine Kante beim Druck nicht in ihrem ganzen Verlaufe dieselbe Polarität, sondern wird an einem Ende negativ, am anderen positiv; oder es findet sich auf einer z. B. im Allgemeinen positiven Kante eine kleine Stelle, welche negativ ist.

Ferner tritt in der Nähe dieser Einschiebungen sehr oft eine eigenthümliche Erscheinung auf und zwar ebenso beim Zusammenpressen, als beim Nachlassen des Druckes. Beim Eintritt des Druckes wird z. B. eine Kante erst positiv; das Goldblättchen bleibt aber nicht in dieser Ablenkung stehen, sondern kehrt langsam zurück und geht nach der negativen Seite. Beim Nachlassen des Druckes erscheint an derselben Stelle des Krystalles zuerst negative Spannung, die aber allmählig abnimmt und in eine positive übergeht. Wird in diesem Falle die Ableitung des Goldblättchens erst zwei Secunden nach dem Wegnehmen des Druckes aufgehoben, so geht das Goldblättchen langsam nach der positiven Seite. Eine derartige Nach-

wirkung findet bei einfachen Krystallen nicht statt; meistens bleibt, wenn bei ihnen erst eine Secunde nach Eintritt oder nach Wegnahme des Druckes die Ableitung zur Erde aufgehoben wird, das Goldblättchen ruhig stehen; erfolgt aber noch eine sehr geringe Bewegung, so geschieht sie in demselben Sinne, wie sie der Eintritt oder die Wegnahme des Druckes erzeugte.

In welcher Reihenfolge die beiden Elektricitäten beim Druck (und ebenso beim Nachlassen desselben) bei zusammengesetzten Krystallen in der Nähe der Einwachsungen auftreten, lässt sich, da die genauen Grenzen der Verwachsungen im Innern der Krystalle nicht bekannt sind, zuvor nicht bestimmen. Wenn in manchen Fällen zuerst die Polarität auftritt, welche der Hauptmasse des Krystalles entspricht und in die dem eingeschobenen Stücke entsprechende übergeht, so erscheint in anderen Fällen zuerst die dem eingeschobenen Stücke entsprechende und geht dann in die der Hauptmasse über.

Da bei diesen Versuchen die Stelle, auf welche der Druck ausgeübt wird, genau bekannt sein muss, so darf man keine Metallfläche zum Drücken benutzen, sondern muss die Metallschneide (siehe S. 536) verwenden und dieselbe quer zur Kante stellen, so dass die letztere nur in einem genau bestimmbaren Punkte den Druck empfängt.

Die Versuche an den folgenden zusammengesetzten Krystallen sind sämmtlich mittelst einer solchen Schneide ausgeführt worden, und es betrug der Druck, welchen dieselbe auf die von ihr berührte Stelle des Krystalles ausübte, 0,8 Kilogr.

Krystall Nr. 14. Die Zusammensetzung des Krystalles ist S. 491 erläutert. Fig. 14 *D* stellt einen Querschnitt $\frac{1}{4}$ vom oberen und Fig. 14 *D'* einen Querschnitt $\frac{1}{4}$ vom unteren Ende dar. Die untere Hälfte enthält kein um 180° gedrehtes Stück, die Pole wechseln also auf den Kanten regelmässig als positiv und negativ ab. Anders ist dies im oberen Querschnitte. Auf der Kante (1, 2) erscheint beim Druck positive Spannung, und auf der Kante (2, 3) negative. Wird auf der Kante (1, 2) eine Stelle der oberen Hälfte gedrückt, welche nahe an der Grenze (β Fig. 14) liegt, so erscheint beim Druck zuerst eine schwache negative, welche dann in eine stärkere positive übergeht. Wird die Mitte der oberen Hälfte (also

$\frac{1}{4}$ vom oberen Ende) der Kante (2, 3) gedrückt, so steht das Goldblättchen erst sehr kurze Zeit still, als wollte es einen positiven Ausschlag anzeigen, und geht dann nach der negativen Seite; beim Nachlassen des Druckes tritt erst ein geringer negativer Ausschlag ein, der bald in einen positiven übergeht.

Krystall Nr. 15. Über die Zusammensetzung siehe S. 493. Fig. 14 *D* giebt die in einem $\frac{1}{4}$ vom oberen und Fig. 15 *D'* $\frac{1}{4}$ vom unteren Ende abstehenden Querschnitte beobachteten Polaritäten. Während die positiven und negativen Pole im oberen Theile noch regelmässig abwechseln, erscheint auf dem unteren Theile der Kante (4, 5) entsprechend dem eingeschobenen Stücke negative Spannung.

Krystall Nr. 16. Die Zusammensetzung siehe S. 494. Das eingeschobene Stück liegt auf den Kanten (4, 5) und (5, 6). Die Kante (4, 5) wird in der Mitte beim Druck erst -2, dann $+18$; die Kante (5, 6) erst $+2$, dann -15. Die zuerst auftretende Modification der Elektricität entspricht dem eingeschobenen Stücke; sie geht dann in die der Hauptmasse über. Beim Nachlassen des Druckes erscheint auf der Kante (4, 5) erst $+$, dann $-$, auf der Kante (5, 6) erst $-$, dann $+$.

Krystall Nr. 17. Die Zusammensetzung siehe S. 494. Die piezoelektrischen Spannungen in der Mitte der Prismenkanten (Fig. 17 *D*) entsprechen den thermoelektrischen, d. h. sind überall den beim Erkalten entstehenden entgegengesetzt; doch treten Schwankungen ein. So bleibt die Spannung auf der Kante (3, 4) nicht auf ihrem Maximum, sondern nimmt sehr bald ab.

Krystall Nr. 18. Die Zusammensetzung siehe S. 495. Die piezoelektrischen Spannungen in der Mitte der Prismenkanten entsprechen den thermo- und aktinoelektrischen Spannungen. Eine Abweichung von dem Wechsel der positiven und negativen Pole findet sich nur an der Kante (4, 5), wo eben ein um 180^0 gedrehtes Stück eingeschoben ist.

Krystall Nr. 19. Die Zusammensetzung dieses Krystalles siehe S. 495. In Fig. 19 *D* sind auf dem Querschnitte die in der Mitte der Kanten mittelst der Zinnplatte und in Fig. 19 *D'* die auf vier Kanten mittelst der Zinnschneide beobachteten elektrischen Spannungen dargestellt. Die Kante (6, 1) zeigt in der Mitte nur geringe elektrische Spannung; es geht das Goldblättchen erst auf $-3{,}5$ und dann auf

+ 3. Ein wenig nach oben und ebenso nach unten tritt aber sofort eine ziemlich starke positive Spannung ein. Auf der Kante (1, 2) zeigt das obere Ende positive Spannung, der ganze übrige Theil derselben aber negative.

Krystall Nr. 20. Die Zusammensetzung dieses Krystalles siehe S. 496. In der thermoelektrischen Untersuchung zeigten die Kanten (6, 1), (1, 2), (2, 3) und (3, 4) in ihrem ganzen Verlaufe dieselbe Polarität; dies gilt auch von den piezoelektrischen Spannungen. Die auf den Kanten (3, 4), (4, 5) und (5, 6) auftretenden piezoelektrischen Spannungen habe ich speciell in die drei unter Fig. 20 *D'* gezeichneten Linien eingetragen. Auf der Kante (3, 4) erscheint meistens überall noch positive Spannung, die aber in der Mitte schwächer wird und auch wohl in eine negative übergeht. Auf der Kante (4, 5) tritt in der unteren Hälfte und auf der Kante (5, 6) oben negative Spannung hervor.

(Die Zeichen ⧺ und = auf den Tafeln bedeuten so starke positive, resp. negative Ausschläge, dass das Goldblättchen des Elektrometers aus dem Gesichtsfelde des Mikroskopes hinausgetrieben wurde.)

Berichtigungen.

S. 493 Z. 21 v. o. ist nach »Kanten« einzuschalten »und Flächen«.
S. 506 Z. 7 v. o. ist »elektrische« zu streichen.

Inhalt.

Druck von Breitkopf & Härtel in Leipzig.

SIEBENTER BAND. (XI. Bd.) Mit 5 Tafeln. hoch 4. 1865. brosch.

P. A. HANSEN, Darlegung der theoretischen Berechnung der in den Mondtafeln angewandten St[illegible] Abhandlung. 1864.

G. METTENIUS, Ueber die Hymenophyllaceae. Mit 5 Tafeln. 1864.

P. A. HANSEN, Relationen einestheils zwischen Summen und Differenzen und anderntheils zwischen Int[illegible] Differentialen. 1865.

W. G. HANKEL, Elektrische Untersuchungen. Sechste Abhandlung: Maassbestimmungen der elektromotorischen [illegible] Zweiter Theil. 1865. 2 M.

ACHTER BAND. (XIII. Bd.) Mit 3 Tafeln. hoch 4. 1868. brosch. Preis 24 M.

P. A. HANSEN, Geodätische Untersuchungen. 1865. 5 M 60 Pf.

—— Bestimmung des Längenunterschiedes zwischen den Sternwarten zu Gotha und Leipzig, unter seiner Mitwirkung ausgeführt von Dr. Auwers und Prof. Bruhns im April des Jahres 1865. Mit 1 Figurentafel. 1866. 2 M 80 Pf.

W. G. HANKEL, Elektrische Untersuchungen. Siebente Abhandlung: Ueber die thermoelektrischen Eigenschaften des Bergkrystalles. Mit 2 Tafeln. 1866. 2 M 40 Pf.

P. A. HANSEN, Tafeln der Egeria mit Zugrundelegung der in den Abhandlungen der Königl. Sächs. Gesellschaft der Wissenschaften in Leipzig veröffentlichten Störungen dieses Planeten berechnet und mit einleitenden Aufsätzen versehen. 1867. 6 M 80 Pf.

—— Von der Methode der kleinsten Quadrate im Allgemeinen und in ihrer Anwendung auf die Geodäsie. 1867. 6 M.

NEUNTER BAND. (XIV. Bd.) Mit 6 Tafeln. hoch 4. 1871. brosch. Preis 18 M.

P. A. HANSEN, Fortgesetzte geodätische Untersuchungen, bestehend in zehn Supplementen zur Abhandlung von der Methode der kleinsten Quadrate im Allgemeinen und in ihrer Anwendung auf die Geodäsie. 1868. 5 M 40 Pf.

—— Entwickelung eines neuen veränderten Verfahrens zur Ausgleichung eines Dreiecksnetzes mit besonderer Betrachtung des Falles, in welchem gewisse Winkel vorausbestimmte Werthe bekommen sollen. 1869. 3 M.

—— Supplement zu der geodätische Untersuchungen benannten Abhandlung, die Reduction der Winkel eines sphäroidischen Dreiecks betr. 1869. 2 M.

W. G. HANKEL, Elektrische Untersuchungen. Achte Abhandlung: Ueber die thermoelektrischen Eigenschaften des Topases. Mit 4 Tafeln. 1870. 2 M 40 Pf.

P. A. HANSEN, Bestimmung der Sonnenparallaxe durch Venusvorübergänge vor der Sonnenscheibe mit besonderer Berücksichtigung des im Jahre 1874 eintreffenden Vorüberganges. Mit zwei Planigloben. 1870. 3 M.

G. T. FECHNER, Zur experimentalen Aesthetik. Erster Theil. 1871. 3 M.

ZEHNTER BAND. (XV. Bd.) Mit 7 Tafeln. hoch 4. 1874. brosch. Preis 21 M.

W. WEBER, Elektrodynamische Maassbestimmungen, insbesondere über das Princip der Erhaltung der Energie. 1871. 1 M 60 Pf.

P. A. HANSEN, Untersuchung des Weges eines Lichtstrahls durch eine beliebige Anzahl von brechenden sphärischen Oberflächen. 1871. 3 M 60 Pf.

C. BRUHNS, Bestimmung der Längendifferenz zwischen Leipzig und Wien. 1872. 2 M.

W. G. HANKEL, Elektrische Untersuchungen. Neunte Abhandlung: Ueber die thermoelektrischen Eigenschaften des Schwerspathes. Mit 4 Tafeln. 1872. 2 M.

—— Elektrische Untersuchungen. Zehnte Abhandlung: Ueber die thermoelektrischen Eigenschaften des Aragonites. Mit 3 Tafeln. 1872. 2 M.

C. NEUMANN, Ueber die den Kräften elektrodynamischen Ursprungs zuzuschreibenden Elementargesetze. 1873. 3 M 80 Pf.

P. A. HANSEN, Von der Bestimmung der Theilungsfehler eines gradlinigen Maassstabes. 1874. 4 M.

—— Ueber die Darstellung der graden Aufsteigung und Abweichung des Mondes in Function der Länge in der Bahn und der Knotenlänge. 1874. 1 M.

—— Dioptrische Untersuchungen mit Berücksichtigung der Farbenzerstreuung und der Abweichung wegen Kugelgestalt. Zweite Abhandlung. 1874. 2 M.

ELFTER BAND. (XVIII. Bd.) Mit 8 Tafeln. hoch 4. 1878. brosch. Preis 21 M.

G. T. FECHNER, Ueber den Ausgangswerth der kleinsten Abweichungssumme, dessen Bestimmung, Verwendung und Verallgemeinerung. 1874. 2 M.

C. NEUMANN, Ueber das von Weber für die elektrischen Kräfte aufgestellte Gesetz. 1874. 3 M.

W. G. HANKEL, Elektrische Untersuchungen. Elfte Abhandlung: Ueber die thermoelektrischen Eigenschaften des Kalkspathes, des Berylles, des Idocrases und des Apophyllites. Mit 3 Tafeln. 1875. 2 M.

P. A. HANSEN, Ueber die Störungen der grossen Planeten, insbesondere des Jupiter. 1875. 6 M.

W. G. HANKEL, Elektrische Untersuchungen. Zwölfte Abhandlung: Ueber die thermoelektrischen Eigenschaften des Gypses, des Diopsids, des Orthoklases, des Albits und des Periklins. Mit 4 Tafeln. 1875. 2 M.

W. SCHEIBNER, Dioptrische Untersuchungen, insbesondere über das Hansen'sche Objectiv. 1876. 3 M.

C. NEUMANN, Das Webersche Gesetz bei Zugrundelegung der unitarischen Anschauungsweise. 1876. 1 M.

W. WEBER, Elektrodynamische Maassbestimmungen, insbesondere über die Energie der Wechselwirkung. Mit 1 Tafel. 1878. 2 M.

ZWÖLFTER BAND. (XX. Bd.) hoch 4.

W. G. HANKEL, Elektrische Untersuchungen. Dreizehnte Abhandlung: Ueber die thermoelektrischen Eigenschaften des Apatits, Brucits, Coelestins, Prehnits, Natroliths, Skolezits, Datoliths und Axinits. Mit 3 Tafeln. 1878. 2 M.

W. SCHEIBNER, Zur Reduction elliptischer Integrale in reeller Form. 1879. 5 M.

—— Supplement zur Abhandlung über die Reduction elliptischer Integrale in reeller Form. 1880. 1 M 50 Pf.

W. G. HANKEL, Elektrische Untersuchungen. Vierzehnte Abhandlung: Ueber die photo- und thermoelektrischen Eigenschaften des Flussspathes. Mit 3 Tafeln. 1879. 2 M.

C. BRUHNS, Neue Bestimmung der Längendifferenz zwischen der Sternwarte in Leipzig und der neuen Sternwarte auf der Türkenschanze in Wien. 1880. 2 M 40 Pf.

C. NEUMANN, Ueber die peripolaren Coordinaten. 1880. 1 M 50 Pf.

—— Die Vertheilung der Elektricität auf einer Kugelcalotte. 1880. 2 M 40 Pf.

W. G. HANKEL, Elektrische Untersuchungen. Fünfzehnte Abhandlung: Ueber die Aktino- und piezoelektrischen Eigenschaften des Bergkrystalles und ihre Beziehung zu den thermoelektrischen. Mit 4 Tafeln. 1881. 2 M.

Leipzig, November 1881. S. Hirzel.

SITZUNGSBERICHTE
…GL. SÄCHSISCHEN GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN.

KLEINERE ABHANDLUNGEN.

…E über die Verhandlungen der Königlich Sächsischen Gesellschaft der Wissen-
…aften zu Leipzig. Erster Band. Aus den Jahren 1846 und 1847. Mit Kupfern.
… 8. 12 Hefte.

Zweiter Band. Aus dem Jahre 1848. Mit Kupfern. gr. 8. 6 Hefte.

Vom Jahre 1849 an sind die Berichte der beiden Classen getrennt erschienen.

— Mathematisch-physische Classe. 1849 (3) 1850 (3) 1851 (2) 1852 (2) 1853 (3) 1854 (3) 1855 (2) 1856 (2) 1857 (3) 1858 (3) 1859 (4) 1860 (3) 1861 (2) 1862 (1) 1863 (2) 1864 (1) 1865 (1) 1866 (5) 1867 (4) 1868 (3) 1869 (4) 1870 (5) 1871 (7) 1872 (4 mit Beiheft) 1873 (7) 1874 (5) 1875 (4) 1876 (2) 1877 (2) 1878 (1) 1879 (1) 1880 (1).

— Philologisch-historische Classe. 1849 (5) 1850 (4) 1851 (5) 1852 (4) 1853 (5) 1854 (6) 1855 (4) 1856 (4) 1857 (2) 1858 (2) 1859 (4) 1860 (4) 1861 (4) 1862 (1) 1863 (3) 1864 (3) 1865 (1) 1866 (4) 1867 (2) 1868 (3) 1869 (3) 1870 (3) 1871 (1) 1872 (1) 1873 (1) 1874 (2) 1875 (2) 1876 (1) 1877 (2) 1878 (3) 1879 (2).

Jedes Heft der Berichte ist einzeln zu dem Preise von 1 Mark zu haben.

Aus den Berichten besonders abgedruckt:

C. LUDWIG, Arbeiten aus der physiologischen Anstalt zu Leipzig. *Erster* bis *Neunter* Jahrgang. (1866—1874.) Mit Tafeln und Holzschnitten. Preis des Jahrgangs: 4 *M*.

— *Zehnter* u. *Elfter* Jahrg. (1875. 1876.) Mit Tafeln u. Holzschn. Pr. des Jahrg.: 6 *M*.

SCHRIFTEN
DER FÜRSTLICH-JABLONOWSKI'SCHEN GESELLSCHAFT ZU LEIPZIG.

ABHANDLUNGEN bei Begründung der Königl. Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften am Tage der zweihundertjährigen Geburtsfeier Leibnizens herausgegeben von der Fürstl. Jablonowski'schen Gesellschaft. Mit dem Bildnisse von Leibniz in Medaillon und zahlreichen Holzschnitten und Kupfertafeln. 61 Bogen in hoch 4⁰. 1846. broch. Preis 15 *M*.

PREISSCHRIFTEN gekrönt und herausgegeben von der Fürstlich Jablonowski'schen Gesellschaft.

1. H. GRASSMANN, Geometrische Analyse geknüpft an die von Leibniz erfundene geometrische Charakteristik. Mit einer erläuternden Abhandlung von *A. F. Möbius*. (Nr. I der mathematisch-physischen Section.) hoch 4⁰. 1847. 2 *M*.
2. H. B. GEINITZ, Das Quadergebirge oder d. Kreideformation in Sachsen, mit Berücks. der glaukonitreichen Schichten. Mit 1 color. Tafel. (Nr. II d. math.-phys. Sect.) hoch 4⁰. 1850. 1 *M* 60 *Pf*.
3. J. ZECH, Astronomische Untersuchungen über die Mondfinsternisse des Almagest. (Nr. III d. math.-phys. Sect.) hoch 4⁰. 1851. 1 *M*.
4. J. ZECH, Astron. Untersuchungen üb. die wichtigeren Finsternisse, welche v. d. Schriftstellern des class. Alterthums erwähnt werden. (No. IV d. math.-phys. Sect.) hoch 4⁰. 1853. 2 *M*.
5. H. B. GEINITZ, Darstellung der Flora des Hainichen-Ebersdorfer und des Flöhaer Kohlenbassins. (Nr. V d. math.-phys. Sect.) hoch 4⁰. Mit 14 Kupfertafeln in gr. Folio. 1854. 24 *M*.
6. TH. HIRSCH, Danzigs Handels- und Gewerbsgeschichte unter der Herrschaft des deutschen Ordens. (Nr. I der historisch-nationalökonomischen Section.) hoch 4⁰. 1858. 8 *M*.
7. H. WISKEMANN, Die antike Landwirthschaft und das von Thünensche Gesetz, aus den alten Schriftstellern dargelegt. (Nr. II d. hist.-nat. ök. Sect.) 1859. 2 *M* 40 *Pf*.
8. K. WERNER, Urkundliche Geschichte der Iglauer Tuchmacher-Zunft. (Nr. III d. hist.-nat. ök. Sect.) 1861. 3 *M*.
9. V. BÖHMERT, Beiträge zur Gesch. d. Zunftwesens. (Nr. IV d. hist.-nat. ök. Sect.) 1862. 4 *M*.
10. H. WISKEMANN, Darstellung der in Deutschland zur Zeit der Reformation herrschenden nationalökonomischen Ansichten. (Nr. V d. hist.-nat. ök. Sect.) 1862. 4 *M*.
11. E. L. ETIENNE LASPEYRES, Geschichte der volkswirthschaftl. Anschauungen der Niederländer und ihrer Litteratur zur Zeit der Republik. (Nr. VI d. hist.-nat. ök. Sect.) 1863. 8 *M*.
12. J. FIKENSCHER, Untersuchung der metamorphischen Gesteine der Lunzenauer Schieferhalbinsel. (Nr. VI d. math.-phys. Sect.) 1867. 2 *M*.
13. JOH. FALKE, Die Geschichte des Kurfürsten August von Sachsen in volkswirthschaftlicher Beziehung. (Nr. VII d. hist.-nat. ök. Sect.) 1868. 8 *M*.
14. B. BÜCHSENSCHÜTZ, Die Hauptstätten des Gewerbfleisses im classischen Alterthume. (Nr. VIII d. hist.-nat. ök. Sect.) 1869. 2 *M* 80 *Pf*.
15. DR. HUGO BLÜMNER, Die gewerbliche Thätigkeit der Völker des classischen Alterthums. (Nr. IX d. hist.-nat. ök. Sect.) 1869. 4 *M*.
16. HERMANN ENGELHARDT, Flora der Braunkohlenformation im Königreich Sachsen. (Nr. VII d. math.-phys. Sect.) Mit 15 Tafeln. 1870. 12 *M*.
17. H. ZEISSBERG, Die polnische Geschichtschreibung des Mittelalters. (Nr. X d. hist.-nat. ök. Sect.) 1873. 12 *M*.
18. ALBERT WANGERIN, Reduction der Potentialgleichung für gewisse Rotationskörper auf eine gewöhnliche Differentialgleichung. (Nr. VIII d. math.-phys. Sect.) 1875. 1 *M* 20 *Pf*.
19. A. LESKIEN, Die Declination im Slavisch-Litauischen und Germanischen. (Nr. XI d. hist.-nat. ök. Sect.) 1876. 5 *M*.
20. DR. R. HASSENCAMP, Ueber den Zusammenhang des lettoslavischen und germanischen Sprachstammes. (Nr. XII d. hist.-nat. ök. Sect.) 1876. 3 *M*.
21. DR. PÖHLMANN, Die Wirthschaftspolitik der Florentiner Renaissance und das Princip der Verkehrsfreiheit. (Nr. XIII d. hist.-nat. ök. Sect.) 1878. 4 *M* 20 *Pf*.
22. DR. ALEXANDER BRÜCKNER, Die slavischen Ansiedelungen in der Altmark und im Magdeburgischen. (Nr. XIV d. hist.-nat. ök. Sect.) 1879. 4 *M* 20 *Pf*.

Leipzig. S. Hirzel.

Druck von Breitkopf & Härtel in Leipzig.

W. G. HANKEL,
MITGLIED DER KÖNIGL. SÄCHS. GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN

ELEKTRISCHE UNTERSUCHUNGEN.

SECHSZEHNTE ABHANDLUNG.

ÜBER DIE THERMOELEKTRISCHEN EIGENSCHAFTEN DES HELVINS, MELLITS, PYROMORPHITS, MIMETESITS, PHENAKITS, PENNINS, DIOPTASES, STRONTIANITS, WITHERITS, CERUSSITS, EUKLASES UND TITANITS.

Des XII. Bandes der Abhandlungen der mathematisch-physischen Classe der Königl. Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften
Nº VIII.

MIT DREI TAFELN.

LEIPZIG
BEI S. HIRZEL.
1882.

ABHANDLUNGEN

DER

KÖNIGL. SÄCHS. GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN

ZU LEIPZIG.

MATHEMATISCH-PHYSISCHE CLASSE.

ERSTER BAND. (I. Bd.)*) Mit 3 Tafeln. hoch 4. 1852. brosch. Preis 13 ℳ 60 ₰.

A. F. MÖBIUS, Ueber die Grundformen der Linien der dritten Ordnung. Mit 1 Tafel. 1849. 2 ℳ 40 ₰.

P. A. HANSEN, Auflösung eines beliebigen Systems von linearischen Gleichungen. — Ueber die Entwickelung der Grösse $(1-2\alpha H+\alpha\alpha)^{-\frac{1}{2}}$ nach den Potenzen von α. 1849. 1 ℳ 20 ₰.

A. SEEBECK, Ueber die Querschwingungen elastischer Stäbe. 1849. 1 ℳ.

C. F. NAUMANN, Ueber die cyclocentrische Conchospirale und über das Windungsgesetz von Planorbis Corneus. 1849. 1 ℳ.

W. WEBER, Elektrodynamische Maassbestimmungen (Widerstandsmessungen). 1851. 3 ℳ.

F. REICH, Neue Versuche mit der Drehwaage. 1852. 2 ℳ.

M. W. DROBISCH, Zusätze zum Florentiner Problem. Mit 1 Tafel. 1852. 1 ℳ 60 ₰.

W. WEBER, Elektrodynamische Maassbestimmungen (Diamagnetismus). Mit 1 Tafel. 1852. 2 ℳ.

ZWEITER BAND. (IV. Bd.) Mit 19 Tafeln. hoch 4. 1855. brosch. Preis 20 ℳ.

M. W. DROBISCH, Ueber musikalische Tonbestimmung und Temperatur. 1852. 3 ℳ.

W. HOFMEISTER, Beiträge zur Kenntniss der Gefässkryptogamen. Mit 18 Tafeln. 1852. 4 ℳ.

P. A. HANSEN, Entwickelung des Products einer Potenz des Radius Vectors mit dem Sinus oder Cosinus eines Vielfachen der wahren Anomalie in Reihen, die nach den Sinussen oder Cosinussen der Vielfachen der wahren, excentrischen oder mittleren Anomalie fortschreiten. 1853. 3 ℳ.

—— Entwickelung der negativen und ungraden Potenzen der Quadratwurzel der Function $r^2 + r'^2 - 2rr'$ (cos U cos U' + sin U sin U' cos J). 1854. 3 ℳ.

O. SCHLÖMILCH, Ueber die Bestimmung der Massen und der Trägheitsmomente symmetrischer Rotationskörper von ungleichförmiger Dichtigkeit. 1854. 80 ₰.

—— Ueber einige allgemeine Reihenentwickelungen und deren Anwendung auf die elliptischen Functionen. 1854. 1 ℳ 60 ₰.

P. A. HANSEN, Die Theorie des Aequatoreals. 1855. 2 ℳ 40 ₰.

C. F. NAUMANN, Ueber die Rationalität der Tangenten-Verhältnisse tautozonaler Krystallflächen. 1855. 1 ℳ.

A. F. MÖBIUS, Die Theorie der Kreisverwandtschaft. 1855. 2 ℳ.

DRITTER BAND. (V. Bd.) Mit 15 Tafeln. hoch 4. 1857. brosch. Preis 19 ℳ 20 ₰.

M. W. DROBISCH, Nachträge zur Theorie der musik. Tonverhältnisse. 1855. 1 ℳ 20 ₰.

P. A. HANSEN, Auseinandersetzung einer zweckmässigen Methode zur Berechnung der absoluten Störungen der kleinen Planeten. 1856. 5 ℳ.

R. KOHLRAUSCH und W. WEBER, Elektrodynamische Maassbestimmungen, insbesondere Zurückführung der Stromintensitäts-Messungen auf mechanisches Maass. 1856. 1 ℳ 60 ₰.

H. D'ARREST, Resultate aus Beobachtungen der Nebelflecken und Sternhaufen. Erste Reihe. 1856. 2 ℳ 40 ₰.

W. G. HANKEL, Elektrische Untersuchungen. Erste Abhandlung: Ueber der Messung der atmosphärischen Elektricität nach absolutem Maasse. Mit 2 Tafeln. 1856. 6 ℳ.

W. HOFMEISTER, Beiträge zur Kenntniss der Gefässkryptogamen. No. II. Mit 13 Tafeln. 1857. 4 ℳ.

VIERTER BAND. (VI. Bd.) Mit 29 Tafeln. hoch 4. 1859. brosch. Preis 22 ℳ 50 ₰.

P. A. HANSEN, Auseinandersetzung einer zweckmässigen Methode zur Berechnung der absoluten Störungen der kleinen Planeten. Zweite Abhandlung. 1857. 4 ℳ.

W. G. HANKEL, Elektrische Untersuchungen. Zweite Abhandlung: Ueber die thermo-elektrischen Eigenschaften des Boracites. 1857. 2 ℳ 40 ₰.

—— Elektrische Untersuchungen. Dritte Abhandlung: Ueber Elektricitätserregung zwischen Metallen und erhitzten Salzen. 1858. 1 ℳ 60 ₰.

P. A. HANSEN, Theorie der Sonnenfinsternisse und verwandten Erscheinungen. Mit 2 Tafeln. 1858. 6 ℳ.

G. T. FECHNER, Ueber ein wichtiges psychophysisches Grundgesetz und dessen Beziehung zur Schätzung der Sterngrössen. 1858. 2 ℳ.

W. HOFMEISTER, Neue Beiträge zur Kenntniss der Embryobildung der Phanerogamen. I. Dikotyledonen mit ursprünglich einzelligem, nur durch Zellentheilung wachsendem Endosperm. Mit 27 Tafeln. 1859. 8 ℳ.

FÜNFTER BAND. (VII. Bd.) Mit 30 Tafeln. hoch 4. 1861. brosch. Preis 24 ℳ.

W. G. HANKEL, Elektrische Untersuchungen. Vierte Abhandlung: Ueber das Verhalten der Weingeistflamme in elektrischer Beziehung. 1859. 2 ℳ.

P. A. HANSEN, Auseinandersetzung einer zweckmässigen Methode zur Berechnung der absoluten Störungen der kleinen Planeten. Dritte Abhandlung. 1859. 7 ℳ 20 ₰.

G. T. FECHNER, Ueber einige Verhältnisse des binocularen Sehens. 1860. 5 ℳ 60 ₰.

G. METTENIUS, Zwei Abhandlungen: I. Beiträge zur Anatomie der Cycadeen. Mit 5 Tafeln. II. Ueber Seitenknospen bei Farnen. 1860. 3 ℳ.

W. HOFMEISTER, Neue Beiträge zur Kenntniss der Embryobildung der Phanerogamen. II. Monokotyledonen. Mit 25 Tafeln. 1861. 8 ℳ

SECHSTER BAND. (IX. Bd.) Mit 10 Tafeln. hoch 4. 1864. brosch. Preis 19 ℳ 20 ₰

W. G. HANKEL, Elektrische Untersuchungen. Fünfte Abhandlung: Maassbestimmungen der elektromotorischen Kräfte. Erster Theil. 1861. 1 ℳ 60 ₰.

—— Messungen über die Absorption der chemischen Strahlen des Sonnenlichtes. 1862. 1 ℳ 20 ₰.

P. A. HANSEN, Darlegung der theoretischen Berechnung der in den Mondtafeln angewandten Störungen. Erste Abhandlung. 1862. 9 ℳ.

G. METTENIUS, Ueber den Bau von Angiopteris. Mit 10 Tafeln. 1863. 4 ℳ 40 ₰.

W. WEBER, Elektrodynamische Maassbestimmungen, insbesondere über elektrische Schwingungen. 1864. 3 ℳ.

---

*) Die eingeklammerten römischen Ziffern geben die Zahl des Bandes in der Reihenfolge der Abhandlungen beider Classen an.

ELEKTRISCHE UNTERSUCHUNGEN.

SECHSZEHNTE ABHANDLUNG.

ÜBER DIE THERMOELEKTRISCHEN EIGENSCHAFTEN DES HELVINS, MELLITS, PYROMORPHITS, MIMETESITS, PHENAKITS, PENNINS, DIOPTASES, STRONTIANITS, WITHERITS, CERUSSITS, EUKLASES UND TITANITS.

VON

W. G. HANKEL

MITGLIED DER KÖNIGL. SÄCHS. GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN.

Des XII. Bandes der Abhandlungen der mathematisch-physischen Classe der Königl. Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften

Nº VIII.

MIT DREI TAFELN.

LEIPZIG

BEI S. HIRZEL.

1882.

Vom Verfasser übergeben den 20. März 1882.
Der Abdruck vollendet den 28. April 1882.

ELEKTRISCHE UNTERSUCHUNGEN

VON

W. G. HANKEL.

SECHSZEHNTE ABHANDLUNG.

ÜBER
DIE THERMOELEKTRISCHEN EIGENSCHAFTEN DES HELVINS, MELLITS, PYROMORPHITS, MIMETESITS, PHENAKITS, PENNINS, DIOPTASES, STRONTIANITS, WITHERITS, CERUSSITS, EUKLASES UND TITANITS.

MIT DREI TAFELN.

In der nachfolgenden Abhandlung habe ich die Beobachtungen über das thermoelektrische Verhalten einer Anzahl von Krystallen, welche den verschiedensten Systemen angehören, zusammengestellt, und bemerke zuvor im Allgemeinen, dass die Angaben über die auftretenden elektrischen Spannungen, wenn kein weiterer Zusatz beigefügt ist, sich stets auf den Zustand des Erkaltens beziehen. Das Verfahren bei diesen Versuchen war das früher von mir angewandte.

Auf den beigegebenen drei Tafeln sind die Netze oder Ansichten der zur Bestimmung der Thermoelektricität verwandten Krystalle, so gut und so weit es bei der oft sehr grossen Unregelmässigkeit in der Ausbildung der Gestalten möglich war, entweder in natürlicher, oder in doppelter oder in halber Grösse*) gezeichnet, und in dieselben die bei der Abkühlung beobachteten elektrischen Spannungen eingetragen worden. Der leichteren Übersicht wegen habe ich die positiven Stellen durch eine röthliche und die negativen durch eine grünliche Farbe von einander unterschieden.

Helvin.

Die Krystalle des Helvins sind meistens eine Combination zweier Tetraeder in verschieden grosser Ausbildung, und stellen eine hemimorphe Gestalt dar. An dem einzigen mir zur Verfügung stehenden Krystalle von Schwarzenberg (Sachsen), für dessen Benutzung ich Herrn Bergrath Weissbach zu Danke verpflichtet bin, sind die grossen Tetraederflächen glänzender als die kleinen, welche vielmehr matt erscheinen. Die Farbe des untersuchten Krystalles ist röthlichbraun.

---

*) Das Zeichen 1/1 neben der Abbildung bedeutet die Darstellung in natürlicher Grösse, das Zeichen 2/1 in doppelt linearer Vergrösserung und das Zeichen 1/2 in halber linearer Grösse.

In Nr. 1 Taf. I. ist das Netz desselben in doppelt linearer Vergrösserung abgebildet. Ich habe dabei den Krystall so gestellt, dass die vier grossen mit den Zahlen 1 bis 4 bezeichneten Tetraederflächen eine auf der Fläche 4 als Grundfläche stehende dreiseitige Pyramide bilden, deren Ecken durch die kleinen Tetraederflächen abgestumpft werden.

Übrigens ist der Krystall nur auf einem Theile seiner Oberfläche vollkommen ausgebildet. Unten auf der Fläche 1 und dem anliegenden Theile der Fläche 4 ist derselbe verletzt; die Fläche 4 hat angesessen und ist überhaupt mangelhaft ausgebildet. Eben dies gilt auch von der auf die Ecke (2.3.4.) fallenden kleinen Tetraederfläche und von dem linken Theile der Fläche 3.

Der Helvin ist merkwürdig durch seine chemische Zusammensetzung, die sich als eine Verbindung von kieselsaurer Beryllerde und kieselsaurem Mangan- und Eisenoxydul mit Schwefelmangan und Schwefeleisen ergibt.

Die elektrischen Spannungen erreichten auf dem vorliegenden Krystalle bei der Abkühlung nur eine geringe Grösse; dessenungeachtet ist es mir gelungen, die beim Erkalten auftretende elektrische Vertheilung festzustellen.

Die drei grossen Tetraederflächen 1, 2 und 3, welche wenigstens zum Theil gut ausgebildet sind, zeigten in ihrer Mitte beim Erkalten positive Spannung; dagegen war auf der Fläche 4, mit welcher der Krystall angewachsen gewesen, keine Elektricität wahrzunehmen. Die grösste Stärke erreichte die positive Spannung in der Mitte der Fläche 2. Auf den kleinen Tetraederflächen und auf den durch die Durchschnitte der grossen Tetraederflächen gebildeten Kanten wurde negative Spannung beobachtet; am stärksten trat dieselbe auf der von den Flächen 1 und 2 gebildeten Kante auf.

Ob auf den Helvinkrystallen bei höheren Temperaturen etwa eine Umkehrung der elektrischen Polaritäten, wie ich solche beim Boracit*) nachgewiesen habe, stattfindet, habe ich nicht untersucht, weil ich den Krystall nicht der Gefahr des Zerspringens auszusetzen wagte.

Vergleichen wir die auf dem Helvin auftretenden elektrischen

*) Diese Abhandl. Bd. VI. S. 153.

Spannungen mit den von mir auf den tetraedrischen Boracitkrystallen beobachteten*), so haben die Pole zwar im Allgemeinen dieselbe Lage, jedoch ist in jedem Pole beim Helvin die Elektricität gerade die entgegengesetzte als beim Boracittetraeder. Während beim Helvin die grossen Tetraederflächen positiv werden, sind sie beim Boracit negativ, und ebenso haben auf den Ecken und Kanten die elektrischen Spannungen bei beiden Mineralien das entgegengesetzte Vorzeichen.

Mit diesem Gegensatze steht das Verhalten der grossen und kleinen Tetraederflächen in Bezug auf Glanz und Glätte im Einklange. Oben habe ich angeführt, dass an dem untersuchten Helvinkrystalle die grossen Tetraederflächen glänzend, die kleineren fast matt erscheinen. Umgekehrt sind bei den Tetraedern des Boracites die grossen Flächen die matten; sie erscheinen stets weniger glänzend als die Flächen des Würfels und, falls sie vorhanden sind, die kleinen Tetraederflächen auf den Ecken. Bei beiden Mineralien sind also beim Erkalten die glänzenderen Flächen positiv, die matteren negativ.

Mellit (Honigstein).

Der Mellit krystallisirt im tetragonalen Systeme und gehört zur negativen Abtheilung der optisch einaxigen Krystalle. Der Winkel an der Grundkante misst 93° 5′, woraus sich das Verhältniss der Nebenaxen zur Hauptaxe wie 1 : 0,7454 ergibt. Die Krystalle sind gewöhnlich honiggelb, und bestehen aus 40,30 Mellitsäure (Honigsteinsäure), 14,36 Thonerde und 45,34 Wasser. Trotz des sehr hohen Wassergehaltes ist die Substanz ein Nichtleiter. Das Wasser entweicht schon bei Temperaturen unter 100°; die Krystalle werden bei diesem Wärmegrade durch Wasserverlust weisslich.

Ich habe nur einen sehr grossen, aus der hiesigen Universitätssammlung mir durch meinen Collegen Herrn Prof. Zirkel freundlichst zur Verfügung gestellten Krystall auf sein elektrisches Verhalten genauer geprüft, und denselben, um ihn nicht zu schädigen, nur bis 70° C. erwärmt. Nr. 1 Taf. I. stellt eine Ansicht desselben in natürlicher Grösse dar. Beim Abkühlen zeigten die beiden Enden der Hauptaxe und ihre Umgebungen positive, und die eine vollkommen

*) Diese Abhandl. Bd. VI. S. 245.

ausgebildete Randkante nebst den anliegenden Flächenstücken negative Spannung. Diese elektrische Vertheilung auf dem Mellit stimmt also mit der auf dem Kalkspath von Schneeberg, auf dem Smaragd und Beryll, auf dem Apophyllit, auf dem Idokras (Wiluit) und dem Apatit beobachteten überein.

Ein anderer kleinerer Krystall, bei welchem die Enden der Hauptaxe durch convexe Flächen $0P$ abgestumpft waren, zeigte beim Erkalten keine wahrnehmbaren elektrischen Spannungen.

Pyromorphit.

Die Krystalle des Pyromorphits gehören zum hexagonalen Systeme und sind mit den Krystallen des Apatits isomorph. Die Polkante der sechsseitigen Pyramide misst 80° 40'. An den von mir untersuchten, sämmtlich von Zschopau stammenden Krystallen fanden sich die Flächen von ∞P, $0P$, P und $\infty P2$.

Der Pyromorphit besteht aus einer Verbindung von phosphorsaurem Bleioxyd mit Chlorblei, in welcher jedoch etwas Phosphorsäure durch Arsensäure und etwas Blei durch Calcium vertreten sein kann. Die Farbe der drei im Nachfolgenden beschriebenen Krystalle ist zeisiggrün; stellenweise erscheint ein Anflug von ockerigem Brauneisenerz.

Auf Taf. I sind die Netze dreier Pyromorphitkrystalle (Nr. 1 und 3 in natürlicher, Nr. 2 in doppelt linearer Grösse) abgebildet.

Krystall Nr. 1. (Taf. I. Nr. 1.) Der Krystall gehört der Freiberger Sammlung und ist ringsum ziemlich vollkommen ausgebildet. Am oberen Ende treten die Flächen P in etwas grösserer Ausdehnung auf, als am unteren. Die beiden Endflächen $0P$ zeigen beim Erkalten positive Spannung, jedoch die obere in etwas grösserer Stärke als die untere; die prismatischen Seitenflächen sind beim Erkalten negativ, und zwar tritt die grösste Intensität der negativen Polarität in der Mitte der Prismenflächen auf. Der Pyromorphit gleicht also in seinem thermoelektrischen Verhalten dem Apatit, mit welchem er auch, wie oben schon angeführt, in seiner Gestalt übereinstimmt. Zwischen dem rechten und linken Rande der Prismenflächen scheint in Bezug auf die Stärke der negativen Elektricität kein Unterschied vorhanden zu sein, wie ein solcher bei manchen Apatitkrystallen*)

*) Diese Abhandl. Bd. XX. S. 9, 11 und 13.

aus den Smaragdgruben vom Ural, von Ehrenfriedersdorf und vom St. Gotthardt*) von mir beobachtet wurde.

Krystall Nr. 2. Der gleichfalls der Freiberger Sammlung entlehnte, auf Taf. I. in doppelter Grösse abgebildete Krystall Nr. 2 ist durch eine Verwachsung zweier in paralleler Stellung befindlicher Individuen gebildet, wie sich aus der Beschaffenheit der oberen Endfläche und der beiden prismatischen Seitenflächen 4 und 6 ergibt. Das obere Ende wird von der Endfläche $0P$ begrenzt, an deren Rändern die Flächen von P auftreten; dabei reicht aber das in den Flächen 4 und 5 sichtbare Individuum nicht ganz bis zu dem Niveau des grösseren Individuums, welchem die Flächen 1, 2 und 3 angehören. Die obere Endfläche ist theilweise mit ockerigem Brauneisenerz bedeckt. Das untere Ende scheint überall von einer Bruchfläche gebildet zu sein. Die elektrische Vertheilung gleicht der auf dem vorhergehenden Krystalle beobachteten. Dass das obere Ende eine geringere positive Spannung zeigt, als das untere, ist eine Folge der unvollkommenen Ausbildung und der Bedeckung mit Brauneisenerz.

Krystall Nr. 3. (Taf. I. Nr. 3.) Der Krystall besteht aus zwei grösseren und einem kleineren Individuum, welche in paralleler Stellung verwachsen sind. Das kleinere Individuum reicht am oberen Ende nicht bis zum Niveau der Endfläche der beiden grösseren. Das obere von $0P$ begrenzte Ende ist stark positiv, und es greift diese Polarität auch etwas auf die oberen Theile der Prismenfläche 1 hinüber. Auf dem unteren verbrochenen Ende ist die positive Spannung geringer, und geht in der Nähe der Flächen 2 und 3, wo die Bruchfläche am weitesten in den Krystall hineinschneidet, in eine schwache negative über. Die prismatischen Seitenflächen sind mit Ausnahme des zuvor erwähnten oberen Randes der Fläche 1 negativ.

Mimetesit.

Die Krystalle des Mimetesits sind mit denen des Apatits und Pyromorphits isomorph, gehören also ebenfalls zum hexagonalen Systeme. Der Polkantenwinkel beträgt nahe 80°.

*) Bei den Apatitkrystallen vom St. Gotthardt sind an dem Rande, an welchem die Flächen der Pyramiden dritter Art auftreten, die negativen Spannungen geringer, als an dem gegenüberliegenden.

Während der Pyromorphit aus phosphorsaurem Bleioxyd und Chlorblei besteht, ist der Mimetesit eine Verbindung von arsensaurem Bleioxyd und Chlorblei; jedoch erscheint ein Theil der Arsensäure durch Phosphorsäure ersetzt. Die Krystalle haben eine wachsgelbe oder gelblichgrüne Farbe. Die Doppelbrechung des Mimetesits wird als negativ angegeben, während der Apatit und Pyromorphit eine positive besitzen.

Auf Tafel I. habe ich die Netze dreier von Johann-Georgenstadt stammender Mimetesitkrystalle in natürlicher Grösse abgebildet; die beiden ersten Krystalle gehören der Freiberger, der dritte der hiesigen mineralogischen Sammlung.

Krystall Nr. 1. Der gelblichgrüne Krystall Nr. 1 Taf. I. besteht aus mehreren in paralleler Stellung verwachsenen Individuen von ungleicher Länge, welche von den Flächen ∞P, $0P$ und P begrenzt werden. Die Prismenfläche 3 ist sehr unvollkommen ausgebildet; auf der Prismenfläche 4 treten zwei Individuen mit ziemlich breiten Flächen auf; unterhalb derselben ist der Krystall angewachsen gewesen.

Die Endflächen $0P$ sind positiv, die Pyramiden- und Prismenflächen negativ elektrisch, jedoch mit Ausnahme der Prismenfläche 4, die auf den inneren Theilen, sowie auf der unter ihr liegenden Anwachsungsstelle positive Spannung zeigt.

Krystall Nr. 2. (Taf. I. Nr. 2.) Der wachsgelbe Krystall trägt die Flächen ∞P, P und $0P$, und ausserdem noch sehr kleine Flächen $2P$. Die Fläche $0P$ am oberen Ende ist klein, am unteren sehr klein. Mit den Prismenflächen 3 und 4 ist der Krystall angewachsen gewesen, und auch auf den Flächen 2 und 5 finden sich an den der Anwachsungsstelle benachbarten Rändern noch Verletzungen.

In elektrischer Beziehung gleicht dieser Krystall dem vorhergehenden; auch darin, dass die Prismenflächen 3 und 4, mit welchen derselbe angewachsen gewesen, nicht wie die übrigen negativ, sondern positiv erscheinen.

Krystall Nr. 3. (Taf. I. Nr. 3.) Der gelblichgrüne Krystall Nr. 3 wird nur von den Flächen ∞P, $0P$ und P begrenzt. Er sitzt noch an einem kleinen Quarzgesteine, und ist mit den unteren Theilen der Prismenfläche 4 und besonders der Fläche 5 an dasselbe angewachsen. Die Fläche 4 zeigt, dass der Krystall aus drei in

paralleler Stellung befindlichen Individuen besteht. Unten links auf der Prismenfläche 6 ist ein anderer nur wenig kleinerer Mimetesitkrystall (in der Zeichnung nicht abgebildet) eingewachsen.

Die elektrische Vertheilung auf dem grösseren Krystalle entspricht der auf den beiden vorhergehenden beschriebenen; auch bei ihm sind die beiden Prismenflächen 4 und 5, mit deren unteren Theilen er angewachsen ist, positiv. Die untere Endfläche 0*P* liess sich wegen der daneben und darüber liegenden Prismenflächen des zweiten Krystalles auf ihr elektrisches Verhalten nicht untersuchen.

Die eigenthümliche Erscheinung, dass beim Mimetesit eine oder zwei Prismenflächen positive Spannung anstatt der negativen zeigen, steht nicht vereinzelt da; ich habe dieselbe beim Beryll, der in seinem elektrischen Verhalten mit dem Mimetesit übereinstimmt, gleichfalls beobachtet*). Während bei den Smaragden und einer Anzahl Berylle sämmtliche Prismenflächen negativ erschienen, fand ich andere grüne und gelbe Berylle, bei welchen eine oder zwei Prismenflächen positive Elektricität zeigten. Bei den untersuchten Beryllkrystallen liess sich in den meisten Fällen kein Grund für diese Abweichung nachweisen, da die Krystalle am unteren Ende verbrochen und die vorhandenen Stücke der Prismenflächen vollkommen ausgebildet waren; nur in einem Falle, bei dem in meiner früheren Abhandlung unter Nr. 9**) abgebildeten Krystalle, war die Anwachsungsstelle deutlich sichtbar. Dieselbe lag unterhalb der mit 3 bezeichneten Fläche, und auf dem oberen gut ausgebildeten Theile dieser Fläche, sowie auf dem unteren in seiner Bildung gehemmten trat die positive Polarität anstatt der negativen auf.

In gleicher Weise sehen wir, dass auch beim Mimetesit auf den Flächen, mit welchen die Krystalle dieses Minerals angesessen haben, die positive Spannung erscheint. In dem erwähnten Umstande haben wir daher jedenfalls den Grund für das Auftreten der zuletzt genannten Polarität zu suchen. Anwachsungs-, Bruch- und Durchgangsflächen zeigen bei bestimmten Lagen, wie ich dies durch vielfache Beispiele in meinen früheren Abhandlungen nachgewiesen habe, gerade die entgegengesetzte Elektricität, als solche bei normaler,

*) Diese Abh. Bd. XVIII. S. 238.
**) Ebend. Taf. II.

vollkommener Ausbildung an den betreffenden Stellen entstehen würde. Der Einfluss der mangelhaft gebildeten oder in ihrem Wachsthum gehemmten Stellen überträgt sich denn auch noch auf die mit ihnen zusammenhängenden Krystallflächen.

Welchen Einfluss die Anwachsungsstelle ausüben kann, habe ich in meiner Abhandlung über die thermoelektrischen Eigenschaften der Schwerspathkrystalle*) nachgewiesen. Während nämlich die Auvergner Schwerspathkrystalle gewöhnlich in der Richtung der Brachydiagonale verlängerte Säulen bilden, existiren auch einzelne, welche in ihrer Form sich mehr den Przibramer Krystallen nähern und in der Richtung der Makrodiagonale verlängerte Säulen darstellen. Dieselben sitzen aber auf einem Krystalle der gewöhnlichen, in der Richtung der Brachydiagonale verlängerten Form wie auf einem Stiele oder schliessen einen Kern von der genannten Form ein; infolge dessen stimmen sie in ihrer elektrischen Vertheilung auch mit der diesem Stiele oder Kerne zugehörigen überein.

Nach Zerenner finden sich zu Almodovar del Campo in der Provinz Murcia lose Krystalle von Mimetesit, die von ihm als hemimorph bezeichnet werden. Das elektrische Verhalten beweist jedoch, dass die Krystalle des Mimetesits nicht hemimorph sind. Wenn das eine Ende in seiner Bildung von dem anderen etwas abweicht, so ist diese Abweichung eine Folge zufälliger Störungen bei der Bildung der Krystalle, wie solche beim Topas**) und Schwerspath***) ebenfalls vorkommen, ohne dass die Krystalle als hemimorph zu betrachten sind.

Phenakit.

Der Phenakit besteht aus kieselsaurer Beryllerde, und ist bis jetzt nur an drei Orten gefunden worden. Zuerst entdeckte ihn Nordenskiöld 1833 unter Mineralien aus den Smaragdgruben bei Katharinenburg am Ural, 1834 fand ihn Beyrich bei Framont in Lothringen, und 1844 erkannte G. Rose sein Vorkommen im Ilmengebirge.

*) Diese Abhandl. Bd. XV. S. 325.
**) Diese Abhandl. Bd. XIV. S. 370.
***) Diese Abhandl. Bd. XV. S. 277.

Die Krystalle des Phenakits gehören zum hexagonalen Systeme und zwar zu der rhomboedrisch-tetartoedrischen Abtheilung desselben. Der Polkantenwinkel des Grundrhomboeders misst 116° 36′.

Ich habe vier Krystalle zur Untersuchung verwenden können. Der erste weingelb gefärbte (Nr. 1) gehört dem hiesigen mineralogischen Museum und stammt von Framont; der zweite (Nr. 2), der Freiberger Sammlung entliehene und schlechthin als vom Ural stammend bezeichnet, weist durch seine Beschaffenheit auf das Ilmengebirge hin; er ist farblos und in den gut ausgebildeten Theilen ziemlich durchsichtig. Die beiden anderen dem hiesigen mineralogischen Museum gehörigen grossen Krystalle waren in den Smaragdgruben bei Katharinenburg gefunden.

Krystall Nr. 1. Das Netz dieses Krystalles ist Nr. 1 Taf. I. in natürlicher Grösse abgebildet. Er ist eine Combination eines sechsseitigen Prismas zweiter Art $\infty P2$ mit der entsprechenden sechsseitigen Pyramide oder den beiden Rhomboedern zweiter Art $+\frac{2}{3}P2$ und $-\frac{2}{3}P2$. Die Polkanten dieser sechsseitigen Pyramide sind sämmtlich abgestumpft; es treten also beide Rhomboeder $+\frac{1}{2}R$ und $-\frac{1}{2}R$ auf. Die Seitenkanten des verticalen Prismas $\infty P2$ stumpft schwach das Prisma erster Art ∞P ab. An den oberen Enden der beiden benachbarten Kanten (1. 2) und (2. 3) scheinen Flächen des Grundrhomboeders $+R$ und $-R$ zu liegen. Eine Fläche derselben Gestalt liegt am unteren Ende der Kante (6. 1), und die Combinationskante dieser Fläche mit der Fläche 1 des Prismas $\infty P2$ wird durch eine Fläche des Rhomboeders dritter Art $-\frac{r}{l}\,3P\frac{3}{2}$ abgestumpft*).

Der Krystall ist übrigens nur an seinem oberen Ende gut ausgebildet, also in den oberen Flächen $\frac{2}{3}P2$ und $\frac{1}{2}R$. Von den Prismenflächen $\infty P2$ sind die mit 1, 2 und 3 bezeichneten Flächen

---

*) Nach Beirich (Pogg. Annal. Bd. 34. S. 521) sind die zu Framont vorkommenden Krystalle sehr häufig durcheinander gewachsene Zwillinge, bei denen die Hauptaxe beiden Individuen gemein ist, die Rhomboederflächen aber umgekehrt gegen dieselbe liegen. Ob der vorliegende Krystall auch als solcher aufzufassen ist, vermag ich nicht zu entscheiden; ausser dem Auftreten der Flächen von R und $\frac{1}{2}R$ auf benachbarten Kanten war auf seinen Flächen kein weiteres Anzeichen einer Zwillingsbildung zu finden. Die elektrische Vertheilung würde durch eine solche Zwillingsbildung nicht geändert werden.

ziemlich vollständig vorhanden; von der Fläche 6 findet sich nur ein Rest, während die Flächen 4 und 5 verbrochen sind. Auf der unteren Seite liegen nur unterhalb der Prismenflächen 1 und 2 unvollkommene Flächen von $\frac{2}{3}P2$.

Die beim Erkalten auf diesem Krystalle beobachteten elektrischen Spannungen sind schwach; die beiden Enden der Hauptaxe und die sie umgebenden Pyramidenflächen zeigen positive, die vorhandenen prismatischen Seitenflächen dagegen negative Elektricität. Die angegebene elektrische Vertheilung stimmt mit der auf den meisten früher untersuchten optisch einaxigen Krystallen gefundenen überein.

Krystall Nr. 2. Dieser Krystall ist nur ein Bruchstück, welches ungefähr ein Drittel des vollständigen darstellt. Er ist eine Combination der Gestalten $+R$, $-\frac{1}{2}R$, $+\frac{2}{3}P2$, $-\frac{2}{3}P2$, $+\frac{4}{3}P2$, $+\frac{r}{l}\frac{3}{2}P\frac{3}{2}$, ∞P und $\infty P2$. Ich bilde das Bruchstück in einer Ansicht von oben (Fig. 2 *A*.) und einer solchen von unten (Fig. 2 *B*.) ab. Die links neben *A* gezeichnete Fläche *C* bildet auf der linken Seite die Begrenzung; sie ist ziemlich eben, und scheint durch Anliegen an einer fremden Fläche entstanden zu sein. Die rechts gezeichnete Fläche *D*, welche rechts hinten den Krystall begrenzt, ist uneben und durch Bruch entstanden; an dieser Stelle ist der Krystall angewachsen gewesen.

Die elektrische Vertheilung ist durch die Hemmnisse bei der Bildung und durch die Verletzungen sehr gestört. Das obere und untere Ende der Hauptaxe ist positiv; ebenso sind auf der oberen Seite die gegen die Axe geneigten Flächen positiv. Auf der unteren Seite findet sich diese Polarität nur auf dem in der Nähe der Bruchfläche liegenden Theile der Fläche $+R$, während die übrigen Theile negative Spannung zeigen. Die Bruchfläche *D* ist positiv, die durch Anliegen gebildete Fläche *C* aber negativ. Während die elektrischen Spannungen auf dem Krystall Nr. 1 nur schwach auftreten, erreichen sie auf dem Krystall Nr. 2 eine ziemliche Stärke.

Auf den beiden grossen aus den Smaragdgruben bei Katharinenburg stammenden Phenakitkrystallen, die noch zum Theil mit einer dünnen Lage von Glimmerschiefer bedeckt sind, habe ich die Lage der Pole nicht mit Sicherheit bestimmen können.

Pennin.

Die Krystalle des Pennins sind gewöhnlich Rhomboeder, deren Polecken durch die Flächen $0R$ abgestumpft sind. Der Polkantenwinkel des Rhomboeders beträgt angenähert 65°. Ausser diesem Rhomboeder $+R$ kommt auch das Gegenrhomboeder $-R$, welches das erstere zu einer hexagonalen Pyramide ergänzt, und zwar bisweilen in gleich grosser Entwickelung vor. Doch zeigt sich in dem letzten Falle ein mehr oder minder grosser Unterschied in dem Glanze der abwechselnden Flächen dieser beiden Rhomboeder. Wenn ich eine Beobachtung an einem Krystalle, an welchem das Gegenrhomboeder nur in kleinen Flächen auftrat, als ganz allgemein geltend betrachten darf, so würden die Flächen des Gegenrhomboeders $-R$ etwas stärkeren Glanz besitzen, als die des Grundrhomboeders $+R$.

Der Pennin ist senkrecht gegen seine Hauptaxe, also parallel mit $0R$ sehr vollkommen spaltbar, und die meisten in den Sammlungen aufbewahrten Exemplare sind an beiden Enden von diesen Durchgangsflächen begrenzt. Seltener sind sie an einem Ende, noch seltener an beiden Enden mit Krystallflächen versehen; dabei ist jedoch die Ausbildung insofern unvollkommen, als sich das betreffende Ende in zahlreiche durch kleine Flächen $0R$ abgestumpfte Spitzen auflöst.

Die chemischen Bestandtheile des Pennins sind: 32,5 Kieselsäure, 14,5 Thonerde, 34 Magnesia, 5 Eisenoxydul und 14 Wasser. Durch das Eisenoxydul ist das Mineral grün gefärbt; die Oberfläche der Krystalle sieht dunkel grünschwarz aus. Das Wasser ist in einer eigenthümlichen Verbindung vorhanden, da es erst in starker Glühhitze entweicht. Der hohe Wassergehalt ist, ebensowenig wie beim Apophyllit und beim Honigstein, ein Hinderniss für die Fähigkeit der Masse gut zu isoliren, die auch durch das vorhandene Eisenoxydul noch nicht vermindert wird.

Während ein Theil der Penninkrystalle durch Temperaturänderungen ziemlich starke elektrische Spannungen erhält, erscheinen dieselben auf anderen Individuen desselben Fundortes ganz ausserordentlich schwach, und es giebt kein Anzeichen, um im Voraus zu erkennen, ob ein Krystall starke oder schwache Elektricität beim Erhitzen und beim Erkalten zeigen wird.

Die Krystalle, welche ich auf ihr thermoelektrisches Verhalten untersucht habe, stammen von Zermatt im Canton Wallis; für einige derselben war speciell der Findelengletscher daselbst als Fundort angegeben.

Auf den beigefügten Tafeln habe ich acht Krystalle, theils in ihren Netzen, theils in projectivischer Ansicht, wie es eben die Form derselben gestattete, in natürlicher Grösse abgebildet.

A. Krystalle, welche seitlich vorzugsweise von den Flächen des Rhomboeders $+R$ begrenzt werden.

Krystall Nr. 1. (Taf. I. Nr. 1.) Das obere Ende dieses Krystalles läuft in zahlreiche von kleinen Flächen $0R$ abgestumpfte Spitzen aus; an dem unteren Ende ist er von dem mit $0R$ parallelem Durchgange begrenzt. Seine Seitenflächen werden von den Flächen des Rhomboeders $+R$ gebildet; doch treten am oberen Ende auch kleine Flächen $-R$ auf.

Beim Erkalten sind die Enden der Hauptaxe negativ, die Seitenflächen aber positiv; jedoch breitet sich die negative Elektricität von der oberen Spitze noch über die benachbarten Theile der Rhomboederflächen aus. Die Intensität der elektrischen Spannungen ist an manchen Stellen sehr beträchtlich; am oberen Ende wurde das Goldblättchen des Elektrometers ganz aus dem Gesichtsfelde des Mikroskopes hinausgetrieben*). Der Durchgang am unteren Ende ist beträchtlich schwächer negativ elektrisch, als das obere ausgebildete Ende.

Ob ein solcher Durchgang überhaupt noch negativ, oder theils negativ theils positiv, oder ganz positiv ist, hängt von seiner Stellung zu dem ganzen Krystalle ab. Liegt er nahe am natürlichen Ende, so erscheint er noch negativ, wenn auch schwächer als das ausgebildete Ende, wie bei vorliegendem Krystalle; je weiter er sich von diesem Ende entfernt, um so mehr nimmt die negative Spannung ab, und geht in die positive über**).

Krystall Nr. 2. Die von Herrn Baron v. Seherr-Thoss mir geliehene kleine Krystallgruppe besteht hauptsächlich aus drei, jedoch

*) In der Zeichnung durch = angedeutet.

**) Ich habe dieses Verhalten der Durchgänge bereits am Topas (Bd. XIV. S. 441), am Gyps (Bd. XVIII. S. 483) und anderen Krystallen nachgewiesen.

nicht in paralleler Stellung verwachsenen Individuen, die an Gestalt dem unter Nr. 1 beschriebenen gleichen. Am oberen Ende werden zwei Individuen von Krystallflächen $0R$, das dritte aber von einem dicht unter dem ursprünglichen Ende angeschlagenen Durchgange begrenzt. Am unteren Ende findet sich meistens ebenfalls der Durchgang, jedoch auf den hervorragenden Spitzen zeigen sich die Flächen $0R$. In Nr. 2 Taf. I. habe ich eine Art Netz des Krystalles, so gut es eben anging, abgebildet.

Die elektrische Vertheilung stimmt mit der auf dem vorhergehenden Krystalle beobachteten überein.

Krystall Nr. 3. (Nr. 3 Taf. 1.) Als Fundort dieses Krystalles ist speciell der Findelengletscher angegeben. Das obere Ende trägt noch eine natürliche Endfläche, während das untere von einem Durchgange begrenzt wird, der aber nicht weit über dem Ende gelegen hat. Die Seitenflächen bildet das Rhomboeder $+R$. Die elektrische Vertheilung gleicht der auf den beiden vorhergehenden beobachteten. Bei ihm ist ebenso wie bei diesen die negative Spannung auf der oberen ausgebildeten Endfläche viel stärker, als auf der unteren Durchgangsfläche.

Krystall Nr. 4. Wie aus dem Nr. 4 Taf. I. gezeichneten Netze hervorgeht, bildet der Krystall eine mit den Flächen 1 und 4 parallele Tafel. Sein oberes Ende zeigt noch die natürlichen Endflächen $0R$; auch am unteren Ende treten nach den Flächen 2 und 3 hin einige kleine Krystallflächen $0R$ auf, während den grössten Theil der Begrenzung eine nicht sehr weit über dem natürlichen Ende angeschlagene Durchgangsfläche bildet. Die seitliche Begrenzung bildet das Rhomboeder $+R$. Auf der Fläche 4 erscheint der Krystall aus mehreren in paralleler Stellung befindlichen Individuen zusammengesetzt. Die Rhomboederfläche 3 ist verbrochen.

Die obere Endfläche ist, wie bei den beiden vorhergehenden Krystallen, sehr stark negativ; auf der unteren tritt auf den noch vorhandenen Flächen $0R$ in der Nähe der Flächen 2 und 3, und ebenso auf dem benachbarten Theile der Durchgangsfläche gleichfalls die negative, dagegen auf dem übrigen nach den Flächen 5 und 6 hin gelegenen Theile des Durchganges bereits die positive Elektricität auf. Die seitlichen Rhomboederflächen sind im Allgemeinen positiv, mit Ausnahme der Fläche 6, auf welcher sich die negative Polarität



in abnehmender Stärke von oben nach unten herabzieht. Es liegt hier also ein ähnliches Verhalten vor, wie ich solches früher bereits beim Beryll*) und beim Mimetesit**) gefunden habe, bei denen bisweilen eine oder zwei der prismatischen Seitenflächen die den Enden entsprechende Polarität annehmen. Bei den Mimetesiten liess sich als Grund für diese Abweichung das Anwachsen mit den betreffenden Flächen anführen. Ob der vorliegende Pennin in der Nähe der Fläche 6 angewachsen gewesen ist, lässt sich aus seiner gegenwärtigen Form nicht mit Gewissheit bestimmen, da das untere Ende an dieser Stelle von einem Durchgange glatt begrenzt ist. Hat hier in der That die Anwachsung stattgefunden, so fände damit die positive Spannung auf der linken Seite der unteren Endfläche und die negative auf der Fläche 6 ihre Erklärung.

Krystall Nr. 5. Der Krystall (Nr. 5 Taf. I.) ist seitlich von den Flächen des Rhomboeders $+R$ begrenzt. Am oberen und unteren Ende finden sich Durchgangsflächen, die aber, wie aus der Beschaffenheit des Krystalles zu erkennen, nahe unter den ausgebildeten Enden angeschlagen sind, und daher auch noch negativ erscheinen. Die elektrische Vertheilung entspricht den auf den Krystallen Nr. 1, 2 und 3 beobachteten.

Krystall Nr. 6. (Nr. 6 Taf. I.) Der vom Findelengletscher stammende Krystall wird seitlich von dem Rhomboeder $+R$, am oberen und unteren Ende aber von Durchgangsflächen begrenzt. Die elektrische Vertheilung gleicht der auf Nr. 1 bis 3 beobachteten, nur erscheint die untere Durchgangsfläche positiv; sie hat also weiter ab vom unteren Ende gelegen, als die obere vom oberen Ende.

B. Krystalle, bei welchen die beiden Rhomboeder $+R$ und $-R$ gleich stark ausgebildet sind.

Krystall Nr. 7. (Nr. 7 Taf. I.) Der Krystall besteht, wie die Abbildung der oberen und unteren Durchgangsfläche zeigt, aus einem grossen und einem kleinen in paralleler Stellung verwachsenen.

An beiden Enden wird er von Durchgangsflächen begrenzt; man erkennt aber an den Seitenflächen, welche von den oberen Flächen der beiden Rhomboeder $+R$ und $-R$ gebildet werden, dass die

*) Diese Abhandl. Bd. XVIII. S. 235.
**) S. oben S. 556.

obere Durchgangsfläche dem natürlichen Ende näher gelegen hat. Sie zeigt daher auch auf dem grössten Theile noch negative Spannung, während die untere nur an dem einem Rande negativ, in dem bei weitem grössten Theile aber positiv ist. Dafür breitet sich die negative Polarität von der oberen Durchgangsfläche über die Flächen 6 und 4 aus. Sehr eigenthümlich ist die elektrische Vertheilung auf der Fläche 5, die oben einen positiven Streifen zeigt, während die Mitte und der untere Theil wieder negativ erscheint; ein Verhalten, das sich bei dem folgenden Krystalle fast auf allen Seitenflächen wiederholt.

Krystall Nr. 8. Wie aus dem in Nr. 8 Taf. I. gezeichneten Netze hervorgeht, werden die Seitenflächen dieses Krystalles, der nur das obere Ende eines grösseren Individuums darstellt, von den oberen Flächen der beiden Rhomboeder $+R$ und $-R$ in gleich starker Entwickelung, aber in eigenthümlich nach innen gekrümmter Weise gebildet. Auf dem oberen knopfförmig verdickten Ende selbst liegen ferner noch kleine Flächen, welche jedoch eine Messung nicht gestatten. Die Rhomboederflächen sind abwechselnd mehr oder weniger glänzend.

Die elektrische Vertheilung auf diesem Krystalle ist sehr eigenthümlich. Das obere ausgebildete Ende ist sehr stark negativ, der Durchgang am unteren Ende sehr stark positiv*), und es greift auch diese positive Spannung noch auf die anliegenden Theile der meisten Rhomboederflächen über. Auf den Rhomboederflächen erscheint oben unterhalb des knopfförmigen Endes auf allen Flächen (mit Ausnahme der Fläche 3) eine schmale positive Zone, während die weiter abwärts gelegenen Theile wieder negativ sind.

Dioptas.

Der Dioptas kommt in dem Kalksteine eines Berges bei dem Flusse Altyn-Ssu, 300 Werst südlich von dem Vorposten Kariakowsky (mittlere Kirgisensteppe) vor, und wurde daselbst von einem bucharischen Kaufmann Aschir Achmed auf seinen Handelsreisen entdeckt. Später hat man ihn auch in den sibirischen Goldseifen, sowie in Südamerika gefunden. Nach seinem ersten Entdecker erhielt

*) In der Zeichnung durch ♯ angedeutet.

dies Mineral den Namen Aschirit; Werner bezeichnete es als Kupfersmaragd; der Name Dioptas oder Cuivre dioptase wurde ihm von Hauy beigelegt.

Die Krystalle des Dioptases sind meistens durch Verwachsung einer Anzahl nicht genau in paralleler Stellung befindlicher Indivividuen gebildet; ihre Farbe ist vorzugsweise smaragdgrün. Sie sind durchsichtig bis durchscheinend. Als chemische Bestandtheile enthalten sie: 38 Kieselsäure, 50,5 Kupferoxyd und 11,5 Wasser; letzteres entweicht erst bei Temperaturen über 400°.

Der Dioptas gehört seiner Gestalt nach zum hexagonalen Systeme, und zwar zu der rhomboedrisch-tetartoedrischen Abtheilung desselben. Er besitzt eine vollkommene Spaltbarkeit nach den Flächen eines Rhomboeders mit einem Polkantenwinkel von 125° 55′. Nimmt man dieses Rhomboeder, welches aber nicht als Krystallfläche erscheint, zur Grundgestalt R, so zeigen die Krystalle gewöhnlich das Rhomboeder $-2R$, und das zweite sechsseitige Prisma $\infty P2$. Die Flächen des Rhomboeders $-2R$ sind also auf die Kanten des Prismas $\infty P2$ aufgesetzt. Das Grundrhomboeder stumpft die Kanten des Rhomboeders $-2R$ ab. Ausserdem treten öfter auf den abwechselnden von $-2R$ und $\infty P2$ gebildeten Kanten die Flächen eines Rhomboeders dritter Ordnung (eines Halbflächners des Skalenoeders oder eines rhomboedrischen Viertelflächners der dihexagonalen Pyramide) auf.

Die Feststellung des thermoelektrischen Verhaltens*) der Dioptase wird durch den Mangel an ringsum vollkommen ausgebildeten Krystallen sehr erschwert. Es gelingt aber doch durch Vergleichung der auf verschiedenen mehr oder minder vollständigen Krystallen und Bruchstücken derselben ausgeführten Beobachtungen das Gesetz für die normale Vertheilung der Elektricität aufzustellen.

Die Netze der abgebildeten Krystalle sind in doppelter Grösse gezeichnet, jedoch mit Ausnahme von Nr. 8, welcher nur in natürlicher Grösse dargestellt ist.

---

*) Hauy (Traité de mineral. II. éd. t. III. p. 478) nennt den Dioptas einen Leiter der Elektricität. Diese Angabe ist irrthümlich; wäre der Dioptas in der That ein Leiter, so könnten thermoelektrische Spannungen auf ihm nicht beobachtet werden.

Krystall Nr. 1. In Nr. 1 Taf. I. ist das Netz dieses Krystalles so weit es möglich abgebildet worden. Mit dem Hauptkrystalle, der in den Prismenflächen 6, 1 und dem linken Theile der Fläche 2 ziemlich gut ausgebildet erscheint, sind andere kleinere Individuen, oft in nicht paralleler Stellung verwachsen; namentlich finden sich oben auf der Fläche 3 zwei kleinere Dioptase mit ihren Hauptaxen schief gegen die Hauptaxe des grösseren Krystalles aufgelagert. Auf der Fläche 5, besonders aber auf der Fläche 4, liegt eine tiefe Grube; überhaupt ist die Fläche 4 äusserst mangelhaft gebildet. Das obere Ende läuft infolge der Zusammensetzung in mehrere Spitzen aus; das untere Ende besitzt noch grössere Theile der beiden auf die Kanten (6.1) und (2.3) aufgesetzten Rhomboederflächen; an Stelle der dritten findet sich eine Bruchfläche.

Beim Erkalten sind die beiden Enden der Hauptaxe negativ; die Seitenflächen zeigen positive Spannung, mit Ausnahme der Fläche 5 und des anliegenden Stückes der Fläche 6.

Krystall Nr. 2. Der Nr. 2 Taf. I. abgebildete Krystall besteht aus zwei Individuen *A* und *B*, deren Hauptaxen gegen einander geneigt sind. In der Zeichnung sind nur die an dem Krystall *A* sichtbaren Flächen abgebildet. An *A* sind beide Enden ziemlich gut ausgebildet, von den Prismenflächen sind nur die Flächen 1, 2 und zum Theil 3 vorhanden; an Stelle der Flächen 4 und 5 findet sich eine unebene, durch Anliegen in ihrer Ausbildung gehemmte Fläche, welche auch über das Individuum *B* hinweggeht.

Die beiden Enden der Hauptaxe des Individuums *A* sind wie bei dem vorhergehenden Krystalle negativ; die gut ausgebildeten Seitenflächen zeigen positive, die in ihrer Bildung gehemmte Fläche dagegen wieder negative Spannung.

Krystall Nr. 3. In Nr. 3 Taf. II. ist das Netz dieses, Herrn Baron von Seher-Thoss gehörigen Krystalles gezeichnet. Das obere Ende ist ziemlich gut ausgebildet; das untere zeigt noch grössere Stücke von zwei Rhomboederflächen, ist aber in dem übrigen Theile in zahlreiche Spitzen aufgelöst. Unten an der Fläche 5 hat der Krystall angesessen, und es liegt daselbst noch eine kleine Kalkspathmasse mit blätterigem Durchgange.

Die Enden der Hauptaxe sind negativ, jedoch verhalten sich am oberen Ende die drei Rhomboederflächen nicht in gleicher Weise;

auf der Rhomboederfläche über der Kante (5 . 6) zeigt sich bereits in der linken unteren Hälfte die positive Spannung. Auf den Prismenflächen waltet zwar die positive Spannung vor, doch zieht sich über die Fläche 2 die negative Spannung vom unteren Ende aus an Stärke abnehmend nach oben, und über die Fläche 3 vom oberen Ende aus abnehmend nach unten. Es bildet sich gewissermassen ein seitlicher Gegensatz zwischen den Kanten (2 . 3) und (5 . 6) aus, der möglicherweise durch die unten auf 5 erfolgte Anwachsung bedingt sein könnte.

Krystall Nr. 4. Der dem hiesigen mineralogischen Museum gehörige Krystall Nr. 4 Taf. II. zeigt das obere Ende ziemlich gut ausgebildet; das untere Ende ist verbrochen, trägt aber noch Reste von Rhomboederflächen.

Am oberen Ende sind die Rhomboederflächen in ihrer ganzen Ausdehnung negativ, und es verbreitet sich die negative Spannung auch über die anliegenden Ränder mehrerer Prismenflächen, die ganz oder in ihrem grössten Theile positiv sind, jedoch mit Ausnahme der Fläche 1, wo die positive Polarität nur in der Mitte erscheint. Das untere Ende zeigt theils negative, theils positive Spannung.

Krystall Nr. 5. Der Herrn Baron von Seher-Thoss gehörige Krystall Nr. 5 Taf. II. trägt nur am oberen Ende Rhomboederflächen, am unteren, wo er angewachsen gewesen, ist er verbrochen. Die vorhandenen Theile der Seitenflächen sind ziemlich gut ausgebildet.

Das obere Ende der Hauptaxe ist negativ, jedoch findet sich auf der einen Rhomboederfläche nur oben negative Spannung, während der mittlere und untere Theil, ebenso wie die darunter liegende Prismenfläche 3 unelektrisch erscheint. Die übrigen Prismenflächen sind mit Ausnahme der Fläche 1 positiv. Das untere verbrochene Ende zeigt positive Spannung.

Krystall Nr. 6. Der Krystall Nr. 6 Taf. II. gehört der Freiberger Sammlung und ist nur am oberen Ende ausgebildet, am unteren verbrochen. Die Seitenflächen sind meistens sehr mangelhaft gebildet.

Die Rhomboederflächen am oberen Ende zeigen in ihrer ganzen Ausdehnung negative Spannung, die sich auch noch über die anliegenden Ränder der Prismenflächen verbreitet. Die Prismenflächen sind auf ihrem grössten Theile positiv, ebenso das untere verbrochene Ende.

Krystall Nr. 7. Dieser ebenfalls der Freiberger Sammlung entlehnte Krystall Nr. 7 Taf. II. ist nur am oberen Ende gut ausgebildet; eine Streifung der Rhomboederflächen $-2R$ rührt von einer oscillatorischen Combination derselben mit einem Rhomboeder dritter Ordnung her, welches die links von den Seitenkanten liegenden Durchschnittskanten von $-2R$ und $\infty P2$ abstumpft. Das untere Ende ist theils von einem Bruche begrenzt, theils finden sich daselbst noch kleine Reste einer Rhomboederfläche, und eine nach R angeschlagene Durchgangsfläche. Die prismatischen Seitenflächen sind sehr mangelhaft gebildet.

Das obere Ende der Hauptaxe ist negativ; ebenso erscheint auf dem Durchgange am unteren Ende eine schwache negative Spannung, während die daselbst befindliche Bruchfläche positiv ist. Die prismatischen Seitenflächen 1, 5 und 6 sind im Ganzen stark positiv, und es verbreitet sich diese positive Spannung auch über den unteren und mittleren Theil der oberhalb der Kante (5.6) liegenden Rhomboederfläche; auf den Flächen 2 und 3 überwiegt die negative Spannung, die auf der Fläche 4 sogar allein und in ziemlicher Stärke sich zeigt.

Krystall Nr. 8. Am oberen Ende dieses Krystalles (Nr. 8 Taf. II.) ist die über der Kante (1.2) liegende Rhomboederfläche $-2R$ vollkommener ausgebildet als die beiden anderen, auf welchen die Streifung auf eine oscillatorische Combination mit dem beim vorhergehenden Krystalle beschriebenen Rhomboeder dritter Ordnung hinweist. Das untere Ende ist verbrochen; nur an der Kante (6.1) liegt daselbst noch ein kleiner Rest einer Rhomboederfläche. Die Prismenflächen 6, 1 und 2 sind ziemlich gut ausgebildet; auf der Fläche 3 liegen andere kleine Dioptase, und an der Stelle von 4 und 5 findet sich eine Bruchfläche, die noch theilweise mit kleinen Kalkspathmassen bedeckt ist.

Die Rhomboederflächen am oberen Ende sind in ihrer ganzen Ausdehnung negativ; diese negative Spannung verbreitet sich auch von hier aus auf einen mehr oder minder grossen Theil der Prismenflächen, die im Übrigen, ebenso wie die an Stelle der Flächen 4 und 5 getretene Bruchfläche, positive Elektricität zeigen. Auch die Bruchfläche am unteren Ende ist positiv.

Aus der Gesammtheit der vorstehenden Beobachtungen folgt, dass auf einem normal gebildeten Dioptaskrystalle die oberen und

unteren Rhomboederflächen $-2R$ negative Spannung zeigen, und dass diese je nach der Länge des Krystalles sich noch etwas über die anliegenden Ränder der Prismenflächen verbreitet. Die Prismenflächen $\infty P2$ sind positiv.

Für das öfter auch bei anderen Mineralien des hexagonalen Systems beobachtete anomale Verhalten einzelner Seitenflächen, die also beim Dioptase negativ anstatt positiv erscheinen, lässt sich aus der äusseren gegenwärtig vorliegenden Gestaltung der im Vorhergehenden beschriebenen Krystalle kein allgemein zutreffender Grund entnehmen. Eine Bruchfläche am Ende der Hauptaxe, die nicht allzunahe dem natürlichen Ende gelegen hat, erscheint aber stets positiv.

Strontianit.

Die in der Natur vorkommenden Krystalle des Strontianits (kohlensauren Strontians) sind meistens sehr wenig frei ausgebildet; einigermassen hervorragende Spitzen finden sich an den Krystalldrusen von Drensteinfurt, und drei solche abgebrochene Köpfe sind zur Bestimmung des thermoelektrischen Verhaltens dieses Minerales verwandt worden.

Die Strontianitkrystalle von Drensteinfurt, welche zu dem rhombischen Systeme gehören, werden seitlich von den Flächen ∞P und $\infty \breve{P}\infty$ begrenzt, und tragen an dem oberen Ende kleine Flächen von Pyramiden und Brachydomen. Übrigens sind die einfach erscheinenden Krystalle, ebenso wie die entsprechenden Aragonite, keine einfachen Individuen, sondern schliessen, wie am oberen Ende leicht zu erkennen ist, zahlreiche Zwillingslamellen ein. Die drei von den Drensteinfurter Drusen abgebrochenen Spitzen bestehen aus mehreren theils in paralleler, theils in abweichender Stellung der Axe verwachsenen scheinbar einfachen Krystallen.

Die Krystalle des Strontianits sind mit denen des Aragonits isomorph; die gleiche Gestaltung lässt wohl im Allgemeinen auch eine gleiche Vertheilung der bei Temperaturänderungen auftretenden Elektricitäten erwarten, wie wir ein gleiches Verhalten früher bei den isomorphen Krystallen des Apatits, des Pyromorphits und des Mimetesits fanden*). Durch diesen Umstand wird es, trotz der

*) Man darf wohl nicht wagen, eine gleiche elektrische Vertheilung bei gleichgestalteten Krystallen als strenge Forderung des Isomorphismns aufzustellen. Die

grossen Mängel der zur Verfügung stehenden Krystallbruchstücke, doch möglich, die thermoelektrische Vertheilung auf den Strontianitkrystallen festzustellen.

Im XV. Bande dieser Abhandlungen habe ich (S. 376) die elektrische Vertheilung auf den böhmischen Aragonitkrystallen angegeben: die Flächen ∞P sind beim Erkalten positiv mit zunehmender Intensität nach den brachydiagonalen Kanten hin, die Flächen $\infty \breve{P} \infty$ dagegen negativ. An den Enden der Brachydiagonale liegen also die positiven, und an den Enden der Makrodiagonale die negativen Pole. Je nach Ausdehnung der einzelnen Flächen und Mangelhaftigkeit in ihrer Ausbildung treten in der zuvor angegebenen Verbreitung der beiden Elektritäten Verschiebungen und Störungen ein. Das obere ausgebildete Ende der Hauptaxe schien positiv zu sein*); auf den am unteren Ende liegenden mehr oder weniger unebenen Bruchflächen fand sich theils negative, theils positive Elektricität.

Bei der oben angegebenen Beschaffenheit der drei Bruchstücke von Strontianit wird eine solche Regelmässigkeit, wie wir sie auf den vollkommen ausgebildeten Aragoniten beobachten, im Allgemeinen nicht zu erwarten sein. Auf den beiden ersten der in Nr. 1 und Nr. 2 Taf. II. in vier Ansichten abgebildeten Krystalle zeigen sich indess noch deutlich die beiden an den Enden der Brachydiagonale liegenden positiven, sowie die beiden an den Enden der Makrodiagonale liegenden negativen Pole, während bei dem dritten (Nr. 3 Taf. II.) der eine positive Pol, wohl in Folge der nicht parallelen Verwachsung zweier Individuen, nicht hervortritt. Die freien ausgebildeten Enden der verticalen Axe sind positiv; jedoch muss für die Wahrnehmung dieser positiven Spannung der ganze Krystall bis auf dieses Ende in Kupferfeilicht eingehüllt sein, weil sonst die auf den anstossenden Theilen der Fläche $\infty \breve{P} \infty$ befindliche starke negative Spannung die Einwirkung der auf dem Ende vorhandenen posi-

---

Doppelbrechung des Apatits und Pyromorphits wird optisch negativ, die des Mimetesits als optisch positiv angegeben. Wenn nun bei so nahe verwandten Krystallen wie Pyromorphit und Mimetesit der Charakter der Doppelbrechung sich ändert, so könnte wohl auch bei isomorphen Krystallen die thermoelektrische Vertheilung eine Änderung erleiden.

*) Bei neuerdings untersuchten Aragoniten von pyramidaler Form wurde das Ende der verticalen Axe stets positiv gefunden.

tiven auf den genäherten Platindraht überwiegt, und das Goldblättchen des Elektrometers zu einem negativen Ausschlage treibt. Das untere verbrochene Ende ist ebenfalls meistens auf seiner ganzen Bruchfläche positiv.

Die Projectionen Nr. 1 bis 3 sind in natürlicher Grösse gezeichnet, und die einzelnen Flächen zum Theil mit ihren krystallographischen Zeichen versehen. Bei dem Bruchstücke Nr. 3 war die hintere Seite sehr verletzt, und in den beiden Individuen, aus denen es vorzugsweise bestand, hatten zwar die verticalen Axen eine parallele Lage, dagegen lagen die Brachy- und Makrodiagonale in beiden nach verschiedenen Richtungen.

Witherit.

Der Witherit (kohlensaurer Baryt) findet sich nur selten in Krystallen, die zu einer thermoelektrischen Untersuchung geeignet sind. Die von mir dazu verwandten Krystalle und Bruchstücke stammen von Fallowfield und Hexham in Northumberland. Sie stellen anscheinend hexagonale Pyramiden dar. Indess gehören die Krystalle des Witherits, wie dies eine optische Prüfung sofort nachweist, zu dem rhombischen Systeme, und sind isomorph mit den Krystallen des Aragonits und Strontianits, und ebenso des im nächsten Abschnitte behandelten Cerussits*).

Die zuvor erwähnten scheinbaren hexagonalen Pyramiden wurden früher als eine Combination der Gestalten P und $2\breve{P}\infty$ betrachtet. Nach Sénarmont**) besitzen diese Pyramiden jedoch eine andere Zusammensetzung; er betrachtet sie als Sechslinge, in welchen die einzelnen Individuen sich mit dem spitzen Winkel ihrer Basis an einander gelegt haben. Die Flächen der sechsseitigen Pyramide werden ge-

*) Bei den vier genannten Mineralien ist das Verhältniss der Brachydiagonale zur Makrodiagonale und zur verticalen Axe

beim	Aragonit	0,6228 : 1 : 0,7207
-	Strontianit	0,6089 : 1 : 0,7237
-	Witherit	0,5949 : 1 : 0,7413
-	Cerussit	0,6102 : 1 : 0,7232

Der stumpfe Prismenwinkel an der brachydiagonalen Kante beträgt beim Aragonit 116° 10′, beim Strontianit 117° 19′, beim Witherit 118° 30′ und beim Cerussit 117° 14′.

**) Annal. de chim. et de phys. 3 Sér. 1854. Bd. 41, S. 63.

bildet von den Flächen $2\breve{P}\infty$ der einzelnen Individuen. Diese Zusammensetzung erwies Sénarmont durch die optische Untersuchung. Beim Witherit liegt die Ebene der optischen Axen im brachydiagonalen Hauptschnitte; mit diesem gehen die Mittelkanten von $2\breve{P}\infty$ parallel, und mit diesen Kanten fand Sénarmont auch die Ebenen der optischen Axen in jedem Sextanten parallel, wie dies in Fig. *A* Taf. II. dargestellt ist, wo die in die einzelnen Sextanten eingezeichneten, an ihren Enden mit kleinen Pfeilen versehenen Linien die Lage jener Ebene angeben.

Mit dieser Auffassung ist jedoch die Beschaffenheit der scheinbaren Pyramidenfläche 4 des Krystalles Nr. 1 (auf Taf. II. Nr. 1 in halber Grösse abgebildet) wohl nicht völlig im Einklange. Der Krystall ist ursprünglich auf der Seite der Fläche 4 angewachsen gewesen, und gegenwärtig daselbst durch eine grosse Bruchfläche begrenzt. Oberhalb dieser Bruchfläche ist aber noch ein kleiner Theil *a* der scheinbaren Pyramidenfläche 4 erhalten, und auf diesem als Krystallfläche ausgebildeten Theile liegt ein flacher einspringender Winkel, in dessen Grunde eine kammförmige Naht sichtbar wird.

Diese Bildung würde sich vollständig erklären, wenn wir den vorliegenden Krystall nicht aus sechs, sondern aus sieben Individuen zusammengesetzt betrachten. Nehmen wir z. B. ein Prisma mit dem Winkel von 118° 30′ am Ende der Brachydiagonale, also mit dem spitzen Winkel von 61° 30′ an den Enden der Makrodiagonale, und lassen um den Scheitel dieses Winkels als Mittelpunkt sich jederseits drei eben solche Individuen mit ihrem spitzen Winkel anlegen, so entsteht, wenn wir die äussere Hälfte eines jeden Individuums mittelst einer durch die Brachydiagonale gelegten Ebene abschneiden, eine Art Sechseck, auf dessen einer Seite sich jedoch ein einspringender Winkel von 189° findet. Diesem einspringenden Winkel würde der auf der Fläche 4 vorhandene einspringende Winkel entsprechen.

Die beschriebene Bildung erklärt nun auch die thermoelektrische Vertheilung. Beim Aragonit und Strontianit liegen an den Enden der verticalen Axe und der Brachydiagonale beim Erkalten positive, an den Enden der Makrodiagonale aber negative Pole. An den scheinbar hexagonalen Pyramiden des Witherits treten nur die Enden der verticalen Axe und die an den Enden der Makrodiagonale lie-

genden Flächen $2\breve{P}\infty$ an die Oberfläche. Wir werden also zu erwarten haben, dass das obere und untere Ende der scheinbar hexagonalen Pyramide positive, die Mittelkanten und ihre Umgebung aber negative Elektricität beim Erkalten zeigen; es könnte höchstens (wie dies in der That bei den analog gebildeten Krystallen des Cerussits stattfindet) in den Eckpunkten der Basis und in einem schmalen Streifen auf den Polkanten positive Spannung auftreten.

Der sehr grosse schöne Krystall Nr. 1 gehört der Freiberger Sammlung.

Das obere und untere Ende der verticalen Axe nebst grösseren Theilen der anliegenden Flächen sind positiv, die Mittelkanten dagegen nebst ihren Umgebungen sämmtlich negativ. Ebenso zeigt die grosse Bruchfläche starke negative Spannung, und dieser letztere Umstand bedingt wohl, worauf die Vergleichung mit den folgenden Krystallen hinweist, die starke Ausbreitung der positiven Spannung von den Enden der verticalen Axe über die scheinbaren Pyramidenflächen.

Krystall Nr. 2 und 3. Die Netze dieser Bruchstücke sind, so gut es sich ausführen liess, in natürlicher Grösse in Nr. 2 und 3 Taf. II. dargestellt worden. Bei Nr. 2 ist an Stelle der Flächen 5 und 6, und bei Nr. 3 an Stelle der Flächen 3 und 4 eine Bruchfläche getreten. Da diese Bruchflächen nicht negativ, sondern positiv sind, so ist dem entsprechend die Ausbreitung der positiven Spannung an dem Ende der verticalen Axe eine viel geringere, als bei dem vorhergehenden Krystalle.

Die im Vorstehenden dargelegte elektrische Vertheilung würde mit der früheren Auffassung der Witheritkrystalle als eine Combination von P und $2\breve{P}\infty$ völlig unvereinbar sein. Eine solche Bildung würde allerdings die positive Polarität an den Enden der verticalen Axe bestehen lassen, dagegen an den Enden der Brachydiagonale und den benachbarten Theilen der Pyramidenflächen positive, und nur auf den gegen die Makrodiagonale senkrecht stehenden Mittelkanten von $2\breve{P}\infty$ und den ihnen anliegenden Flächenstücken negative Spannung erfordern.

Cerussit (Weissbleierz).

Wie bereits oben erwähnt, sind die Krystalle des Cerussits (kohlensauren Bleioxyds) mit denen des Aragonits, Strontianits und Witherits isomorph. Unter den verschiedenen von mir auf ihr thermoelektrisches Verhalten geprüften Cerussitkrystallen ist es mir nur gelungen, auf den Krystallen von Wolfach in Baden bei Temperaturänderungen elektrische Spannungen und zwar in ziemlicher Stärke wahrzunehmen.

Der Nr. 1 Taf. II. in natürlicher Grösse dargestellte und der hiesigen Universitätssammlung gehörige Krystall ist an dem unteren Ende sehr unvollkommen ausgebildet; seine Flächen sind sehr stark glänzend (Demantglanz). Der Krystall gleicht in seiner Gestalt vollständig den im vorhergehenden Abschnitte beschriebenen Witheritkrystallen; er bildet also eine anscheinend hexagonale Pyramide, die bisher als eine Combination von P und $2\breve{P}\infty$ betrachtet worden ist.

Wie aus den in die Zeichnung des Netzes eingetragenen elektrischen Spannungen hervorgeht, gleicht er auch in der elektrischen Vertheilung dem Witherit; die Enden der verticalen Axe sind positiv, die Mittelkanten und die grössten Theile der pyramidalen Flächen negativ; jedoch tritt auf mehreren Eckpunkten der Basis und einem Theile der Polkanten wieder positive Spannung auf; auf den anderen Eckpunkten der Basis ist entweder keine Elektricität oder eine sehr schwache negative wahrzunehmen. Diese Vertheilung ist nur erklärlich, wenn wir den vorliegenden Krystall, ebenso wie die Witherite, als einen Sechsling auffassen, in welchem die sechs Individuen sich mit dem spitzen Winkel der Basis aneinander gelegt haben. Die scheinbaren Pyramidenflächen sind also die Flächen $2\breve{P}\infty$ der einzelnen Individuen, welche, weil sie am Ende der Makrodiagonale liegen, negativ sein müssen. In den Eckpunkten der Basis und in den Polkanten treten gewissermassen noch Durchschnitte der zur Brachydiagonale gehörigen Flächen an die Oberfläche, und erzeugen daher an mehreren dieser Stellen positive Spannung.

Euklas.

Die Krystalle des Euklases gehören zum monoklinischen Systeme; der schiefe Axenwinkel beträgt 79° 44′, und das Verhältniss der Hauptaxe zur Klinodiagonale und zur Orthodiagonale ist 1 : 0,97135 : 3,00086.

Auf den von mir auf ihr thermoelektrisches Verhalten untersuchten Krystallen fanden sich folgende Flächen: verticale Prismen ∞P, $\infty\not{P}9$ und $\infty\not{P}2$, Klinopinakoid $\infty\not{P}\infty$, Hemipyramiden $-P$, $-2\not{P}2$, $-4\not{P}4$ und $+3\not{P}3$. Ausserdem waren bei einem Krystalle noch die Kanten zwischen ∞P und $-P$, sowie von $\infty\not{P}2$ und $-2\not{P}2$ durch sehr schmale Flächen abgestumpft. Parallel mit $\infty\not{P}\infty$ ist der Euklas sehr vollkommen spaltbar.

Der Euklas ist chemisch eine Verbindung von 41,2 Kieselsäure, 36,2 Thonerde, 17 Beryllerde und 6,2 Wasser. Dieser letzte Bestandtheil war lange unbekannt, und ist erst durch Damour's Analysen nachgewiesen worden. Geringe Beimengungen von Eisen bedingen die öfter vorhandene grünliche Färbung. Der Euklas gehört zu den seltensten Mineralien; man kennt nur zwei Fundorte: 1) Capao und Boa vista in der Nähe von Villa Rica in Brasilien, wo er in Talk und Glimmerschiefer, die dort als Lager im Thonschiefer auftreten, zusammen mit Bergkrystall, Topas und Steinmark vorkommt, und 2) die Goldseifen des Kaufmanns Bakakin in der Nähe des Flusses Sanarka im Gouvernement Orenburg.

Bei der grossen Seltenheit des Euklases standen mir nur wenige aus Brasilien stammende Krystalle, und diese zum Theil in sehr verbrochenem Zustande zu Gebote; sie haben aber doch genügt, um die Vertheilung der Elektricität festzustellen.

Auf der beifolgenden Tafel habe ich dieselben in zwei Ansichten (*A* und *B*), wobei der klinodiagonale Hauptschnitt auf den Beschauer zugewandt ist, abgebildet, und die beim Erkalten beobachteten elektrischen Spannungen in die Zeichnungen eingetragen.

Krystall Nr. 1. Der schöne Krystall von graugrünlicher Färbung gehört der Freiberger Sammlung. Er zeigt die Flächen von ∞P, $\infty\not{P}9$, $\infty\not{P}2$, $-P$, $-2\not{P}2$, $-4\not{P}4$, $+3\not{P}3$ und ausserdem noch sehr schmale Abstufungen der Kanten von ∞P und $-P$, sowie von $\infty\not{P}2$ und $-2\not{P}2$. Die Prismenflächen sind mehr oder



weniger breit gestreift. Am unteren Ende ist er in einer gegen die verticale Axe ziemlich senkrechten Fläche abgebrochen. Im Sonnen- und Lampenlichte zeigen sich im Innern Spiegelungen durch kleine mit dem vollkommensten Durchgange parallele Flächen*).

In Nr. 1 Taf. II. ist der Krystall in zwei Projectionen *A* und *B* in natürlicher Grösse abgebildet. Die Linie *C* stellt die eine am Ende der Orthodiagonale liegende Seitenkante, *D* die Bruchfläche am unteren Ende dar.

Aus den auf diesem Krystalle beobachteten elektrischen Spannungen lässt sich ein Schluss auf die an einem ringsum ausgebildeten Euklase auftretende elektrische Vertheilung machen. Die Enden der verticalen Axe und der Klinodiagonale sind beim Erkalten positiv, die Enden der Orthodiagonale aber negativ. Der Euklas gleicht also in seiner elektrischen Vertheilung dem Gypse**), mit welchem er auch in Betreff seines vollkommensten Durchganges übereinstimmt.

Bei dem vorliegenden am unteren Ende verbrochenen Krystalle ist diese normale Vertheilung durch den Bruch gestört; wie ich schon beim Topas und anderen Krystallen gezeigt habe, nimmt die Bruchfläche am unteren Ende, wenn sie von dem natürlichen unteren Ende etwas weit absteht, nicht positive, sondern negative Polarität an. Durch diesen Umstand herrscht in der unteren Hälfte der Seitenflächen die negative, in der oberen die positive Spannung vor. Am oberen ausgebildeten und am unteren verbrochenen Ende treten starke elektrische Erregungen auf. Wird der Krystall bis auf eine ortho- oder klinodiagonale Kante in Kupferfeilicht eingehüllt erhitzt, so zeigen beim Erkalten die orthodiagonalen Seitenkanten überall negative Spannung, während auf den klinodiagonalen Seitenkanten die positive nur in dem oberen grösseren Theile erscheint.

Krystall Nr. 2. Der völlig wasserhelle Krystall Nr. 2 gehört ebenfalls der Freiberger Sammlung und zeigt fast dieselben Gestalten, wie der vorhergehende. Am unteren Ende ist der Krystall verbrochen; auf der linken Seite der Orthodiagonale wird er von Hauptdurchgangsflächen in unebener Weise begrenzt. In Nr. 2 Taf. II.

---

*) Um die Gefahr des Zerspringens zu vermeiden, sind die Euklaskrystalle höchstens bis zu einer Temperatur von 85° C. erhitzt worden.

**) Diese Abhandl. Bd. XVIII. S. 483.

A und B sind die beiden Ansichten in natürlicher Grösse gezeichnet, während C die am linken Ende der Orthodiagonale befindliche Durchgangsfläche und D die Bruchfläche am unteren Ende darstellt.

Das obere Ende der verticalen Axe ist stark positiv, das verbrochene untere negativ, wie beim vorhergehenden Krystalle. Auf der am rechten Ende der Orthodiagonale ausgebildeten verticalen Kante zeigt sich die normale negative Spannung, und zieht sich merkwürdigerweise auch noch über den mittleren Streifen der anliegenden Fläche $-4P4$ hinauf. Auf dem an der linken Seite der Orthodiagonale befindlichen mit $\infty P\infty$ parallelen Durchgange C tritt oben positive, unten negative Elektricität auf.

Krystall Nr. 3. Der von Capao bei Villa Rica stammende Krystall gehört der hiesigen Universitätssammlung. In Nr. 3 Taf. II. sind A und B die beiden oben beschriebenen Ansichten. Er ist nur auf dem rechten Theile der Orthodiagonale ausgebildet, und zeigt daselbst auf der vorderen und hinteren Seite blos die Prismenflächen $\infty P2$. Am oberen Ende wird der Krystall von sehr unvollkommen gebildeten Krystallflächen C begrenzt; am unteren Ende D liegt eine Bruchfläche, aber neben dieser finden sich noch geringe Reste von Pyramidenflächen; ein Beweis, dass der Bruch nicht allzuweit von dem natürlichen Ende absteht. Auf der linken Seite der Orthodiagonale trägt der Krystall eine sehr vollkommene Durchgangsfläche E.

Das obere Ende zeigt positive Spannung; ebenso die Bruchfläche am unteren Ende, da sie nicht weit vom natürlichen Ende absteht. Die durch eine schmale Fläche $\infty P\infty$ abgestumpfte rechte orthodiagonale Seitenkante ist negativ, dagegen erscheint die Durchgangsfläche auf der linken Seite E in ihrer ganzen Ausdehnung positiv.

Krystall Nr. 4. Das ebenfalls der hiesigen mineralogischen Sammlung gehörige Bruchstück Nr. 4 Taf. II. ist links und rechts von zwei breiten mit $\infty P\infty$ parallelen Durchgangsflächen C und D begrenzt. Auf dem vorderen und hinteren Rande A und B finden sich Reste der gestreiften Prismenflächen ∞P und $\infty P2$. Oben an der rechts gelegenen Durchgangsfläche D zeigen sich auch Theile von Pyramidenflächen, wie überhaupt das obere Ende von sehr mangelhaft gestalteten Krystallflächen begrenzt wird. Das untere Ende ist schief abgebrochen.

Das obere Ende zeigt beim Erkalten positive, das untere negative Elektricität. Die Seitenflächen sind in den oberen Theilen positiv, in den unteren negativ; auf dem vorderen Rande *A* zieht sich diese negative Polarität vom unteren Ende aus, wenn auch in abnehmender Stärke, bis zum oberen.

Krystallbruchstück Nr. 5. (Nr. 5 Taf. II.) Von der rechten Seite *D* des Krystalles Nr. 4 hatte sich ein 0,7 mm dickes Blättchen, parallel dem Hauptdurchgange, abgelöst. Trotz seiner Kleinheit konnte doch die elektrische Vertheilung bestimmt werden. Die Seitenflächen gleichen darin der Fläche des vorhergehenden Krystalles, von welcher das Blättchen abgesprungen war. Das obere Ende ist positiv, das untere negativ.

Man sieht, wie durch die Verletzung eines Krystalles seine elektrische Vertheilung geändert wird. Hätte man nur dieses kleine Bruchstück untersucht, so würde man dem Euklase jedenfalls eine mit der Hauptaxe polare elektrische Axe zuschreiben.

Krystall Nr. 6. Das in Nr. 6 Taf. II. ebenfalls in natürlicher Grösse abgebildete Bruchstück bildet nur einen Theil der rechten Hälfte eines Krystalles. Auf der vorderen Seite *A* findet sich eine Fläche von $\infty P2$, die aber oben bei *a* verbrochen ist, und ein Rest einer Fläche ∞P; die hintere Seite *B* zeigt nur eine Fläche $\infty P2$, über welcher eine Fläche $3P3$ (β) liegt. Auf der linken Seite wird der Krystall von einem sehr ebenen Hauptdurchgange *C* begrenzt; über ihm liegt noch eine kleine Bruchfläche γ. Das untere Ende *D* ist schief abgebrochen.

Die Flächen $\infty P2$ und $+3P3$ sind negativ, die Bruchflächen am oberen und unteren Ende, sowie die Hauptdurchgangsfläche aber positiv.

Titanit (Sphen).

Die Krystalle des Titanits gehören zum monoklinischen Systeme; der Winkel zwischen der verticalen Axe und der Klinodiagonale misst 85° 22′. Das Verhältniss der Klinodiagonale zur Orthodiagonale und zur verticalen Axe ist 0,4272 : 1 : 0,6575.

Eine sehr häufig vorkommende Combination (Nr. 1 bis Nr. 6 Taf. II.) wird gebildet durch die schiefen Endflächen $0P$, durch die Flächen des verticalen Prismas ∞P und die Flächen der beiden

Orthodomen $P\infty$ und $\frac{1}{2}P\infty$. Die Flächen des letztgenannten Orthodomas $\frac{1}{2}P\infty$ haben meist eine beträchtliche Grösse, während die Flächen ∞P sehr niedrig sind, so dass die Krystalle mehr oder weniger dünne Tafeln bilden.

Zu den genannten Flächen treten öfter noch hinzu die Flächen des verticalen Prismas $\infty P3$, sowie die Flächen der Hemipyramiden $\frac{2}{3}P2$ und $4P4$.

Bei manchen Krystallen (Nr. 7 bis Nr. 13 Taf. II. und III.) übertreffen die Flächen $4P4$ an Grösse die Flächen ∞P. Bisweilen dehnen sie sich soweit aus, dass die Flächen ∞P ganz verschwinden; der Krystall bildet dann ein schiefliegendes Prisma, das besonders deutlich hervortritt, wenn die Breite des Krystalles sich soweit verringert, dass die Flächen $P\infty$ nur noch als sehr schmale Abstumpfungen der im klinodiagonalen Hauptschnitte liegenden, von den Flächen $4P4$ gebildeten Kanten erscheinen, wie bei den Fig. 10 und 11 Taf. III. dargestellten Individuen.

Sehr häufig finden sich Zwillingskrystalle und zwar ist die Normale auf der schiefen Endfläche $0P$ die Zwillingsaxe; die beiden Individuen sind entweder nur aneinander oder auch durcheinander gewachsen. Die an den einzelnen Individuen auftretenden Krystallformen sind gewöhnlich $0P$, $\frac{1}{2}P\infty$, $P\infty$, ∞P und $\frac{2}{3}P2$.

Beide genannten Arten von Zwillingen, sowohl die nur aneinander als auch die durcheinander gewachsenen, erhalten ein verschiedenes Aussehen, je nachdem die Flächen $\frac{1}{2}P\infty$ noch in ziemlicher Grösse auftreten oder durch die Flächen $\frac{2}{3}P2$ fast oder auch ganz verdrängt werden.

Nr. 16 Taf. III. stellt einen Zwilling dar, dessen beide Individuen nur an einander gewachsen sind, und der noch ziemlich grosse Flächen $\frac{1}{2}P\infty$ trägt. Beim ihm bilden die Flächen $P\infty$ der beiden Individuen auf der hinteren Seite C einen einspringenden Winkel (Rinne) von $120^0\ 34'$; auf der vorderen Seite dagegen schneiden sich die Flächen $\frac{1}{2}P\infty$ in einer Kante ab von $78^0\ 34'$.

Bei den Contactzwillingen Nr. 18 bis Nr. 22 haben die Flächen $\frac{2}{3}P2$ die Flächen $\frac{1}{2}P\infty$ fast oder gänzlich verdrängt.

Sind bei den Durchwachsungszwillingen die Flächen $\frac{1}{2}P\infty$ noch ziemlich gross, die Flächen $\frac{2}{3}P2$ aber nur klein, so entstehen die in Nr. 24 bis Nr. 27 abgebildeten Formen. Dieselben besitzen zwei

Paare einspringender Winkel; oben und unten*) zwischen den Flächen $0P$ einen von den Flächen $\frac{1}{2}P\infty$ der beiden Individuen gebildeten Winkel von 101° 26′, und vorn und hinten einen von den Flächen $P\infty$ gebildeten von 120° 34′. Die auf der oberen und unteren Seite liegende Furche verläuft parallel mit der Orthodiagonale.

Wenn dagegen bei den beiden Individuen die Flächen $\frac{1}{2}P\infty$ zurücktreten, und dafür die Flächen $\frac{2}{3}P2$ sich stärker entwickeln, so entsteht ein Durchkreuzungszwilling, bei welchem die Furche auf der oberen und unteren Seite mit der Richtung der Orthodiagonale einen Winkel von ungefähr 45° bildet, wie in Fig. 29, 30 und 31. An dem rechten und linken Rande liegen die orthodiagonalen Kanten der Hemipyramide $\frac{2}{3}P2$, und die Furchen auf der oberen und unteren Seite werden durch das Zusammenstossen der Flächen $\frac{2}{3}P2$ gebildet. Bei den meisten Zwillingen dieser Art liegt oben der hintere Krystall rechts, der vordere links, so dass die Furche auf der oberen Seite von links hinten nach rechts vorn verläuft**). Auf der vorderen und hinteren Seite liegen die von den Flächen $P\infty$ gebildeten einspringenden Winkel.

Bei der Untersuchung von aus der Schweiz stammenden Titaniten bemerkte Hauy, dass diese Krystalle auf der einen Seite Flächen trugen, welche auf der anderen fehlten, und vermuthete daher, dass diese Krystalle durch Temperaturänderungen elektrisch werden würden. Er fand in der That auch an ihnen bei dem nach Erhitzung in einer Flamme eintretenden Erkalten eine elektrische Spannung, die jedoch nur schwach war, so dass er hinzufügt: »Il fallait avoir envie de la trouver pour l'apercevoir; mais son existance est incontestable«. Die Lage der elektrischen Pole vermochte er nicht zu bestimmen. Er beobachtete überhaupt das Auftreten der Thermoelektricität nur an gewissen Titaniten, und brachte dasselbe mit der von ihm angegebenen asymmetrischen Bildung in Beziehung***).

---

*) Wenn wir den Krystall auf eine Fläche $0P$ gelegt denken, heisse *A* die obere, *B* die untere Seite, *C* die hintere, *D* die vordere, *E* (Nr. 28 bis 31) der linke und *F* der rechte Rand.

**) Nur bei einem einzigen Zwillinge fand ich die Lage entgegengesetzt, und die Furche verlief von rechts hinten nach links vorn.

***) Hauy, Traité de minéral. II. Edit. Bd. IV. S. 36. Ich habe an den sehr zahlreichen von mir untersuchten Krystallen keine hemimorphe Bildung wahrge-

In meiner Habilitationsschrift*) habe ich im Jahre 1840 eine Untersuchung sowohl der einfachen Titanitkrystalle, als auch der Zwillinge in Bezug auf ihr thermoelektrisches Verhalten veröffentlicht, und die Lage von vier elektrischen Polen angegeben. Bei den einfachen Titanitkrystallen entdeckte ich zwei sich kreuzende elektrische Axen, welche die für damals besondere Merkwürdigkeit darboten, dass jede an ihren beiden Enden dieselbe elektrische Polarität besass. Die bei der Abkühlung an beiden Enden positive Axe fand ich zwischen den beiden Flächen $0P$ oder zwischen den beiden von $0P$ und $\frac{1}{2}\bar{P}\infty$ gebildeten Kanten; die beim Erkalten an beiden Enden negative zwischen den beiden Flächen $\bar{P}\infty$ oder den beiden von $\frac{1}{2}\bar{P}\infty$ und $\bar{P}\infty$ gebildeten Kanten.

Bei Zwillingskrystallen, auf welchen sich sehr starke elektrische Spannungen entwickelten, beobachtete ich ferner in einzelnen Polen eine Umkehrung der elektrischen Polarität in höheren Temperaturen, während ich eine solche bei den weniger stark elektrischen einfachen Krystallen, an welchen die Versuche angestellt wurden, mit den damaligen Hülfsmitteln nicht nachweisen konnte.

Riess und G. Rose erwähnen in ihrer Abhandlung über die Pyroelektricität der Mineralien**) nur, dass drei von ihnen untersuchte Titanitkrystalle bei Temperaturänderungen elektrische Spannungen gezeigt haben. Die Lage der elektrischen Pole wurde von ihnen nicht bestimmt, weil die benutzten Krystalle aus zwei durchwachsenen Individuen bestanden. Eine Umkehrung der Polaritäten bei höheren Temperaturen vermochten sie nicht wahrzunehmen.

Da mir für meine früheren Beobachtungen nur eine sehr geringe Anzahl von Titaniten zur Verfügung stand, so habe ich mich fortwährend bemüht, für eine umfassende Untersuchung des thermoelektrischen Verhaltens dieses Minerales brauchbare Krystalle zu erlangen, und es ist mir dies auch in dem langen Zeitraume von vierzig Jahren gelungen, so dass ich mit Zuhülfenahme der von befreundeten Collegen geliehenen Individuen in den Stand gesetzt worden bin, das zuvor bezeichnete Ziel zu erreichen.

---

nommen; auch beweist das thermoelektrische Verhalten, dass der Titanit nicht hemimorph ist.

*) Quaestionis de thermoelectricitate pars altera. Halae 1840. S. 19.

**) Abhandl. d. Berl. Akad. 1843. S. 35.

A. Thermoelektrisches Verhalten der Titanitkrystalle nach einer Erhitzung bis 100° C.

Ich habe bereits erwähnt, dass bei meinen früheren Untersuchung an Zwilligskrystallen eine Umkehrung der elektrischen Polaritäten in höheren Temperaturen beobachtet wurde. Dieselbe ist jedoch, wie ich auch damals schon vermuthete, nicht auf die Zwillingskrystalle beschränkt, sondern tritt auch an einfachen Individuen auf. Es erscheint mir indess zweckmässig, zunächst die elektrische Vertheilung festzustellen, wie sie auf den Titanitkrystallen sich zeigt, wenn die Temperaturänderungen 100° C. nicht überschreiten.

a. Einfache Krystalle.

Behufs Darlegung des elektrischen Verhaltens der einfachen Titanitkrystalle bilde ich auf den beifolgenden Tafeln eilf einfache Krystalle*) (Nr. 1 bis Nr. 11, Taf. II. und Taf. III.) in zwei Projectionen und zwei (Nr. 12 und Nr. 13 Taf. III.) in ihren Netzen ab. Die Zeichnungen sind theils in natürlicher, theils in doppelt linearer Grösse, wie dies durch die beigesetzten Zeichen 1/1 und 2/1 angedeutet ist, ausgeführt. Die ersten eilf Krystalle sind ringsum ziemlich vollkommen ausgebildet, die beiden letzten (Nr. 12 und 13) dagegen an dem oberen Ende verbrochen.

Um die Flächen in den Zeichnungen in möglichster Grösse erscheinen zu lassen, habe ich die Projectionen *A* und *B* für die Krystalle Nr. 1 bis 11 so gewählt, dass die Flächen $\frac{1}{2}P\infty$ mit der Ebene des Papieres parallel liegen. In die Projectionen und Netze sind die beim Erkalten beobachteten elektrischen Spannungen eingetragen worden.

Die auf den Tafeln abgebildeten dreizehn einfachen Krystalle lassen sich ihrer Form nach in drei Gruppen theilen.

Erste Gruppe: Nr. 1 bis Nr. 6 Taf. II. Diese Krystalle werden vorzugsweise von den Flächen $0P$, $\frac{1}{2}P\infty$, $P\infty$ und ∞P begrenzt, und bilden mehr oder weniger niedrige Tafeln. Bei den Krystallen Nr. 1 bis 4 erscheinen ausserdem die Flächen $\frac{2}{3}P2$, und bei Nr. 1 auch noch die Flächen $4P4$ und $\infty P3$**).

*) Untersucht wurden überhaupt 58 Titanitkrystalle, von denen die meisten allseitig von Krystallflächen begrenzt waren.

**) In die Zeichnungen sind nur die grösseren Flächen aufgenommen.

Die Krystalle Nr. 1 bis 4 haben eine durch Chloritbeimengungen erzeugte braungrünliche Färbung; Nr. 5 und 6 sind grauweisslich, an mehr oder minder grossen Stellen der Oberfläche mit Chlorit überzogen.

Zweite Gruppe: Nr. 7 bis Nr. 11 Taf. II und Taf. III. Die Krystalle werden begrenzt von den Flächen $0P$, $\frac{1}{2}P\infty$, $P\infty$ und $4P4$; bei Nr. 10 und 11 treten hiezu noch sehr kleine Flächen von ∞P und $\infty P3$. Die Farbe von Nr. 7 bis 9 ist weisslichgrau mit mehr oder minder starkem Anfluge von Chlorit; die Krystalle Nr. 10 und 11 (Taf. III.) sind graugrünlich, und auf den Flächen $4P4$ und den schmalen Flächen $P\infty$ stark glänzend, während die Flächen $0P$ und $\frac{1}{2}P\infty$ matt erscheinen. Die beiden letzten Krystalle Nr. 10 und 11 stammen von Tavetsch, während für die übrigen allgemein die Schweiz als Fundort angegeben ist.

Dritte Gruppe: Nr. 12 und Nr. 13 Taf. III. Die beiden sehr kleinen aus Tyrol stammenden Krystalle von graugrünlicher Farbe sind an dem einen (oberen) Ende verbrochen. Sie stellen dünne prismatische Nadeln vor, deren Seitenflächen von den Flächen $4P4$ gebildet werden. An dem unteren auskrystallisirten Ende treten zwei Flächen $\infty P3$ auf, deren Kante durch sehr schmale Flächen ∞P zugeschärft wird.

Die Krystalle Nr. 3, 7, 12 und 13 sind mir von Herrn Bergrath Weisbach, und die Krystalle Nr. 10 und 11 von Herrn Professor v. Quenstedt freundlichst geliehen worden.

Das elektrische Verhalten der einfachen ringsum ausgebildeten Titanitkrystalle lässt sich im Allgemeinen in folgender Weise kurz aussprechen: beim Erkalten sind die Enden der verticalen Axe und der Orthodiagonale positiv, die Enden der Klinodiagonale negativ*). Der Titanit gleicht hiernach in thermoelektrischer Beziehung dem Orthoklase.

Da in den ungleichaxigen Systemen zwei von den drei Krystallaxen dieselbe Polarität annehmen müssen, so tritt sehr häufig eine der

*) Die an den Enden der verticalen Axe und der Klinodiagonale liegenden elektrischen Pole sind die beiden von mir im Jahre 1840 bereits aufgestellten. Die an den Enden der Orthodiagonale befindlichen Pole konnten bei dem damaligen Untersuchungsverfahren nicht wohl beobachtet werden.

beiden elektrisch gleichnamigen Axen in ihrer Intensität gegen die andere zurück. So ist bei den sächsischen Topasen die positive Elektricität an den Enden der Hauptaxe, und die negative auf den makrodiagonalen Seitenkanten und deren Umgebung ziemlich stark und ausgedehnt, während die positive auf den brachydiagonalen Seitenkanten nur schwach und in geringer Ausdehnung auftritt. Ebenso ist beim Orthoklase die verticale Axe an ihren Enden stark positiv, die Klinodiagonale stark negativ; dagegen erscheint die positive Spannung an den Enden der Orthodiagonale nur in geringer Intensität. Beim Prehnit sind die Enden der Hauptaxe stark negativ, die Enden der Brachydiagonale stark positiv, wogegen die negative Elektricität an den Enden der Makrodiagonale nur eine geringe Stärke besitzt.

Ähnlich verhält sich der Titanit: während die positive Spannung an den Enden der verticalen Axe und die negative an den Enden der Klinodiagonale stark hervortreten, erscheint bei den flachen tafelförmigen Krystallen von rhombischer Form die positive Spannung an den Enden der Orthodiagonale nur schwach; ja die fast zugespitzten Enden derselben zeigen infolge der Ausbreitung der negativen Polarität über die grossen Flächen $\frac{1}{2}P\infty$ bisweilen gar keine elektrische Spannung oder auch wohl eine sehr geringe negative. So sind an den Krystallen Nr. 1 und Nr. 6 beide Enden der Makrodiagonale positiv, an Nr. 2 und Nr. 5 zeigt nur das eine Ende positive Spannung, während das andere unelektrisch oder auch schwach negativ ist; bei Nr. 3 und Nr. 4 konnte keine Elektricität an den betreffenden Punkten wahrgenommen werden.

Anders wird aber das Verhalten, wenn durch das Auftreten der Flächen $4P4$ an den Enden der Orthodiagonale eine etwas längere Kante entsteht; dann erscheint auf denselben eine starke positive Spannung, wie solche bei den Krystallen Nr. 7 bis Nr. 11 beobachtet wird.

Die Vertheilung der beiden Elektritäten auf den Krystallflächen gestaltet sich nun folgendermassen. Bei den Krystallen Nr. 1 bis Nr. 6, welche im Allgemeinen eine rhombische Form mit spitz zulaufenden Enden der Orthodiagonale besitzen, sind die schiefen Endflächen $0P$ meistens in ihrer ganzen freilich nicht grossen Ausdehnung positiv, und es erstreckt sich diese positive Polarität auch noch auf

den anliegenden Theil der Flächen $\frac{1}{2}P\infty$, wobei auf breiteren Krystallen die elektrische Spannung nach den Seiten (den Enden der Orthodiagonale) hin stärker ist als in der Mitte; wohl eine Folge der den Enden der Orthodiagonale zukommenden positiven Polarität. Der übrige Theil der Flächen $\frac{1}{2}P\infty$ ist negativ, und eben diese Spannung zeigen auch die Flächen $P\infty$, entweder in ihrer ganzen Ausdehnung oder nur auf dem an die Flächen $\frac{1}{2}P\infty$ grenzenden Theile, während der den Flächen $0P$ benachbarte Theil an der elektrischen Beschaffenheit dieser letzteren Flächen theilnimmt und also positiv erscheint. Auf den Flächen ∞P beobachtet man, wenn sie nicht zu schmal sind, auf den Theilen, welche an die Flächen $0P$ grenzen (Nr. 1), positive Spannung, welche sich dann von hier aus nach den Enden der Orthodiagonale hinzieht*).

Für die Krystalle Nr. 7 bis Nr. 11 gilt in Betreff der elektrischen Vertheilung auf den Flächen $0P$, $\frac{1}{2}P\infty$ und $P\infty$ die zuvor gemachte Angabe. Dagegen tritt nun bei ihnen auf den an den Enden der Orthodiagonale liegenden Kanten der Flächen $4P4$ eine starke positive Spannung auf, welche auf den langen Kanten der Krystalle Nr. 10 und Nr. 11 sehr stark ist, und ihre grösste Intensität in der Mitte hat.

Bei den beiden, am oberen Ende verbrochenen, von den Flächen $4P4$, $\infty P3$ und ∞P begrenzten nadelförmigen Krystallen Nr. 12 und Nr. 13 ist das obere verbrochene und ebenso das untere die Flächen $\infty P3$ und ∞P tragende Ende positiv. Die von den Flächen $4P4$ im klinodiagonalen Hauptschnitte gebildeten Kanten zeigen negative Spannung; auf den von den Flächen $4P4$ an den Enden der Orthodiagonale gebildeten Kanten vermag dagegen die positive Spannung nicht überall hervorzutreten; es erscheinen manche Stellen dieser Kanten unelektrisch oder zeigen auch wohl eine sehr schwache negative Spannung.

b. Zwillingskrystalle.

In meinen früheren Abhandlungen habe ich gezeigt, dass die thermoelektrische Vertheilung auf den Krystallen des Aragonits,

*) Bei der in die Zeichnung Nr. 1 eingetragenen Beobachtungsreihe wurde infolge der getroffenen Einhüllung des Krystalles in das Kupferfeilicht auf der einen Fläche ∞P die positive Spannung nicht wahrgenommen; es liegen mir aber andere Beobachtungsreihen vor, in denen sie deutlich hervortrat.

Kalkspathes, Gypses, Orthoklases und Periklins durch die Zwillingsbildung nicht geändert wird; auf den verschiedenen Stellen der Oberfläche der Zwillinge und selbst der mehrfach zusammengesetzten Krystalle tritt dieselbe Polarität auf, wie sie an denselben auf einfachen Individuen erscheint. Dieser Ausspruch gilt beim Titanit zwar noch von der grössten Anzahl der Zwillinge; bei manchen treten jedoch infolge der Zwillingsbildung Abweichungen ein. Es lassen sich diese Abweichungen mit denen vergleichen, welche auch auf einfachen Krystallen infolge des Einflusses der Anwachsung sich zeigen*). Bei den einfachen Titanitkrystallen, welche ringsum ausgebildet waren, habe ich, wie die vorhergehende Darstellung zeigt, keine wesentlichen Verschiedenheiten in der elektrischen Vertheilung beobachtet. Auf den Zwillingen scheinen namentlich Störungen dann einzutreten, wenn die beiden Individuen derselben eine ungleiche Grösse und Ausbildung besitzen, während bei gleicher Grösse und Gestaltung die normale Vertheilung erhalten bleibt.

α. Aneinander gewachsene Krystalle.

αα. Ein kleiner Krystall in der Mitte der einen Fläche $\frac{1}{2}P\infty$ eines grösseren angewachsen.

Bei beiden Krystallen (Nr. 14 und Nr. 15 Taf. III.) von grauer, durch Chlorit etwas grünlicher Färbung ist das grössere Individuum vollständig ausgebildet, und wird begrenzt von den Flächen $0P$, $\frac{1}{2}P\infty$, $P\infty$, ∞P und $4P4$. Nr. 15 besitzt in der Richtung der Orthodiagonale eine etwas grössere Breite als Nr. 14. Auf der einen Seite (*A*) ist auf der Fläche $\frac{1}{2}P\infty$ bei Nr. 14 ein sehr kleiner, bei Nr. 15 ein etwas grösserer Krystall aufgewachsen.

Beide Zwillinge zeigen nun in elektrischer Beziehung übereinstimmend das Eigenthümliche, dass auf der Seite *A* fast überall negative, dagegen auf der Seite *B*, auf welcher keine Spur des anderen Krystalles sichtbar ist, fast überall positive Spannung auftritt. Auf der Seite *A* erscheint die positive Spannung nicht auf der Fläche $0P$; denn die am rechten und linken Rande liegenden positiven Stellen gehen von den an den Enden der Orthodiagonale liegenden Polen aus. Auf der Seite *B* erscheint die negative Polarität bei

*) Vergl. oben S. 357.

Nr. 14 nur seitlich am Rande der Fläche $\frac{1}{2}P\infty$ gegen $P\infty$ hin, und bei Nr. 15 auf einer kleinen Stelle in der Mitte der Kante von $\frac{1}{2}P\infty$ mit $0P$. Die an den Enden der Orthodiagonale von den Flächen $4P4$ gebildeten Kanten sind positiv, und zwar wächst bei den längeren Kanten des Krystalles Nr. 14 die Intensität in der Richtung von hinten nach vorn.

ββ. Beide Individuen von gleicher Breite und Länge.

Krystall Nr. 16 Taf. III. An dem Zwillingskrystalle Nr. 16 finden sich die Flächen $0P$, $\frac{1}{2}P\infty$, $P\infty$, ∞P und $\frac{3}{2}P2$. Am linken Ende der Orthodiagonale, so wie an der von den Flächen $\frac{1}{2}P\infty$ gebildeten Kante (ab) hat er angelegen, und ist daher an den betreffenden Stellen mangelhaft ausgebildet. Seine Masse ist ziemlich durchsichtig und grünlich gefärbt.

Das elektrische Verhalten entspricht im Allgemeinen dem auf den einfachen Individuen beobachteten. Die Flächen $0P$ nebst den anliegenden Theilen der Flächen $\frac{1}{2}P\infty$ sind positiv, mit Ausnahme einer kleinen Stelle auf der Fläche $0P$ neben der Kante von $0P$ und $\frac{1}{2}P\infty$ (Fig. 16B), wo schwache negative Elektricität auftritt. Die von den Flächen $\frac{1}{2}P\infty$ der beiden Individuen am vorderen Rande ab gebildete Kante bleibt noch positiv; dagegen erscheint in dem von den Flächen $P\infty$ gebildeten einspringenden Winkel C sehr starke negative Spannung.

Krystall Nr. 17 Taf. III. Bei diesem Krystalle sind die Flächen $\frac{1}{2}P\infty$ kleiner, die Flächen $\frac{3}{2}P2$ dagegen breiter als bei dem vorhergehenden; es nähert sich also seine Gestalt schon sehr den in Nr. 18 bis 22 abgebildeten. Seine Masse ist grün und durchsichtig, jedoch stellenweise durch fremdartige Einschlüsse getrübt. Das obere in der Zeichnung A sichtbare Individum ist etwas dünner als das darunter liegende.

Auf der Seite A ist die Fläche $0P$ zum grössten Theile positiv, nach der Fläche $\frac{1}{2}P\infty$ hin aber negativ; auf der unteren Seite B wird überall nur positive Spannung gefunden, ebenso auch auf der kurzen am vorderen Rande von den Flächen $\frac{1}{2}P\infty$ der beiden Individuen gebildeten Kante. In dem von den Flächen $P\infty$ beider Individuen auf der hinteren Seite gebildeten Winkel C tritt starke negative Spannung auf.

An diesem Zwilling Nr. 17 sass ursprünglich auf der in *B* abgebildeten Seite noch ein anderer kleiner Titanit. Beim Absprengen desselben zerbrach der grosse Krystall nach der durch $\alpha\beta$, $\gamma\delta$ bezeichneten Fläche. Bei der zuvor erwähnten Untersuchung wurden die beiden Stücke dicht aneinander geschoben.

Ich habe die dargebotene Gelegenheit benutzt, die elektrische Vertheilung auf den beiden Bruchflächen zu bestimmen; dieselben sind in Fig. 17 *G* und *H* gezeichnet. Wie man sieht, gleicht die elektrische Vertheilung auf der einen Bruchfläche genau der auf der anderen beobachteten; beide Flächen sind im Ganzen positiv, nur tritt nach dem hinteren einspringenden Winkel und nach oben hin eine schwache negative Spannung auf. Nach der unteren Seite *B* hin wächst die positive Spannung, was mit dem Umstande zusammenhängt, dass auf der Seite *B* überhaupt eine starke positive Elektricität herrscht.

Krystalle Nr. 18, Nr. 19 und Nr. 20 Taf. III. Die drei Krystalle Nr. 18, 19 und 20 werden fast nur von den Flächen $0P$, $\bar{P}\infty$ und $\frac{2}{3}\bar{P}2$ begrenzt. Die Farbe von Nr. 20 ist grün, von Nr. 18 und 19 gelblichgrün. Die Masse aller drei Zwillinge ist durchsichtig und ziemlich rein. Die Dicke der beiden die Zwillinge Nr. 18 und 19 bildenden Individuen ist nahe gleich gross; bei Nr. 20 erscheint die Dicke des auf der oberen Seite *A* sichtbaren ein wenig geringer als die des unteren.

Die Krystalle Nr. 18 und 19 zeigen nun die gewöhnliche elektrische Vertheilung*); die Flächen $0P$ und $\frac{2}{3}\bar{P}2$ sind auf beiden Seiten positiv, der von den Flächen $\bar{P}\infty$ auf der hinteren Seite gebildete einspringende Winkel *C* aber negativ. Da die positive Spannung über einen grösseren Theil der Oberfläche ausgebreitet ist, als die negative, so erreicht ihre Intensität nirgends die grösste Stärke der auf einen kleineren Raum beschränkten negativen. Übrigens sind die elektrischen Spannungen auf diesen beiden Krystallen überhaupt nur gering.

Bei dem Krystalle Nr. 20 zeigt zwar die obere Seite *A* positive Elektricität, dagegen die untere *B* ebenso wie der einspringende

*) Eben dies gilt auch von einem kleineren, auf den Tafeln nicht abgebildeten Zwillinge gleicher Gestalt.

Winkel C auf der hinteren Seite negative. Die negative Spannung tritt also auf der Fläche $0P$ des etwas dickeren Krystalles auf. Durch den elektrischen Gegensatz zwischen der oberen und unteren Seite ist jedenfalls die grössere Stärke der auf den Flächen $0P$ auftretenden Spannungen bedingt.

Krystall Nr. 21 Taf. III. Der Zwilling Nr. 21 ist auf der unteren Seite etwas unvollkommener ausgebildet als auf der oberen; das untere Individuum hat auch eine geringere Dicke als das obere. Auch bei ihm ist nur die eine Seite B positiv, die andere A nebst dem einspringenden Winkel C negativ; dabei nimmt auf der oberen Fläche $0P$ die negative Spannung nach der Mitte hin ab.

Krystall Nr. 22. (Fig. 22 Taf. III.) Bei diesem Zwillinge ist die Dicke des unteren Individuums auf ein Minimum reducirt; der einspringende Winkel wird deshalb nicht mehr sichtbar, es erscheint daselbst nur die Fläche $\bar{P}\infty$ des oberen Individuums. Die obere Seite A ist negativ, die untere B, so wie die Fläche $\bar{P}\infty$ (C) positiv.

β. Durchgewachsene Krystalle.

Schon oben S. 581 habe ich erwähnt, dass wir zwei verschiedene Formen dieser Zwillinge unterscheiden können. Bei der ersten Gruppe werden die beiden Individuen vorzugsweise von den Flächen $0P$, $\frac{1}{2}\bar{P}\infty$, $\bar{P}\infty$ und ∞P begrenzt, zu welchen noch kleine Flächen $\frac{4}{3}\bar{P}2$ und $4\bar{P}4$ hinzutreten, während bei der zweiten die Flächen $0P$, $\frac{4}{3}\bar{P}2$ und $\bar{P}\infty$ vorwalten.

αα. Erste Gruppe.

Krystall Nr. 23 Taf. III. Dieser Zwilling besteht aus einem grösseren dünnen tafelartigen Individuum von der Form wie Nr. 2, wozu noch äusserst kleine Flächen $\frac{4}{3}\bar{P}2$ treten. Dieses grössere Individuum ist von einem zweiten ziemlich kleinen, auch dünn tafelförmigen, das aus seinen beiden Flächen $\frac{1}{2}\bar{P}\infty$ herausragt, in Zwillingsstellung durchwachsen. Wie die in Fig. 23 eingetragenen Beobachtungen zeigen, ist die elektrische Vertheilung auf dem grossen Krystalle völlig normal. Auf dem kleinen konnte seiner geringen Grösse wegen eine genauere Bestimmung nicht ausgeführt werden.

Krystall Nr. 24 Taf. III. Bei diesem von Tavetsch stammenden Zwillinge sind die beiden Individuen in ihrer Grösse weniger

ungleich. Ausser den Flächen $0P$, $\frac{1}{2}\bar{P}\infty$, $\bar{P}\infty$ und ∞P finden sich noch kleine Flächen $4\bar{P}4$. Die Masse ist graulich gefärbt und undurchsichtig, mit sehr geringem Anfluge von Chlorit.

Auf der oberen Seite *A* tritt die negative Spannung in grösserer Verbreitung auf, als auf der unteren *B*. An dem vorderen (*D*) und hinteren Ende (*C*) findet sich rechts und links auf den daselbst auftretenden Flächen ∞P positive Spannung, während in der Mitte der Rinne die negative Polarität erscheint.

Krystall Nr. 25 Taf. III. Der ebenfalls von Tavetsch stammende Krystall Nr. 25 gleicht dem vorhergehenden an Gestalt, ist aber durch Chlorit grünlichgrau gefärbt. Seine Flächen sind glatt.

Auf der oberen und unteren Seite tritt die negative Spannung sehr zurück; sie erscheint nur an einzelnen Stellen der von den Flächen $\frac{1}{2}\bar{P}\infty$ gebildeten Rinne. Dagegen findet sie sich im Grunde der von den beiden Flächen $\bar{P}\infty$ gebildeten Rinne auf der vorderen und hinteren Seite; jedoch tritt an den nach den Flächen $0P$ gelegenen Rändern der Flächen $\bar{P}\infty$ zum Theil auch die positive Spannung auf.

Krystall Nr. 26 Taf. III. Dieser Zwilling hat mit dem vorhergehenden gleiche Gestalt und Beschaffenheit und stammt ebenfalls von Tavetsch. An dem linken Ende der Orthodiagonale ist er durch Bruch etwas verletzt.

Auf der oberen Seite *A*, wo der eine Krystall grösser ist als der andere, tritt in der von den Flächen $\frac{1}{2}\bar{P}\infty$ gebildeten Rinne und ihrer Umgebung die negative Spannung stark und so weit ausgedehnt auf, dass die positive nur an dem Rande der grösseren Fläche $0P$ erscheint. Dagegen wird auf der unteren Seite, wo die beiden Flächen $0P$ nahe gleiche Grösse besitzen, die negative Spannung, wenn die ganze obere Seite frei liegt, durch die positive der umliegenden Theile verdeckt; werden die positiven Stellen möglichst mit Kupferfeilicht bedeckt, so ist in der Mitte der Rinne die negative Spannung wahrnehmbar. In den von den Flächen $\bar{P}\infty$ gebildeten einspringenden Winkeln (*C* und *D*) zeigt sich starke negative Spannung.

Krystall Nr. 27 Taf. III. Der Krystall Nr. 27 aus dem Pfunderthal ist durchsichtig, mit Einschlüssen von Chlorit. Er bildet schon eine Art Übergang zu der zweiten Gruppe, indem an dem einen In-

dividuum auf der oberen Seite bereits eine Fläche $\frac{2}{3}P2$ in ziemlicher Grösse auftritt. Das rechte Ende der Orthodiagonale ist unvollkommen ausgebildet. Bei ihm erscheint die negative Spannung nur in der Mitte der unteren Seite *B*; die obere Seite *A* ist überall positiv.

ββ. Zweite Gruppe.

Die Krystalle dieser Gruppe werden, wie bereits S. 581 angegeben, vorzugsweise von den Flächen $0P$, $\frac{2}{3}P2$ und $P\infty$ begrenzt, während die Flächen $\frac{1}{2}P\infty$ sehr zurücktreten oder kaum wahrnehmbar sind.

Die vier Krystalle Nr. 28, 29, 30 und 31 stammen aus der Nähe von Obersulzbach; ihre Masse ist durch Chlorit grün gefärbt; ihre Flächen zeigen sehr starken Glanz.

Der Krystall Nr. 28 bildet gewissermassen den Übergang von der ersten Gruppe zur zweiten, indem bei ihm die Flächen $\frac{1}{2}P\infty$ noch in mässiger Grösse vorhanden sind, so dass der mittlere Theil der Zwillingsfurche auf der oberen und unteren Seite parallel der Orthodiagonale verläuft. Bei den übrigen drei Krystallen, an welchen die Flächen $\frac{1}{2}P\infty$ kaum sichtbar sind, hat die von den Flächen $\frac{2}{3}P2$ gebildete Furche die Richtung von links hinten nach rechts vorn.

In elektrischer Beziehung treten dieselben Verhältnisse ein, wie bei den früheren Krystallen. Die Flächen $0P$ sind im Allgemeinen positiv, und es wächst dabei die Intensität nach der von dem zweiten Individuum abgewandten Seite hin. Die von den Flächen $\frac{1}{2}P\infty$ oder $\frac{2}{3}P2$ gebildeten Furchen erscheinen mehr oder weniger negativ. Die von den Flächen $P\infty$ auf der vorderen und hinteren Seite gebildeten Rinnen sind negativ, mit Ausnahme von Nr. 28, bei welchem sie zum Theil positiv erscheinen, jedoch in ihrem Grunde schwächer als auf den nach den Flächen $0P$ hin gelegenen Rändern der Flächen $P\infty$. Die auf der rechten und linken Seite durch den Durchschnitt zweier Flächen $\frac{2}{3}P2$ desselben Individuums gebildeten Kanten zeigen überall positive Spannung.

B. Elektrisches Verhalten beim Erhitzen über 100° C.

Bereits 1840 habe ich, wie früher erwähnt, in meiner Habitationsschrift mitgetheilt, dass auf den Titaniten bei höheren Temperaturen Umkehrungen in den elektrischen Polaritäten eintreten, wie

ich solche früher auch bei den Boracitkrystallen*) beschrieben habe. Damals konnte ich wegen Mangels an geeigneten Krystallen diese Umkehrungen nur an Zwillingskrystallen nachweisen, sprach aber die Vermuthung aus, dass solche auch auf den einfachen Individuen sich zeigen würden.

a. Einfache Krystalle.

Die beiden Krystalle Nr. 10 und 11 Taf. II. zeichneten sich, wie wir oben sahen, durch grosse Intensität der elektrischen Spannungen und durch die vollkommen normale Vertheilung der beiden Polaritäten auf ihrer Oberfläche aus, als sie nur bis 100° C. erhitzt wurden, und schienen daher für eine Untersuchung über die Umkehrung bei höheren Temperaturen sehr geeignet.

Zu diesem Zwecke wurden die Krystalle in kupfernen Schalen in Eisenfeilicht eingesetzt, so dass nur die zu prüfende Stelle frei blieb, und in einem ringsum geschlossenen Raume bis 210° C. erhitzt. Sofort nach dem Herausnehmen begann die Beobachtung. Bei diesem Verfahren traten auf den Kanten von $0P$ und $\frac{1}{2}P\infty$, sowie auf den Flächen $P\infty$ nach einiger Zeit der Abkühlung die oben S. 586 angeführten und in die Nr. 10 und 11 Taf. III. eingetragenen Polaritäten, also auf den Kanten zwischen $0P$ und $\frac{1}{2}P\infty$ positive und auf den Flächen $P\infty$ negative Elektricität auf; die entgegengesetzten konnten an den bezeichneten Punkten nicht wahrgenommen werden.

Anders verhielten sich die beiden an den Enden der Orthodiagonale von den Flächen $4P4$ gebildeten Kanten. Bald nach dem Beginn der Abkühlung entstand eine negative Spannung, welche bis auf — 5 Skth. anwuchs, und dann bei weiterem Erkalten in die positive, die allmählich bis + 10 oder 12 Skth. stieg, überging.

Die Grenze der Temperatur, bei welcher die Umkehrung eintritt, liess sich angenähert auf folgende Weise bestimmen. Wurde der Krystall bis 135° C. erhitzt, so erschien ebenso wie zuvor, wo die Temperatur bis 210° gesteigert worden, auf den am Ende der Orthodiagonale liegenden Kanten zuerst negative, wenn auch schwächere, und dann positive Spannung. Hatte die Temperatur nur 110° C. erreicht, so begannen die Kanten sofort negative Spannung zu ent-

*) Diese Abhandl. Bd. VI. S. 149.

wickeln; war der Krystall bis 114 C°. erhitzt worden, so erschien die Kante zuerst einige Zeit unelektrisch, und wurde dann positiv. Die Temperatur, bei welcher die Umkehrung der Pole eintritt, liegt hiernach also ungefähr bei 112° C.

Auf dem Krystall Nr. 1 habe ich nur an einem Pole, nämlich an dem auf der oberen Seite *A* an der Kante zwischen $\frac{1}{2}P\infty$ und $P\infty$ liegenden, eine Umkehrung mit voller Sicherheit nachweisen können. Nach einer Erhitzung bis 210° tritt hier zuerst positive Spannung auf, die später in eine negative übergeht.

Ich habe die Umkehrung an dieser Stelle auch noch durch einen anderen Versuch bestätigt. Der Krystall Nr. 1 wurde, bis auf die betreffende Stelle in Eisenfeilicht eingehüllt, auf einem kleinen neben dem Elektrometer befindlichen eisernen Ofen*) erhitzt. Um über den Gang der Temperatur wenigstens eine ungefähre Angabe zu erhalten, stand dicht neben dem Krystalle in dem Eisenfeilicht das cylindrische Gefäss eines Thermometers. Innerhalb des kleinen Ofens befand sich eine Alkohollampe mit kleiner Flamme. Als das Thermometer 60° zeigte, begann auf der bezeichneten Kante sich eine positive Spannung zu entwickeln, die bei 110° ihr Maximum erreichte, und bei 150° in eine negative verwandelt war. Die Flamme wurde ausgelöscht, als das Thermometer auf 180° stand. Beim Erkalten erschien erst bei 130° eine positive Spannung, die sehr lange anhielt, und als das Thermometer 40° zeigte, in die der niederen Temperatur entsprechende negative überging. Dieser späte Eintritt der negativen Elektricität ist wohl durch den Umstand bedingt, dass erst die vorhergehende positive Spannung durch die auftretende negative überwunden sein muss, bevor diese letztere selbst wahrnehmbar wird.

b. Zwillingskrystalle.

Die im Jahre 1840 von mir veröffentlichten Beobachtungen über die Umkehrung gewisser elektrischer Pole auf dem Titanit wurden an dem unter Nr. 15 Taf. III. dieser Abhandlung beschriebenen Zwillinge ausgeführt. S. 586 habe ich aber gezeigt, dass die bei Temperaturen unter 100° auf diesem Krystalle beobachtete elektrische Vertheilung nicht die normale, sondern eine durch das Anwachsen

*) Vergl. diese Abhandl. Bd. XIII. S. 342.

des kleinen Krystalles wesentlich gestörte ist. Anstatt der bei normaler Vertheilung im klinodiagonalen Hauptschnitte liegenden vier Pole, welche abwechselnd positiv und negativ sind, erscheint die obere Seite *A* (Nr. 15 Taf. III.) fast überall negativ, die untere Seite B aber positiv. Die an den Enden der Orthodiagonale liegenden positiven Pole habe keine Störung erlitten.

In den beiden zuletzt genannten Polen am Ende der Orthodiagonale tritt nun bei höheren Temperaturen dieselbe Umkehrung ein, wie ich zuvor S. 594 für die Krystalle Nr. 10 und 11 angegeben habe; nach einer Erhitzung bis 210° werden diese Kanten erst negativ, und dann positiv.

Sehr eigenthümlich ist dagegen das Verhalten im klinodiagonalen Hauptschnitte. Nach einer Erhitzung bis 210° erscheint beim Erkalten auf der Fläche $0P$ der oberen Seite *A* und dem naheliegenden Theile von $\frac{1}{2}P\infty$ zuerst positive Spannung, die sehr lange anhält, und schliesslich in die negative übergeht. Auf der Kante von $\frac{1}{2}P\infty$ und $P\infty$ eben dieser Seite tritt negative Elektricität auf, ohne Umkehrung. Ebenso bleibt die auf der Fläche $0P$ der Seite *B* entstehende positive Spannung bis zu Ende der Abkühlung, während die auf der Kante ($\frac{1}{2}P\infty$, $P\infty$) eben dieser Seite zuerst auftretende negative Polarität gegen Ende der Abkühlung in die positive übergeht.

Die Fläche $0P$ auf der Seite *A* und die Kante ($\frac{1}{2}P\infty$, $P\infty$) auf der Seite *B*, wo eine Umkehrung der Polarität eintritt, sind aber gerade die Stellen, an welchen zu Ende der Abkühlung die Vertheilung eine anomale ist. Betrachten wir die Vertheilung in dem klinodiagonalen Hauptschnitte dieses Krystalles bei einer höheren Temperatur, z. B. von 130°, so ist dieselbe vollständig normal, die Pole auf beiden $0P$ sind positiv, die Pole auf den beiden Kanten ($\frac{1}{2}P\infty$, $P\infty$) negativ; beim weiteren Fortschreiten der Abkühlung wird durch die Umkehrung der Pole in dem oberen $0P$ und in der unteren Kante $\frac{1}{2}P\infty$, $P\infty$ die Vertheilung anomal.

Inhalt.

Druck von Breitkopf und Härtel.

Druck von Breitkopf & Härtel in Leipzig.

W. G. HANKEL,
MITGLIED DER KÖNIGL. SÄCHS. GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN

ELEKTRISCHE UNTERSUCHUNGEN.

SIEBZEHNTE ABHANDLUNG.

ÜBER DIE BEI EINIGEN GASENTWICKELUNGEN AUFTRETENDEN ELEKTRICITÄTEN.

Des XII. Bandes der Abhandlungen der mathematisch-physischen Classe der Königl. Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften

№ IX.

LEIPZIG
BEI S. HIRZEL.
1883.

ABHANDLUNGEN
DER
KÖNIGL. SÄCHS. GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN
ZU LEIPZIG.

MATHEMATISCH-PHYSISCHE CLASSE.

ERSTER BAND. (I. Bd.) *) Mit 3 Tafeln. hoch 4. 1852. brosch. Preis 13 M 60 Pf.

A. F. MÖBIUS, Ueber die Grundformen der Linien der dritten Ordnung. Mit 1 Tafel. 1849. 2 M 40 Pf.
P. A. HANSEN, Auflösung eines beliebigen Systems von linearischen Gleichungen. — Ueber die Entwickelung der Grösse $(1-2\alpha H+\alpha\alpha)^{-\frac{1}{2}}$ nach den Potenzen von α. 1849. 1 M 20 Pf.
A. SEEBECK. Ueber die Querschwingungen elastischer Stäbe. 1849. 1 M.
C. F. NAUMANN, Ueber die cyclocentrische Conchospirale und über das Windungsgesetz von Planorbis Corneus. 1849. 1 M.
W. WEBER, Elektrodynamische Maassbestimmungen (Widerstandsmessungen). 1851. 3 M.
F. REICH, Neue Versuche mit der Drehwaage. 1852. 2 M.
M. W. DROBISCH, Zusätze zum Florentiner Problem. Mit 1 Tafel. 1852. 1 M 60 Pf.
W. WEBER, Elektrodynamische Maassbestimmungen (Diamagnetismus). Mit 1 Tafel. 1852. 2 M.

ZWEITER BAND. (IV. Bd.) Mit 19 Tafeln. hoch 4. 1855. brosch. Preis 20 M.

M. W. DROBISCH, Ueber musikalische Tonbestimmung und Temperatur. 1852. 3 M.
W. HOFMEISTER, Beiträge zur Kenntniss der Gefässkryptogamen. Mit 18 Tafeln. 1852. 4 M.
P. A. HANSEN, Entwickelung des Products einer Potenz des Radius Vectors mit dem Sinus oder Cosinus eines Vielfachen der wahren Anomalie in Reihen, die nach den Sinussen oder Cosinussen der Vielfachen der wahren, excentrischen oder mittleren Anomalie fortschreiten. 1853. 3 M.
—— Entwickelung der negativen und ungraden Potenzen der Quadratwurzel der Function $r^2 + r'^2 - 2rr'(\cos U \cos U' + \sin U \sin U' \cos J)$. 1854. 3 M.
O. SCHLÖMILCH, Ueber die Bestimmung der Massen und der Trägheitsmomente symmetrischer Rotationskörper von ungleichförmiger Dichtigkeit. 1854. 80 Pf.
—— Ueber einige allgemeine Reihenentwickelungen und deren Anwendung auf die elliptischen Functionen. 1854. 1 M 60 Pf.
P. A. HANSEN, Die Theorie des Aequatoreals. 1855. 2 M 40 Pf.
C. F. NAUMANN, Ueber die Rationalität der Tangenten-Verhältnisse tautozonaler Krystallflächen. 1855. 1 M.
A. F. MÖBIUS, Die Theorie der Kreisverwandtschaft. 1855. 2 M.

DRITTER BAND. (V. Bd.) Mit 15 Tafeln. hoch 4. 1857. brosch. Preis 19 M 20 Pf.

M. W. DROBISCH, Nachträge zur Theorie der musik. Tonverhältnisse. 1855. 1 M 20 Pf.
P. A. HANSEN, Auseinandersetzung einer zweckmässigen Methode zur Berechnung der absoluten Störungen der kleinen Planeten. 1856. 5 M.
R. KOHLRAUSCH und W. WEBER, Elektrodynamische Maassbestimmungen, insbesondere Zurückführung der Stromintensitäts-Messungen auf mechanisches Maass. 1856. 1 M 60 Pf.
H. D'ARREST, Resultate aus Beobachtungen der Nebelflecken und Sternhaufen. Erste Reihe. 1856. 2 M 40 Pf.
W. G. HANKEL, Elektrische Untersuchungen. Erste Abhandlung: Ueber der Messung der atmosphärischen Elektricität nach absolutem Maasse. Mit 2 Tafeln. 1856. 6 M.
W. HOFMEISTER, Beiträge zur Kenntniss der Gefässkryptogamen. No. II. Mit 13 Tafeln. 1857. 4 M.

VIERTER BAND. (VI. Bd.) Mit 29 Tafeln. hoch 4. 1859. brosch. Preis 22 M 50 Pf.

P. A. HANSEN, Auseinandersetzung einer zweckmässigen Methode zur Berechnung der absoluten Störungen der kleinen Planeten. Zweite Abhandlung. 1857. 4 M.
W. G. HANKEL, Elektrische Untersuchungen. Zweite Abhandlung: Ueber die thermo-elektrischen Eigenschaften des Boracites. 1857. 2 M 40 Pf.
—— Elektrische Untersuchungen. Dritte Abhandlung: Ueber Elektricitätserregung zwischen Metallen und erhitzten Salzen. 1858. 1 M 60 Pf.
P. A. HANSEN, Theorie der Sonnenfinsternisse und verwandten Erscheinungen. Mit 2 Tafeln. 1858. 6 M.
G. T. FECHNER, Ueber ein wichtiges psychophysisches Grundgesetz und dessen Beziehung zur Schätzung der Sterngrössen. 1858. 2 M.
W. HOFMEISTER, Neue Beiträge zur Kenntniss der Embryobildung der Phanerogamen. I. Dikotyledonen mit ursprünglich einzelligem, nur durch Zellentheilung wachsendem Endosperm. Mit 27 Tafeln. 1859. 8 M.

FÜNFTER BAND. (VII. Bd.) Mit 30 Tafeln. hoch 4. 1861. brosch. Preis 24 M.

W. G. HANKEL, Elektrische Untersuchungen. Vierte Abhandlung: Ueber das Verhalten der Weingeistflamme in elektrischer Beziehung. 1859. 2 M.
P. A. HANSEN, Auseinandersetzung einer zweckmässigen Methode zur Berechnung der absoluten Störungen der kleinen Planeten. Dritte Abhandlung. 1859. 7 M 20 Pf.
G. T. FECHNER, Ueber einige Verhältnisse des binocularen Sehens. 1860. 5 M 60 Pf.
G. METTENIUS, Zwei Abhandlungen: I. Beiträge zur Anatomie der Cycadeen. Mit 5 Tafeln. II. Ueber Seitenknospen bei Farnen. 1860. 3 M.
W. HOFMEISTER, Neue Beiträge zur Kenntniss der Embryobildung der Phanerogamen. II. Monokotyledonen. Mit 25 Tafeln. 1861. 8 M.

SECHSTER BAND. (IX. Bd.) Mit 10 Tafeln. hoch 4. 1864. brosch. Preis 19 M 20 Pf.

W. G. HANKEL, Elektrische Untersuchungen. Fünfte Abhandlung: Maassbestimmungen der elektromotorischen Kräfte. Erster Theil. 1861. 1 M 60 Pf.
—— Messungen über die Absorption der chemischen Strahlen des Sonnenlichtes. 1862. 1 M 20 Pf.
P. A. HANSEN, Darlegung der theoretischen Berechnung der in den Mondtafeln angewandten Störungen. Erste Abhandlung. 1862. 9 M.
G. METTENIUS, Ueber den Bau von Angiopteris. Mit 10 Tafeln. 1863. 4 M 40 Pf.
W. WEBER, Elektrodynamische Maassbestimmungen, insbesondere über elektrische Schwingungen. 1864. 3 M.

---

*) Die eingeklammerten römischen die Ziffern geben Zahl des Bandes in der Reihenfolge der Abhandlungen beide Classen an.

ELEKTRISCHE UNTERSUCHUNGEN.

SIEBZEHNTE ABHANDLUNG.

ÜBER DIE BEI EINIGEN GASENTWICKELUNGEN AUFTRETENDEN ELEKTRICITÄTEN.

VON

W. G. HANKEL
MITGLIED DER KÖNIGL. SÄCHS. GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN.

Des XII. Bandes der Abhandlungen der mathematisch-physischen Classe der Königl. Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften

Nº IX.

LEIPZIG
BEI S. HIRZEL.
1883.

Vom Verfasser übergeben den 12. October 1883.
Der Abdruck vollendet den 10. November 1883.

ELEKTRISCHE UNTERSUCHUNGEN

VON

W. G. HANKEL.

SIEBZEHNTE ABHANDLUNG.

ÜBER DIE BEI EINIGEN GASENTWICKELUNGEN AUFTRETENDEN ELEKTRICITÄTEN.

In seinem im Jahre 1769 an Joh. Bapt. Beccaria gerichteten Briefe *de vi attractiva ignis electrici ac phaenomenis inde pendentibus**) schliesst sich Volta in Betreff der Entstehung der Elektricität durch Reibung den von Franklin aufgestellten Ansichten an. Wenn man Glas mittelst der Hand reibt, so wird nach Volta's Meinung die natürliche Anordnung der Theilchen desselben so geändert, dass die Anziehung zwischen dem Glase und dem elektrischen Fluidum sich vergrössert, und infolge dessen elektrisches Fluidum aus der Hand an das Glas übertritt. Nach dem Aufhören des Reibens stellt sich sehr rasch der frühere Zustand des Glases wieder her, und das überschüssige elektrische Fluidum beginnt auszufliessen. Umgekehrt tritt beim Reiben des Schwefels eine Verminderung jener Anziehung ein, so dass ein Verlust an elektrischem Fluidum entsteht; nach dem Aufhören des Reibens und dem rasch erfolgten Eintritte des normalen Zustandes ist der Schwefel bestrebt, das verlorene elektrische Fluidum wieder an sich zu ziehen.

Volta stellt dann die Frage auf, ob ausser der Reibung noch eine andere Ursache existire, welche die anziehenden Kräfte zwischen der Materie und dem elektrischen Fluidum vermehren oder vermindern könne, und glaubt eine solche in der Erschütterung der Theilchen durch den Stoss erkannt zu haben. Er fand nämlich eine Glasscheibe, welche er mittels eines hölzernen, mit Goldpapier überzogenen Hammers geschlagen hatte, elektrisch und zwar nicht blos an der getroffenen Stelle, sondern auch in deren Umgebung. Dies veranlasste ihn, die entstandene Elektricität den durch die Erschütterungen in der Lage der Glastheilchen hervorgerufenen Änderungen zuzuschreiben.

Im Anschluss hieran stellt Volta die weitere Frage auf, ob nicht bei Auflösungen, bei Mischungen von Flüssigkeiten, bei Gas-

---

*) *Collezione dell' opere del Cavaliere Conte Alessandro Volta.* Tom. I. Part. I. S. 20.

entwickelungen, bei Verbrennungen u. s. w., wobei doch grosse und mannigfache Veränderungen in der Lage der kleinsten Theilchen eintreten, das elektrische Fluidum ebenfalls in Mitleidenschaft gezogen und infolge dessen eine elektrische Spannung erzeugt werde. Seine damaligen Bemühungen eine solche aufzufinden, hatten zwar keinen Erfolg gehabt; jedoch zweifelte er nicht daran, dass genauere Versuche bei jenen Vorgängen elektrische Spannungen nachweisen würden.

Nach der Construction seines elektrischen Condensators kam Volta wieder auf die oben ausgesprochene Vermuthung zurück; darauf bezügliche Versuche wurden jedoch zuerst in Paris, auf einer im März und April 1782 dahin unternommenen Reise, im Verein mit de la Place und Lavoisier ausgeführt*). Die ersten über die Verdampfung des Wassers und des Äthers gemeinschaftlich gemachten Versuche ergaben keine Anzeichen von Elektricität mittelst des Condensators, und Volta glaubte das Ausbleiben derselben durch die Beschaffenheit der Luft und des Beobachtungszimmers erklären zu können. Dagegen erhielten de la Place und Lavoisier bei Wiederholung der Versuche auf einem Landgute des Letzteren deutliche Anzeichen von Elektricität beim Verdampfen des Wassers, bei der einfachen Verbrennung der Kohle und der Auflösung von Eisenfeilicht in verdünnter Schwefelsäure. Volta selbst hat dann später diese Versuche vielfach wiederholt.

Über eben diese Versuche berichten de la Place und Lavoisier in den Schriften der Pariser Akademie für das Jahr 1781. Sie bemerken im Eingange ihrer kurzen Notiz *sur l'électricité, qu'absorbent les corps, qui se reduisent en vapeurs*, dass sie, obgleich ihre Untersuchungen noch nicht abgeschlossen seien, doch glaubten, die bereits erhaltenen Resultate bekannt machen zu müssen, weil sie in Erfahrung gebracht, dass ihre Versuche eine gewisse Publicität erhalten hätten und andere Physiker sich mit demselben Gegenstande beschäftigten.

Am Schlusse ihres Aufsatzes**) heisst es: *M. de Volta a voulu*

*) Volta berichtet über diese Versuche in dem Anhange zum zweiten Theile seiner Abhandlung über den Condensator. *Collez.* Tom. I. Part. I. S. 270.

**) S. 294 des oben bezeichneten Bandes.

assister à nos dernières expériences, et nous y être utile; la présence et le témoignage de cet illustre physicien ne peuvent qu'inspirer de la confiance dans nos résultats.

Da Lavoisier und de la Place den Condensator anwandten, so konnten ihre mittelst dieses Instrumentes ausgeführten Versuche nicht ohne die Unterweisung Volta's*), also nicht vor dem April 1782 angestellt sein**).

Aus der vorstehenden Darlegung geht unzweifelhaft hervor, dass die Vermuthung, es könnte bei chemischen Processen und bei Zustandsänderungen Elektricität auftreten, zuerst von Volta ausgesprochen werden, und Volta behandelt später die Nachweisung der Elektricität bei Gasentwickelung und Verdampfung als seine Entdeckung***).

Obwohl die z. B. beim Auflösen des Eisens in verdünnter Schwefelsäure auftretende Elektricität mittelst des Condensators in den Versuchen von de la Place und Lavoisier so stark angehäuft werden konnte, dass die abgehobene Platte des Condensators Funken gab, und die von Volta, de la Place und Lavoisier angestellten Versuche in den Lehrbüchern erwähnt werden, so sind doch meines Wissens die elektrischen Vorgänge bei den Gasentwickelungen während des Verlaufs eines ganzen Jahrhunderts keiner genaueren Prüfung unterzogen worden. Jedenfalls war die Unempfindlichkeit der früheren Elektrometer, bei welchen stets die Zuziehung

*) Volta sagt auch in dem oben angeführten Berichte (S. 270): »*Eglino concepiron meco la speranza di un felice riuscimento, quando ebbi loro mostrato gli effetti del mio condensatore, e spiegata la ragione dei fenomeni: conseguentemente il Sig. Lavoisier ne ordinò un grande col piano di marmo bianco*«.

**) In dem auf das Jahr 1781 lautenden Bande der Schriften der Pariser Akademie findet sich S. 269 eine Abhandlung über die Zerlegung des Wassers von Meusnier und Lavoisier, welche am 21. April 1784 der Akademie vorgelegt wurde, so dass also aus der Jahreszahl 1781, welche dieser Band der Abhandlungen trägt, kein Schluss auf das Datum der obigen Versuche gemacht werden kann. Die Notiz über die obigen Versuche von Lavoisier und de la Place enthält keine Jahresangabe.

***) So sagt Volta im vierten seiner meteorologischen Briefe (*Collez.* Tom. I. Part II. S. 148): »*Fondandomi sulla scoperta, che feci fin del principio del 1782 dell' elettricità sempre in meno, che si manifesta negli apparecchi isolati, da cui, sia coll' ebullizione, sia coll' effervescenza od anche colla semplice combustione si fanno salire copiosi vapori*«.

eines Condensators nothwendig erschien, einer eingehenderen Untersuchung hinderlich. Vielleicht ist auch öfter diese Untersuchung in Angriff genommen, aber infolge der scheinbar völlig launenhaften Abwechselung in dem Erscheinen bald eines positiven, bald eines negativen, bald auch eines unelektrischen Zustandes wieder aufgegeben worden. Ich selbst wenigstens habe wiederholt diese Versuche begonnen, aber stets wegen des eben bezeichneten Wechsels in der Beschaffenheit der im Elektrometer beobachteten Spannungen abbrechen müssen, bis es mir endlich gelungen ist, mittelst besonderer Anordnungen die Bedingungen für das Auftreten der einen oder der andern Elektricität festzustellen.

Bevor ich aber zur Mittheilung der Resultate meiner Untersuchung über die bei gewissen Gasentwickelungen auftretenden Elektricitäten schreiten kann, muss ich einige Erläuterungen und Beobachtungen über den Einfluss der Ableitung zur Erde und der durch die Berührung der verschiedenen Leiter erzeugten elektrischen Spannungen vorausschicken.

I. Elektrometer.

Zur Wahrnehmung der bei den nachfolgend beschriebenen Gasentwickelungen entstehenden elektrischen Spannungen diente das von mir construirte Elektrometer. Die Empfindlichkeit desselben lässt sich sowohl durch Stellung der zu beiden Seiten des Goldblättchens befindlichen Messingscheiben, welche mit den Polen einer aus Zink-Kupfer-Wasser-Elementen bestehenden Säule verbunden sind, als auch durch die Änderung der Anzahl der Elemente in der eben erwähnten Säule beliebig vergrössern oder verringern. Gewöhnlich wurde das letzte Verfahren angewandt, da bei demselben das Elektrometer selbst nicht berührt zu werden brauchte. Dasselbe war nämlich ausser seinem eigentlichen Gehäuse, um die Einwirkung fremder Elektricitäten zu verhindern, ringsum von einer weiten Metallhülle umgeben, welche auf der Vorderseite eine Öffnung zum Durchtritt des Mikroskopkörpers und auf der Hinterseite eine schmale Öffnung zur Beleuchtung des Goldblättchens besass.

Um den elektrischen Zustand des Goldblättchens unabhängig von seiner Ruhelage prüfen zu können, waren die Pole der oben

bezeichneten Säule mit den Messingscheiben des Elektrometers durch einen Commutator, dessen mit Quecksilber gefüllte Eisennäpfchen auf Schellackstäben standen, verbunden. Durch Umlegen des Commutatorbügels wurde die Polarität in den Scheiben gewechselt, und das Goldblättchen zeigte eine Ablenkung nach der entgegengesetzten Seite. War die Spannung an den beiden Polen der in ihrer Mitte zur Erde abgeleiteten Säule so abgeglichen, dass das mit der Erde verbundene Goldblättchen beim Umlegen des Commutatorbügels seine Lage nicht änderte*), so gab bei dem durch Zuführung von Elektricität geladenen Goldblättchen die Hälfte des durch Umlegen des Bügels entstehenden Ausschlages ein Maass für die vorhandene Spannung.

Die zuvor ausgesprochene Bedingung, dass die Spannung in den beiden Polen so abgeglichen sei, dass das zur Erde abgeleitete Goldblättchen beim Umlegen des Commutators keinen Ausschlag zeigt, bedarf noch einer Erläuterung. Wenn in meinem Elektrometer das Goldblättchen genau in der Mitte der beiden Scheiben hängt, und diese Scheiben infolge ihrer Verbindung mit den Polen der Säule gleich grosse aber entgegengesetzte Spannungen besässen, so würde beim Umlegen des Commutators das Goldblättchen seine Lage nicht ändern, wenn dasselbe gänzlich unelektrisch wäre. Wird jedoch das Goldblättchen durch einen metallischen Leiter zur Erde abgeleitet, so ist es durchaus nicht unelektrisch, sondern behält eine den in der Ableitung liegenden Contactverhältnissen entsprechende elektrische Spannung; infolge dessen entsteht auch bei gleichen Abständen und bei gleich starker Ladung der Scheiben beim Umlegen des Commutators ein Ausschlag von bestimmter Grösse. Ich werde nachher zeigen, dass die infolge der Ableitung des Goldblättchens durch einen mit den Gasröhren des Hauses verbundenen Kupferdraht eintretende Spannung negativ ist.

Diese Änderung in der Lage des Goldblättchens beim Umlegen des Commutatorbügels lässt sich, wie ich schon früher nachgewiesen

*) Zeigt sich an dem zur Erde abgeleiteten Goldblättchen beim Umlegen des Commutatorbügels ein sehr geringer Ausschlag, und man hat vielleicht nicht Zeit, denselben durch Ein- oder Ausschalten von Elementen in der Säule zu beseitigen, so lässt man ihn bestehen, und zieht ihn bei der Auswerthung der elektrischen Spannungen in Rechnung.

habe*), beseitigen, wenn man die negative Hälfte der Säule so weit verstärkt, dass sie auf dem in der Mitte zwischen den Scheiben befindlichen Goldblättchen eine gerade so viel grössere positive Spannung gegenüber der von der positiven Scheibe hervorgerufenen negativen Vertheilung erzeugt, als die infolge der Ableitung zur Erde vorhandene negative Spannung beträgt. Durch das Zusammenwirken der vertheilenden Einflüsse beider Scheiben und der Ableitung zur Erde bleibt dann das Goldblättchen unelektrisch, wird also, trotzdem die negative Scheibe eine etwas grössere Spannung besitzt als die positive, nicht nach jener hinbewegt, und zwar ist es, weil beide Scheiben gleich weit vom Goldblättchen entfernt sind, gleichgültig, ob die eine oder die andere Scheibe mit dem etwas stärkeren negativen Pole verbunden ist.

Ich werde weiterhin zeigen, dass ein Kupferdraht, welcher an den eisernen Gasleitungsröhren des Hauses befestigt ist, sehr nahe eine Spannung — 0,11 besitzt, wenn ich die Spannung zwischen Zink und Kupfer = 1 setze. Wird nun dieser Kupferdraht metallisch mit dem Goldblättchen in Verbindung gebracht, so nimmt das Goldblättchen (als aus reinem Golde bestehend betrachtet) die Spannung — 0,21**) an.

Ist nun die Stärke der beiden Säulenpole so abgeglichen, dass durch die stärkere Wirkung der negativen Scheibe diese Spannung — 0,21 gerade aufgehoben wird, so zeigt das Goldblättchen beim Umlegen des Commutators keine Änderung in seiner Lage. Wird durch Zuführung von aussen die Spannung auf dem Goldblättchen geändert, so misst der beim Umlegen des Commutators entstehende Ausschlag die von — 0,21 eingetretene Änderung. Wir können also von der dem Goldblättchen infolge der Ableitung zur Erde ertheilten Spannung absehen, und die beim Umlegen des Commutatorbügels entstehenden Ausschläge als ein Maass für die dem Goldblättchen von aussen zugeführte Elektricität betrachten.

---

*) Diese Abh. Bd. IX. S. 7.

**) Die Spannung des Kupfers gegen Gold beträgt + 0,10. S. diese Abh. Bd. XI S. 600.

II. Elektrische Vorgänge bei von Metallen abfallenden Wassertropfen.

Ein ungefähr 80 Cubikcentimeter fassendes trichterförmiges Glasgefäss war unten in eine so feine Spitze ausgezogen, dass das in dasselbe eingegossene Wasser nur in Tropfen (je nach der Höhe des Wasserstandes 4 bis 8 Tropfen in der Secunde) ausfliessen konnte. Das Gefäss war isolirt aufgestellt, und die am unteren Ende sich bildenden Tropfen fielen in eine ebenfalls isolirte Platinschaale von 110^{mm} Durchmesser. In das Wasser dieses Glasgefässes konnten verschiedene Metalle eingetaucht, und dabei entweder zur Erde abgeleitet, oder durch einen isolirten Draht mit dem Goldblättchen des Elektrometers verbunden werden. Ebenso konnte die Platinschaale zur Erde abgeleitet oder durch den eben bezeichneten isolirten Draht mit dem Elektrometer verbunden werden.

Die späteren Versuche über die Entstehung von Elektricität bei Gasentwickelungen machten es nöthig, das trichterförmige Glasgefäss nebst der Platinschaale in einer seitwärts befindlichen, mit gutem Luftzuge versehenen Kapelle aufzustellen. Die Verbindung des Wassers im Glasgefässe oder der Platinschaale mit dem Goldblättchen des Elektrometers musste deshalb durch einen 2 Meter langen Kupferdraht hergestellt werden. Durch diesen langen Leiter wurde die Capacität des isolirten Theiles des Apparates sehr vermehrt und infolge dessen die Grösse der Ausschläge vermindert. Andererseits bot aber diese Einrichtung durch den Ausschluss äusserer störenden Einflüsse so viel Vortheil, dass ich sie auch bei den Versuchen mit dem tropfenden Wasser beibehielt; dazu kam noch, dass die mit dieser Leitung beobachteten Spannungen mit den bei den Gasentwickelungen gemessenen Werthen verglichen werden konnten.

a. Elektrisches Verhalten der abfallenden Tropfen.

Wird in das Wasser des trichterförmigen Glasgefässes ein Platindraht, welcher durch einen an den eisernen Gasleitungsröhren des Hauses befestigten Kupferdraht mit der Erde leitend verbunden ist, eingetaucht, so erhält infolge dieser Ableitung das Wasser eine elektrische Ladung. Die von dem unteren Ende des Gefässes ab-

fallenden Tropfen nehmen einen Theil dieser Elektricität mit und übertragen dieselbe an die isolirte, und mit dem Goldblättchen des Elektrometers verbundene Platinschaale. Da infolge der Ableitung zur Erde der elektrische Zustand des Wassers ungeändert bleibt, so muss die elektrische Ladung der Schaale und des Elektrometers mit der Anzahl der gefallenen Tropfen zunehmen.

Wie oben schon erwähnt und nachher speciell gezeigt werden soll, besitzt der mit den Gasröhren des Hauses verbundene Kupferdraht eine Spannung von nahe — 0,11, wenn die Spannung zwischen Zink und Kupfer = + 1 gesetzt wird. Das mit dem Kupfer verbundene Platin erhält dann eine Spannung — 0,34 *), und das Wasser, in welches dasselbe eintaucht, — 0,45. Jeder von dem unteren Ende des Trichters abfallende Tropfen nimmt eine von dieser Spannung abhängige Elektricitätsmenge mit. Als nun bei der beschriebenen Anordnung die Tropfen während 2 Minuten in die Schaale gefallen waren, gab das Elektrometer bei einer bestimmten Empfindlichkeit einen Ausschlag von — 2,5 Skth., der bei weiterer Fortsetzung des Versuches selbstverständlich sich vergrösserte.

Wenn anstatt des Platindrahtes ein blankes Kupferstück in das Wasser des Trichters eingetaucht wird, so muss das Wasser die Spannung — 0,11 + (— 0,08) = — 0,19 zeigen. Bei einem solchen Versuche betrug die Ladung der Platinschaale, nachdem die Tropfen während 2 Minuten in dieselbe gefallen waren, — 1,7 Skth. Dieselbe war also geringer, als unter gleichlanger Dauer des Tropfens bei dem Platin.

Taucht ein mit dem Kupferdraht verbundenes blankes gehärtetes

*) Die elektrischen Spannungen, welche durch Berührung der Metalle mit anderen Metallen und mit destillirtem Wasser entstehen, sind meinen im XI. Bd. dieser Abhandlungen befindlichen Maassbestimmungen der elektromotorischen Kräfte entnommen. Ich stelle die im Texte vorkommenden Spannungen hier zusammen: Zink-Kupfer = + 1,00, Eisen-Kupfer = + 0,16, Kupfer-Platin = + 0,23. Das Wasser ist zehn Minuten nach dem Eintauchen gegen diese Metalle negativ; diese Spannung ändert sich etwas mit der Zeit, und es ist im Mittel dieselbe angenommen für Kupfer-Wasser = + 0,08, für Platin-Wasser = + 0,11, für Zink-Wasser = + 0,20 und für Eisen(Stahl)-Wasser = + 0,02. Es wurden meistens die zu den früheren Messungen benutzten Metallstücke angewandt, und überhaupt die Verhältnisse den bei jenen früheren Beobachtungen obwaltenden möglichst gleich gemacht.

Stahlstäbchen in das Wasser des Trichtergefässes, so erhält der Stahl die Spannung — 0,11 + 0,16 = + 0,05, und das Wasser die Spannung + 0,05 — 0,02 = + 0,03. Bei dieser Anordnung erschien die Platinschaale, nachdem während 2 Minuten die Wassertropfen in dieselbe gefallen waren, entweder unelektrisch oder in sehr geringem Grade positiv.

Wenn endlich ein mit dem Kupferdrahte verbundenes blankes Zinkstück in das Wasser getaucht wird, so nimmt das Zink die Spannung — 0,11 + 1,00 = + 0,89, und das Wasser im Gefässe die Spannung + 0,89 — 0,20, = + 0,69 an. Als die Tropfen während 2 Minuten gefallen waren, gab die Schale einen Ausschlag von + 6,4 Skth.

b. Elektrisches Verhalten der Leitung vom Wasser des Glassgefässes zum Elektrometer.

Im Vorhergehenden sind bereits die Spannungen berechnet worden, welche das im Trichter befindliche Wasser durch Berührung mit dem in ihm eingetauchten und zur Erde abgeleiteten Metall annimmt. Wird nun dieses Metall durch eine isolirte Drahtleitung mit dem Elektrometer verbunden, und diese Leitung zuerst durch Anlegen des mit den Gasröhren des Hauses zusammenhängenden Kupferdrahtes abgeleitet und darauf isolirt, so wird die in dem Wasser zufolge der zuvor bestandenen Ableitung angehäufte Elektricität durch die abfallenden Tropfen allmählig immer geringer werden; nach dem Abfallen unendlich vieler Tropfen würde das Wasser gänzlich unelektrisch werden. Sobald aber bei einem isolirten Systeme zusammenhängender Leiter der absolute Werth der Spannung an irgend einer Stelle geändert wird, so erleiden alle Punkte desselben die gleiche Änderung in ihrer Spannung; dagegen müssen die Unterschiede zwischen den einzelnen Theilen der Leitung bestehen bleiben. Wenn nun ein blankes Platinstäbchen in das Wasser des Trichters taucht, so erhält, wie oben gezeigt, das Wasser durch die Ableitung die Spannung — 0,45 (S. 606), die nach dem Isoliren fortbesteht. Das Goldblättchen des Elektrometers hat dabei die Spannung — 0,21; diese letztere erzeugt aber bei der getroffenen Einrichtung (S. 604) beim Umlegen des Commutatorbügels keinen Ausschlag. Verliert dann das Wasser im Gefässe durch die abfallenden Tropfen seine

elektrische Spannung von — 0,45, so muss die Spannung im Goldblättchen sich um + 0,45 ändern; sie beträgt also + 0,24. Beim Umlegen des Commutatorbügels wird aber nicht diese Spannung, sondern die von — 0,21 eingetretene Änderung, mithin die Spannung + 0,45, um welche das Wasser seinen Zustand geändert hat, gemessen. Bei solchen Versuchen zeigte das Goldblättchen, wenn die Tropfen während 2 Minuten gefallen waren, einen Ausschlag von + 2,5 bis + 3,6 Skth.*). Bei längerer Fortdauer des Tropfens steigt derselbe noch etwas höher, da in der Zeit von 2 Minuten das Wasser noch nicht vollständig entladen sein kann.

Wurde der vorstehende Versuch in der Weise abgeändert, dass anstatt des Platins ein blankes Kupferstäbchen in das Wasser tauchte, wodurch letzteres eine Spannung — 0,19 erhielt, so betrug nach 2 Minuten der Ausschlag im Elektrometer + 1,2 Skth.

Dagegen zeigte das Goldblättchen keinen merklichen Ausschlag, wenn ein blankes Stahlstäbchen in das Wasser eintauchte. Die elektrische Spannung des Wassers betrug in diesem Falle nach S. 607 auch nur + 0,03.

Wurde endlich bei gleicher Anordnung ein blankes Zinkstück in as Wasser getaucht, wodurch das letztere eine Spannung + 0,69 annahm, so zeigte nach 2 Minuten das Goldblättchen einen Ausschlag von — 3,7 bis — 4,5 Skth. Nahe ebenso verhielt sich gut amalgamirtes Zink.

Aus den vorstehenden Beobachtungen lässt sich nun ein angenäherter Werth für die elektrische Spannung auf dem mittelst der Gasröhren des Hauses abgeleiteten Kupferdrahte berechnen. Eine völlig genaue Bestimmung ist nicht zu erwarten, weil die Anzahl der in 2 Minuten fallenden Tropfen etwas schwankt und weil auch die Spannung zwischen dem Wasser und manchen Metallen sich mit der Zeit etwas ändert. Die vorstehenden Messungen sind 4 bis 20 Minuten nach dem Eintauchen der blankgeputzten Metalle ausgeführt.

In dem Zeitraume von 2 Minuten ist nun allerdings das Wasser des Trichters nicht völlig entladen. Nehmen wir aber an, dass

*) Je nach der Anzahl der in einer Secunde fallenden Tropfen, die vornehmlich durch den Stand des Wassers im Trichter bedingt ist, werden die innerhalb eines Zeitraumes von 2 Minuten entstehenden Ausschläge etwas variiren.

während desselben bei den verschiedenen Versuchen gleichviel und gleichgestaltete Tropfen gefallen sind, so wird sich die Ladung des Wassers stets in demselben Verhältnisse verringert haben, und die oben gegebenen Ausschläge des Elektrometers können als Maass für die im Wasser anfangs vorhandene elektrische Spannung dienen.

Oben war für das Wasser, wenn Platin eintaucht, eine Spannung — 0,45 und wenn Zink eintaucht, eine Spannung + 0,69 berechnet worden; der Unterschied beider Spannungen ist 1,14. Im Mittel betrug nun bei den vorstehenden Versuchen der Ausschlag des Elektrometers, wenn Platin in das Wasser tauchte, + 3 Skth., und wenn Zink eintauchte, — 4 Skth. Ein Ausschlag von 7 Skth. entspricht also einer Spannung von 1,14.

Da die Spannung des Wassers gegen Kupfer längere Zeit nach dem Eintauchen sich fast constant erhält, so werde ich zur Bestimmung der durch die Ableitung zur Erde erzeugten Spannung die Versuche mit Kupfer zu Grunde legen. Im Mittel betrug der Ausschlag des Elektrometers, wenn Kupfer in das Wasser tauchte, + 1,2 Skth. Die Spannung des Wassers, welche infolge des Abtropfens den Ausschlag + 1,2 hervorbrachte, ergibt sich hieraus = 0,19, und zwar ist dieselbe negativ, weil durch ihr Verschwinden das Elektrometer positiv geladen wird. Beträgt nun die Spannung des durch Kupfer zur Erde abgeleiteten Wassers — 0,19, so muss sie auf dem Kupfer selbst = — 0,11 sein. Dies ist also der Werth, welcher oben für die dem Kupfer durch die Ableitung mittelst der Gasröhren ertheilte elektrische Spannung angenommen wurde. Mit ihm erhält man dann, wie zuvor berechnet, für die Spannung des Wassers beim Eintauchen des Platins — 0,45, des Kupfers — 0,19, des Stahles + 0,03 und des Zinkes + 0,69.

Geht man von dem beim Eintauchen des Kupfers beobachteten Ausschlage + 0,12 aus, so erhält man aus den angegebenen Spannungen durch Rechnung die folgenden Ausschläge des Elektrometers:

Beim Eintauchen des	berechnet	beobachtet
Platins	+ 2,8	+ 2,5 bis + 3,6
Kupfers	+ 1,2	+ 1,2
Stahles	— 0,2	0
Zinkes	— 4,3	— 3,7 bis — 4,5.

Sonach kann also für die auf dem Kupfer infolge der Ableitung durch die Gasröhren entstehende Spannung — 0,11 als angenäherter Werth betrachtet werden.

Bei den in diesem Abschnitte beschriebenen Versuchen, wobei die Leitung vom Wasser im Trichter zum Elektrometer isolirt war, zeigte das Elektrometer zwar stets die entgegengesetzten Ausschläge, als bei den im vorhergehenden mitgetheilten, wo die Platinschaale mit dem Elektrometer verbunden war; indess können die in den entsprechenden Versuchen erhaltenen Zahlenwerthe nicht gleich sein. Erstens waren die Oberflächen, über welche sich in den beiden Anordnungen die Elektricität verbreitete, nicht gleich gross, und zweitens behielt, wenn die elektrische Spannung der Platinschaale beobachtet wurde, das Wasser im Trichter stets dieselbe Spannung, weil das in dasselbe eintauchende Metall fortdauernd mit der Erde in Verbindung stand, während, wenn die Spannung auf der vom Trichter nach dem Elektrometer führenden Leitung gemessen werden sollte, der Trichter und diese Leitung isolirt waren, und die anfangs vorhandene Spannung des Wassers sich durch die Fortführung der auf den fallenden Tropfen angehäuften Elektricität immer mehr und mehr verminderte.

Die vorstehenden Versuche wurden bei einer Anordnung, welche mit der später bei den Gasentwickelungen benutzten übereinstimmte, wiederholt. Es wurde unterhalb der Spitze des isolirten trichterförmigen Gefässes ein blanker Metallstreifen in einer unter 45° gegen den Horizont geneigten Lage so aufgestellt, dass die aus der Spitze des Trichters herabfallenden Wassertropfen in der Nähe des oberen Endes des Metallstreifens auftrafen. Die Tropfen flossen dann über das Metallblech hinab, und sammelten sich am unteren Ende zu mehr oder weniger grossen Tropfen, welche in die unterhalb stehende Platinschaale fielen. Es konnten nun der Metallstreifen und die Platinschaale isolirt gehalten, und einzeln oder zusammen mit dem Goldblättchen des Elektrometers oder mit der Erde verbunden werden.

Fielen die Wassertropfen auf eine isolirte Platinplatte, welche mit dem Elektrometer verbunden und zuvor mit dem kupfernen Leitungsdrahte berührt war, so entstand im Elektrometer eine positive Ladung, während die unterhalb stehende Platinschaale negative

Spannung erhielt. Wurde an den Ort des Platins ein Zinkstreifen gestellt, so ertheilte der isolirte Metallstreifen dem Elektrometer negative, dagegen die isolirte Platinschaale, in welcher die vom Zinke abfallenden Tropfen sich sammelten, positive Spannung.

Dieselben Spannungen, und auch nahe in gleicher Grösse, traten auf, als anstatt eines gewöhnlichen blanken Zinkstückes ein gut amalgamirtes Stück Zink angewandt wurde. Eben dasselbe fand statt, wenn bei gut amalgamirtem Zinke verdünnte Schwefelsäure anstatt des Wassers in das trichterförmige Gefäss gegossen wurde.

III. Elektrische Vorgänge bei der Entwickelung des Wasserstoffgases aus Zink und Schwefelsäure.

Lavoisier und de la Place übergossen Eisenfeilicht mit einer ungefähr durch drei Theile Wasser verdünnten Schwefelsäure in einem Gefässe, welches mit der Platte eines Condensators verbunden war, und erhielten in einigen Minuten eine so starke Ladung des Condensators, dass die aufgehobene Platte Funken gab*). Sie fanden die Elektricität des Gefässes negativ.

Volta beobachtete bei einer ähnlichen heftigen Wasserstoffentwickelung**), indem er auf ein Gemenge aus Eisenfeilicht und Wasser Vitriolöl goss, so starke Elektrisirung des Gefässes, dass er sie unmittelbar mittelst des Strohhalmelektrometers wahrnehmen und als negativ bestimmen konnte.

Das Auftreten der negativen Elektricität in dem zur Auflösung des Eisens dienenden Gefässe stimmte mit den Ansichten, welche sich Volta über die Vorgänge bei der Verdampfung und Gasentwickelung gebildet hatte, sehr gut überein. So wie zu der Überführung einer Flüssigkeit in Dampfform eine gewisse Wärmemenge verbraucht wird, so sollte seiner Ansicht***) nach bei diesem Vorgange auch ein Verbrauch von elektrischem Fluidum eintreten; die Capacität der Gase für Elektricität sollte grösser sein als die der Flüssigkeit, aus welcher sie entstehen; sie entzögen daher bei ihrer

*) *Histoire de l'Acad. royale des Sciences. Année* 1781. S. 293.
**) *Collez.* I. 1. S. 273.
***) Ebend. S. 275.

Bildung der Flüssigkeit und dem Gefässe elektrisches Fluidum, und liessen das letztere in negativem Zustande zurück.

Bei seinen ersten Versuchen über die bei der Wasserstoffentwickelung auftretende Elektricität hatte Volta das Gefäss stets negativ gefunden. Als er aber später die Versuche wiederholte und abänderte, beobachtete er 1789, dass das Gefäss, aus welchem der Wasserstoff aufstieg, besonders bei Auflösung des Zinkes in verdünnter Schwefelsäure, auch zuweilen eine positive Spannung zeigte*). Er meint, dieser Umstand liesse sich vielleicht erklären, wenn man annehme, dass durch die vor sich gehende Zersetzung und die eintretenden Verbindungen neues elektrisches Fluidum erzeugt oder auch nur entwickelt werde. Reiche dieses entstehende Quantum elektrischen Fluidums gerade hin, um das von dem gebildeten Gase aus dem Gefässe hinweggenommene zu ersetzen, so erscheine das Gefäss unelektrisch; betrage die Menge des neu erzeugten oder entwickelten Fluidums aber mehr, so werde das Gefäss positiv; sei sie geringer, so zeige das Gefäss noch eine negative Ladung. Eine specielle Untersuchung, unter welchen Umständen das Gefäss negativ oder unelektrisch oder positiv wird, hat Volta aber nicht unternommen.

In den nachfolgenden Versuchen werde ich nun die Bedingungen aufstellen, unter welchen bei der Wasserstoffentwickelung diese verschiedenen Elektrisirungen eintreten.

Volta hat bei seinen Beobachtungen, mit wenigen Ausnahmen, den Condensator zu Hülfe genommen. Im Grunde ist die Hinzufügung dieses Instrumentes eine überflüssige. Es handelt sich bei diesen Versuchen um ein bestimmtes, begrenztes Quantum erzeugter Elektricität, und der Condensator kann dasselbe durch seine Einschaltung bei gewöhnlicher Verwendung nicht vermehren. Wenn die Isolation vollkommen und die Ausstrahlung der Leiter vermieden ist, so vergrössert der Condensator die Oberfläche, über welche sich die Elektricität verbreitet, und vermindert infolge dessen sogar die Spannung. Wenn dagegen die Isolirung mangelhaft und viel Gelegenheit zur Ausstrahlung gegeben ist, so bringt der Condensator durch den Umstand Vortheil, dass, so lange seine Platten aufeinander

*) Zusatz zu dem 7. Briefe über Meteorologie. *Collez.* I. 2. S. 275.

liegen, die Spannung an den freien Oberflächen der Leiter nur sehr gering ist, und daher weniger Verlust durch mangelhafte Isolirung und durch Ausstrahlung entsteht. Vielleicht kann er auch dadurch günstig wirken, dass, weil die elektrische Spannung in der Flüssigkeit, aus und von welcher die Gasblasen aufsteigen, vermindert wird, sich die Ausgleichung der von den Gasblasen aufgenommenen Elektricität mit der entgegengesetzten der Flüssigkeit verringert.

A. Schwefelsäure fällt in Tropfen auf einen ungefähr unter 45° gegen den Horizont geneigten Zinkstreifen.

Wenn in einem Gefässe Zinkstücke mit verdünnter Schwefelsäure übergossen werden, so tritt am Gefässe je nach der Beschaffenheit des Zinkes und der Säure entweder zuerst eine negative Elektricität auf, die nach einiger Zeit in eine positive übergeht, oder es zeigt das Gefäss auch gleich im Anfange eine positive Ladung. Bei Ausführung solcher Versuche kommt man indess sehr bald zu der Überzeugung, dass es bei diesem Verfahren nicht möglich ist, zu einem Verständniss der Vorgänge zu gelangen. Es war daher nöthig, einen anderen Weg einzuschlagen, welcher es ermöglichte, die Bedingungen für den Angriff der Säure stets in nahe gleicher Weise herzustellen. Ich wählte dazu die schon oben S. 610 beschriebene Einrichtung.

Unterhalb des S. 605 erwähnten trichterförmigen Glasgefässes, in welches die Säure gegossen wurde, stand ein ungefähr unter 45° gegen den Horizont geneigter Zinkstreifen. In der Nähe des oberen Endes fielen die Säuretropfen auf diesen Streifen, flossen über ihn hinab und sammelten sich am unteren Ende zu etwas grösseren Tropfen, welche dann in die unterhalb befindliche Platinschaale (S. 610) fielen. Der Zinkstreifen und die Platinschaale konnten, ebenso wie bei den Versuchen mit dem tropfenden Wasser, isolirt gehalten und dabei einzeln oder zusammen mit dem Goldblättchen des Elektrometers verbunden, oder zur Erde abgeleitet werden.

In dem vorhergehenden Abschnitte sind die elektrischen Spannungen, welche die Metallstücke und die Platinschaale durch die fallenden Tropfen in einem Zeitraume von zwei Minuten annahmen, in Skalentheilen des Ocularmikrometers angegeben worden. Um die

weiterhin mitzutheilenden Zahlenwerthe von der zufälligen Beschaffenheit des Elektrometers unabhängig zu machen, werde ich jedoch im Folgenden die elektrischen Spannungen stets in Theilen der an dem einen Pole eines Daniell'schen Elementes, dessen anderer Pol zur Erde abgeleitet ist, vorhandenen Spannung ausdrücken. Eine elektrische Spannung 3 z. B. bezeichnet also einen solchen Ausschlag im Elektrometer, wie derselbe entsteht, wenn der eine Pol von drei zu einer Säule verbundenen Daniell'schen Elementen mit dem Goldblättchen des Elektrometers verbunden wird, während der andere Pol zur Erde abgeleitet ist.

Ich werde zuerst eine Reihe von Versuchen über die bei Anwendung von Schwefelsäure in verschiedenen Concentrationsgraden erzeugten elektrischen Spannungen zusammenstellen und dabei nur einzelne Thatsachen hervorheben, um dann später nähere Erörterungen anzuschliessen.

a. *Beobachtungen.*

1. Schwefelsäure, mit dem 64fachen Volumen Wasser gemischt.

Zum Verständniss der nachstehend mitgetheilten Versuchsreihen sende ich die folgenden Bemerkungen voraus, und zwar will ich mich dabei speciell an die erste Versuchsreihe anschliessen.

Eine blankgeschabte Zinkplatte stand unterhalb des Trichters; die auf sie treffenden Tropfen der Säure fielen von ihrem unteren Rande in die unterhalb stehende Platinschaale.

Es wurde nun zuerst das Zink isolirt und mit dem Elektrometer verbunden, während die Platinschaale zur Erde abgeleitet war. Nach 2 Minuten zeigte das Elektrometer die Spannung — 0,73. Darauf wurde durch Umlegen des Bügels eines Commutators die Platinschaale isolirt und mit dem Elektrometer verbunden, das Zink aber zur Erde abgeleitet; nach 2 Minuten gab das Elektrometer die Spannung + 0,20 an. Nach dem Entladen des Elektrometers wurde dieselbe Beobachtung wiederholt, und nach 2 Minuten hatte das Elektrometer eine Ladung + 0,12 angenommen. Durch Zurückführen des Commutators in die erste Lage wurde jetzt wieder das Zink isolirt, und die Platinschaale abgeleitet; nach Verlauf von 2 Minuten zeigte das Elektrometer die Spannung — 1,50 u. s. w. Der Zeitraum

von einer Messung zur folgenden betrug 3 Minuten; eine Minute wurde zur Ausführung des Wechsels der Verbindungen und Entladung des Elektrometers benutzt; mit dem Ende derselben wurde das Zink oder resp. die Platinschaale isolirt, und nach Verlauf von 2 Minuten die elektrische Spannung gemessen*). *Z* bedeutet den Zinkstreifen, *S* die Platinschaale und *E* das Elektrometer.

Isolirt und mit *E* verbunden.	Zur Erde abgeleitet.	In 2 Minuten angesammelte Spannungen.	
Z	*S*	— 0,73	
S	*Z*		+ 0,20
S	*Z*		+ 0,12
Z	*S*	— 1,50	
S	*Z*		— 0,02
Z	*S*	— 1,10	
S	*Z*		— 0,30
Z	*S*	— 0,50	
S	*Z*		— 0,51
Z	*S*	— 0,32	
S	*Z*		— 0.88
Z	*S*	— 0,11	

Bei Anwendung eines anderen ebenfalls blankgeschabten Zinkstückes wurden bei gleichem Verfahren die folgenden elektrischen Spannungen beobachtet:

Isolirt und mit *E* verbunden.	Zur Erde abgeleitet.	In 2 Minuten angesammelte Spannungen.	
S	*Z*		+ 0,28
Z	*S*	— 1,67	
S	*Z*		+ 0,23
Z	*S*	— 2,06	
S	*Z*		— 0.06
S	*Z*		— 0.49
Z	*S*	— 1,74	
S	*Z*		— 0,59
Z	*S*	— 1,00	
S	*Z*		— 0,60
Z	*S*	— 0,51	
S	*Z*		— 0,70
Z	*S*	— 0.50	

*) Um den Verlauf der Elektricitätserregung genauer zu verfolgen, wurden die Ausschläge des Elektrometers nach je einer halben Minute beobachtet und

Die Spannung des Zinkes ist hiernach negativ, erreicht 9 bis 12 Minuten nach dem Beginnen des Tropfens ein Maximum, und nimmt dann allmählig ab. Die elektrische Spannung der Platinschaale erscheint anfangs schwach positiv; diese positive Spannung nimmt ab und geht bald (innerhalb 9 Minuten vom Beginnen des Tropfens) in die negative über, welche letztere dann allmählig in ihrer Stärke anwächst.

Als anstatt eines blankgeschabten Zinkes ein Streifen angewandt wurde, dessen Oberfläche in dem Zustande belassen worden, wie sie sich an dem käuflichen dicken Zinkbleche findet, wurden folgende elektrische Spannungen beobachtet:

Isolirt und mit *E* verbunden.	Zur Erde abgeleitet.	In 2 Minuten angesammelte Spannungen.	
S	*Z*		+ 0,22
Z	*S*	— 0,62	
S	*Z*		+ 0,12
Z	*S*	— 1,20	
S	*Z*		— 0,05
Z	*S*	— 1,72	
S	*Z*		— 0,25
Z	*S*	— 2,10	

nach einer Zwischenzeit von 40 Minuten, während welcher die Tropfen der Säure unausgesetzt gefallen waren:

Isolirt und mit *E* verbunden.	Zur Erde abgeleitet.	In 2 Minuten angesammelte Spannungen.	
Z	*S*	— 1,80	
S	*Z*		— 1,82.

Da die Oberfläche, wie sie an dem käuflichen Zinkbleche sich findet, anfangs weniger von der verdünnten Säure angegriffen wird, als eine blank geschabte Oberfläche, so tritt in diesem Versuche das Maximum der negativen Spannung auf dem Zinkstreifen erst nach Verlauf eines längeren Zeitraumes auf.

Der Apparat, wie er zu dem eben beschriebenen Versuche gedient hatte, blieb unangerührt bis zum folgenden Tage stehen. Es

aufgezeichnet; es konnte dies ohne Störung durch Umlegen des unterhalb des Elektrometers befindlichen Commutators geschehen. Der Kürze wegen gebe ich im Obigen nur die am Ende von 2 Minuten angesammelten elektrischen Spannungen.

wurde dann erst destillirtes Wasser in den Trichter gegossen, um die Zinkfläche etwas abzuspülen, und nachdem dies ausgeflossen, die verdünnte Schwefelsäure eingefüllt. Jetzt trat, wie die folgenden Beobachtungen zeigen, gleich anfangs eine starke negative Spannung am Zink auf, die dann allmählig abnahm; die Platinschaale ist gleich anfangs negativ.

Isolirt und mit *E* verbunden.	Zur Erde abgeleitet.	In 2 Minuten angesammelte Spannungen.
Z	*S*	— 2,01
S	*Z*	— 1,02
Z	*S*	— 1,55
S	*Z*	— 1,39
Z	*S*	— 1,16
S	*Z*	— 1,66
Z	*S*	— 0,86

2) Schwefelsäure, mit dem 32fachen Volumen Wasser vermischt.

Ein bereits dem Angriffe der Schwefelsäure ausgesetzt gewesener Zinkstreifen wurde nur mittelst eines Schwammes in Wasser abgewaschen und dann unterhalb des Trichters aufgestellt.

Isolirt und mit *E* verbunden.	Zur Erde abgeleitet.	In 2 Minuten angesammelte Spannungen.
Z	*S*	— 3,55
S	*Z*	— 2,47
Z	*S*	— 2,30
S	*Z*	— 2,50
Z	*S*	— 1,12
S	*Z*	— 4,75
Z	*S*	— 0,36
S	*Z*	— 5,04
Z	*S*	+ 0,70
S	*Z*	— 6,69
Z	*S*	+ 0,75
S	*Z*	— 6,94

Wie bei dem nächst vorhergehenden Versuche, wo das Zink zuvor ebenfalls dem Angriffe der Schwefelsäure ausgesetzt gewesen, tritt in dem vorliegenden gleich zu Anfange auf dem Zinke starke negative Spannung auf. Dieselbe verringert sich allmählig und geht zuletzt in eine schwache positive über. Die Platinschaale erhält

gleich anfangs eine erhebliche negative Spannung, die allmählig stark wächst.

3. Schwefelsäure, mit dem 16fachen Volumen Wasser gemischt.

Ein blank geschabter Zinkstreifen stand unterhalb des Trichters.

Isolirt und mit *E* verbunden.	Zur Erde abgeleitet.	In 2 Minuten angesammelte Spannungen.	
Z	*S*	— 1,55	
S	*Z*		— 1,54
Z	*S*	— 0,19	
S	*Z*		— 3,77
Z	*S*	+ 0,85	
S	*Z*		— 3,98
Z	*S*	+ 1,46	
S	*Z*		— 5,50
Z	*S*	+ 1,44	
S	*Z*		— 5,62

Bei Anwendung dieser stärkern Säure tritt am Zinke der Übergang des negativen Zustandes in den positiven früher ein, als in dem vorhergehenden Versuche.

4. Schwefelsäure, mit dem 8fachen Volumen Wasser gemischt.

Es stand ebenfalls ein blank geschabter Zinkstreifen unterhalb des Trichters.

Isolirt und mit *E* verbunden.	Zur Erde abgeleitet.	In 2 Minuten angesammelte Spannungen.	
Z	*S*	— 2,35	
S	*Z*		— 3,00
Z	*S*	+ 0,59	
S	*Z*		— 3,48
Z	*S*	+ 0,35*)	
S	*Z*		— 2,06
Z	*S*	— 0,25	
S	*Z*		— 1,03

In diesem Versuche tritt am Zinke der Übergang des negativen Zustandes in den positiven noch früher ein, als in dem vorhergehenden. Als nach etwa 12 Minuten seit dem Beginnen des Tropfens auf der Zinkfläche ein blasiger Schaum sich zu bilden begann, nahm

*) Auf der Zinkfläche hatte sich Schaum gebildet.

auf dem Zinke die positive und in der Platinschaale die negative Spannung ab; beim Zinke ging die positive Spannung sogar wieder in eine schwache negative über.

4. Schwefelsäure, mit dem 4fachen Volumen Wasser gemischt.

Das unterhalb des Trichters stehende Zink war blank geschabt.

Isolirt und mit *E* verbunden.	Zur Erde abgeleitet.	In 2 Minuten angesammelte Spannungen.
Z	*S*	— 0,81
Z	*S*	+ 2,05
Z	*S*	+ 0,78
S	*Z*	— 4,18
Z	*S*	— 0,73
S	*Z*	— 5,57
Z	*S*	+ 0,73
S	*Z*	— 4,00
Z	*S*	+ 0,28
S	*Z*	— 2,68
Z	*S*	— 0,43

Durch den Angriff dieser starken Säure geht das Zink sehr bald in den positiven Zustand über, und erreicht schon vor Ablauf von 6 Minuten eine hohe positive Spannung, welche dann infolge des auf seiner Oberfläche sich bildenden Schaumes sofort wieder abnimmt und aus dem Positiven ins Negative schwankt. In dem am unteren Ende des Zinkstreifens sich anhängenden Schaume liegt auch der Grund für die Abnahme der negativen Spannung der Platinschaale.

In den vorstehenden Versuchsreihen ist gewöhnlich abwechselnd das Zink oder die Platinschaale isolirt und mit dem Elektrometer verbunden, andrerseits aber die Platinschaale oder das Zink zur Erde abgeleitet worden. Die beiden hiedurch geschaffenen Zustände bilden jedoch keineswegs einen Gegensatz zu einander. Wenn nämlich das Zink isolirt mit dem Elektrometer verbunden war, so hatte die Ableitung der Platinschaale nur den Zweck, unterhalb des Zinkes jede Anhäufung von Elektricität zu verhüten. Die dabei im Elektrometer beobachteten Ausschläge rührten zu einem geringen Theile von den Berührungen der verschiedenen Leiter, vorzugsweise aber von der Entwickelung des Wasserstoffs auf der Seitenfläche und dem unteren

Ende des Zinkstreifens und von dem Abfalle der Tropfen her. War dagegen die Platinschaale isolirt mit dem Elektrometer verbunden, und das Zink zur Erde abgeleitet, so blieb auf dem Zinke blos die infolge der dauernden Ableitung vorhandene elektrische Spannung zurück, so dass die Elektricität der von ihm abfallenden und in der Platinschaale angesammelten Tropfen nur durch die Contactverhältnisse und dem am unteren Ende, sowie in der Nähe desselben auftretenden chemischen Vorgang erzeugt wurde.

b. *Zusammenstellung der Vorgänge, welche bei den vorhergehenden Versuchen auf die Erzeugung von Elektricität und ihre Zu- und Abnahme von Einfluss sind.*

Die eigenthümlichen Zu- und Abnahmen in der Stärke der in den vorstehenden Versuchen beobachteten elektrischen Spannungen sowie die Umkehrungen der einen Polarität in die andere zeigen, dass wir trotz der Einfachheit der Vorrichtung doch eine sehr complicirte Erscheinung vor uns haben. Es wird daher, bevor ich zu einer Erläuterung der einzelnen Versuchsreihen übergehe, zweckmässig sein, zuvor diejenigen Vorgänge zusammen zu stellen, welche auf die Erzeugung von Elektricität und auf ihre Zu- und Abnahme überhaupt von Einfluss sind.

1. Berührung der Leiter. Nach Abschnitt II sind Wassertropfen, welche von einem leitend mit der Erde verbundenen oder auch isolirten Zinke abfallen, positiv elektrisch, und laden also die Platinschaale, in welcher sie sich sammeln, positiv. Andererseits zeigt das Elektrometer, welches mit dem isolirten Zinke verbunden ist, eine negative Ladung. Ebenso gestalten sich die elektrischen Erscheinungen, wenn statt des Wassers verdünnte Schwefelsäure unter Umständen angewandt wird, wobei sie das Zink nicht angreift.

Die bei diesem Vorgange in 2 Minuten angesammelte Elektricität ist aber nur gering; es müssen also noch weitere Processe vorhanden sein, welche grössere Mengen von Elektricität zu erzeugen vermögen.

2. Directer Angriff der Säure. Der durch den directen Angriff der Säure auf dem Zinke entwickelte Wasserstoff führt positive Elektricität mit sich fort, lässt daher das Zink und die Säure in negativem Zustande zurück.

Man kann sich diesen Vorgang in folgender Weise vorstellen:

In meinen Maassbestimmungen*) der elektromotorischen Kräfte, welche zwischen Metallen und Wasser auftreten, habe ich nachgewiesen, dass blankes Zink in Berührung mit destillirtem Wasser positiv, und das Wasser negativ wird. Ueber die durch Berührung des Zinkes mit Schwefelsäure, wobei ein Angriff der Säure auf das Metall stattfindet, entstehende elektromotorische Kraft liegt keine directe Messung vor; ein später (S. 624) beschriebener Versuch beweist aber wenigstens, dass dieselbe nicht sehr erheblich von der durch die Berührung mit Wasser erzeugten verschieden sein kann. An der Berührungsfläche zwischen Zink und Säure wird also in einer, jener elektromotorischen Kraft entsprechenden Menge auf dem Zinke positive und auf der anliegenden Säurefläche negative Elektricität gebunden sein. Auf diese gebundenen Elektricitäten ist der sonstige elektrische Zustand des aus Zink und Flüssigkeit bestehenden Leiters ohne Einfluss.

Wenn nun das Wasser an dieser Berührungsfläche zerlegt wird, so nimmt der Wasserstoff die positive Elektricität des Zinkes an und entweicht. Das mit der positiven Elektricität geladene Gas muss zwar beim Aufsteigen eine dünne Flüssigkeitsschicht durchdringen; die Gase geben aber, wie ich in dem folgenden Abschnitte C. nachweisen werde, ihre elektrische Ladung an flüssige oder feste Leiter nur allmählig ab. Es wird also ein mehr oder weniger grosser Theil der vom Wasserstoff aufgenommenen positiven Elektricität mit ihm entfernt; dagegen wird ein entsprechendes Quantum der negativen Elektricität der Säure frei, und sich über die Oberfläche des gesammten Leiters verbreiten. Die Stärke dieser negativen Ladung des Leiters muss unter sonst gleichen Umständen mit der Menge des entweichenden Gases wachsen.

Zu dem vorstehend beschriebenen Vorgange, welcher das Zink in den negativen Zustand versetzt, gesellen sich noch zwei andere, welche dem Zinke die entgegengesetzte Polarität, also die positive, ertheilen.

3. Bildung einer galvanischen Kette. Nach und nach bedeckt sich die Stelle der Seitenfläche des Zinkes, über welche die

---

*) Diese Abhandlungen Bd. XI. p. 661.

Säure hinabfliesst und ebenso der untere Rand desselben mit einer anfangs graulich, später grauschwarz und selbst schwarz erscheinenden Schicht aus Kohle (und fremden ausgeschiedenen metallischen Beimengungen). In dem aus Zink, Kohle und Schwefelsäure gebildeten galvanischen Elemente wird nun aber der Wasserstoff nicht mehr an dem positiven Zinke, sondern an der negativen Kohle ausgeschieden, nimmt daher, wie im Abschnitte C. an einem aus Zink, Platin und Schwefelsäure bestehenden galvanischen Elemente gezeigt werden wird, negative Elektricität mit sich fort und lässt das Zink und den ganzen Leiter in positivem Zustande zurück.

4. Abfall der Säuretropfen vom unteren Ende bei gleichzeitig vorhandenem chemischen Prozess. Nach dem Früheren ist an der Berührungsfläche des Zinkes und der Säure auf dem Zinke positive, auf der Säure negative Elektricität vorhanden, die sich gegenseitig binden. Wenn nun ohne chemischen Process die Säuretropfen vom Metall abfallen, so bleibt stets noch eine Schicht Säure auf dem letzteren haften, und in ihr befindet sich unverändert die gebundene negative Elektricität. Wenn dagegen ein Angriff der Säure auf das Zink eintritt, so hebt die Gasentwickelung die Berührung auf; in der abgestossenen flüssigen Schicht wird also die negative Elektricität frei und beim Abfallen der Tropfen zum Theil mit fortgenommen. Die am unteren Zinkrande entwickelten Gasblasen, welche die positive Elektricität aufgenommen haben, können bei ihrer Lage nur schwierig entweichen, und geben einen Theil ihrer Ladung wieder an das von ihnen berührte Zink. Ist nun das von dem Tropfen mitgenommene Quantum negativer Polarität grösser als das von dem Gase fortgeführte Quantum der positiven, so erhält das Zink eine positive Ladung.

An denjenigen Stellen des unteren Randes, wo sich der schwärzliche Beleg gebildet hat, entwickelt sich der Wasserstoff an diesem negativen Gliede der galvanischen Kette und nimmt daher den negativen Zustand an. Die kleineren Wasserstoffbläschen geben dann während ihres Verweilens in den Säuretropfen einen Theil ihrer negativen Ladung an diese ab.

5. Schaumbildung auf der Seitenfläche des Zinkes. Wenn durch sehr heftigen Angriff der Säure sich auf der Seitenfläche des Zinkes, über welche die Säure hinabfliesst, Schaum an-

häuft, so hat die von den entwickelten Gasen aufgenommene positive oder negative Elektricität Zeit, in grösserer oder geringerer Menge an die Flüssigkeit überzugehen. Die von den Gasen fortgeführten elektrischen Quanta werden also verringert, und dadurch der entgegengesetzt elektrische Zustand des Zinkes schwächer.

6. Schaumanhang am unteren Ende des Zinkes. Wenn an dem unteren Ende des Zinkes infolge eines starken Angriffes der Säure sich ein Anhang von Schaumblasen bildet, so fallen die Tropfen daselbst nicht vom Zinke, sondern von diesem Schaumanhange ab. Die in ihnen durch die Zersetzung vorhandene negative Elektricität hat also Zeit sich mit der positiven auf dem Zinke zum Theil wieder zn vereinigen, und die abfallenden Tropfen nehmen nur eine geringe negative Ladung mit.

7. Verminderung der Leichtflüssigkeit der Säure. Wenn, was namentlich bei Einwirkung stärkerer Säuren eintritt, sich eine gewisse Menge von schwefelsaurem Zinkoxyd (oder in den späteren Versuchen Chlorzink) in der über die Seitenfläche fliessenden Säure und in den am unteren Ende hängenden Tropfen bildet, so wird die leichte Beweglichkeit der Gasblasen in diesen Flüssigkeiten vermindert; die mit Elektricität beladenen Gasblasen werden daher beim Durchgange durch dieselben einen grösseren Theil ihrer elektrischen Ladung abgeben. (Vergl. den Abschnitt VII.)

c. *Elektrisches Verhalten der in die Platinschaale fallenden Tropfen.*

Wie schon oben angedeutet, rührt die elektrische Spannung, welche die in die Platinschaale fallenden Tropfen erhalten, theils von den Contactverhältnissen, theils von dem am unteren Ende des Zinkes zwischen diesem und der Säure auftretenden chemischen Vorgange her.

Zu einer genaueren Kenntniss der durch den Contact und die Ableitung in den fallenden Tropfen erzeugten elektrischen Spannungen führen die im Abschnitt II mitgetheilten Beobachtungen, und es rechtfertigt sich dadurch ihre ausführliche Mittheilung an der betreffenden Stelle. Nach jenen Messungen ertheilen die in 2 Minuten von dem abgeleiteten Zinke abfallenden Tropfen der Platinschaale, in welcher sie sich sammeln, je nach der Schnelligkeit, mit welcher

sie einander folgen, in der jetzt gewählten Einheit (der Spannung an dem Pole eines Daniell'schen Elementes) eine elektrische Spannung von + 0,4 bis + 0,5.

Ebendaselbst (S. 611) habe ich auch schon erwähnt, dass, wenn anstatt des Wassers verdünnte Schwefelsäure auf amalgamirtes Zink tropft (wobei also kein chemischer Angriff stattfindet), die abfallenden Tropfen nahe das gleiche Verhalten darbieten, wie zuvor beim Wasser.

Es lässt sich nun auch leicht zeigen, dass das aus dem Contacte folgende elektrische Verhalten der Säuretropfen sich nicht wesentlich ändert, wenn das Zink in gewöhnlichem Zustande, also nicht amalgamirt, in die Säure eingetaucht wird, und folglich ein mehr oder weniger heftiger Angriff auf dasselbe stattfindet; nur muss man dafür Sorge tragen, dass die Säuretropfen nicht vom Zinke selbst abfallen, und an der Abfallstelle jeder weitere chemische Process vermieden wird, was sich leicht in folgender Weise ausführen lässt.

In das mehrfach erwähnte trichterförmige Gefäss wurde eine mit dem 8fachen Volumen Wasser verdünnte Schwefelsäure eingegossen und ein Zinkstück eingetaucht. War das Zink zur Erde abgeleitet, so ertheilten die in die Platinschaale fallenden Wassertropfen dieser letzteren eine positive Ladung und zwar nahe dieselbe wie früher, wo das Gefäss mit Wasser gefüllt war. Es wirkte hier blos die infolge der Berührung und Ableitung vorhandene elektrische Spannung; alle durch den chemischen Angriff erzeugte ward durch die Ableitung zur Erde entfernt.

So lange also, wenn verdünnte Schwefelsäure auf zur Erde abgeleitetes Zink tropft, sich am unteren Ende zwischen dem Zink und der Säure noch kein erheblicher Angriff ausgebildet hat, werden wir zu erwarten haben, dass die in die Platinschaale fallenden Tropfen dieselbe positiv in einer Stärke laden, die innerhalb zweier Minuten + 0,5 nicht übersteigen kann.

Diesen Ausspruch bestätigen die unter a. 1. angeführten Versuchsreihen; die positive Spannung ist jedoch stets geringer als + 0,5, weil infolge eines bereits am unteren Ende beginnenden chemischen Vorganges, welcher die Säure negativ macht, die aus der Berührung und Ableitung stammende positive geschwächt wird.

Wenn nun nach und nach der chemische Process am unteren Ende des Zinkes sich verstärkt und die abfallenden Tropfen beginnen sich negativ zu laden, so geht der positive Zustand der Platinschaale bei schwächeren Säuren in längerer, bei concentrirteren in kürzerer Zeit in den negativen über. Ist durch die Beschaffenheit der Zinkoberfläche gleich von Anfang ein stärkerer Angriff ermöglicht, so kann die von der Berührung und Ableitung herrührende positive Spannung schon nach wenigen Secunden überwunden sein.

Wenn an dem unteren Ende des Zinkes sich ein Schaumanhang bildet, so fallen die Tropfen nicht vom Zinke, sondern von den Schaumblasen ab, und werden durch die Ableitung des Zinkes mehr oder weniger entladen, so dass also dann die in zwei Minuten in der Platinschaale angesammelte Elektricität geringer wird, wie dies bei den oben mitgetheilten Versuchen mit der 4- und 8fach verdünnten Schwefelsäure sich zeigt.

Dass in der That die negative Ladung der Tropfen nur durch den am unteren Ende des Zinkes oder in seiner Nähe zwischen ihm und der Säure vorgehenden chemischen Process entsteht, lässt sich auch nachweisen, wenn man den Versuch so anordnet, dass ein solcher Process ausgeschlossen ist. Ich will zwei derartige Versuche mittheilen, welche zugleich für den nächsten Abschnitt von besonderem Interesse sind.

An einem 25 cm langen Zinkstreifen wurde am untern Ende eine Strecke von 4 cm gut amalgamirt. Als jetzt z. B. selbst eine mit dem 4fachen Wasservolumen verdünnte Schwefelsäure angewendet wurde, ergaben die Beobachtungen folgende Resultate:

Isolirt und mit *E* verbunden.	Zur Erde abgeleitet.	In 2 Minuten angesammelte Spannungen.	
Z	*S*	— 1,43	
S	*Z*		+ 0,15
Z	*S*	— 3,70	
S	*Z*		+ 0,08
Z	*S*	— 3,70	
S	*Z*		+ 0,19
Z	*S*	— 2,10	
S	*Z*		+ 0,15
Z	*S*	— 1,32	
S	*Z*		— 0,10
Z	*S*	— 1,90	
S	*Z*		— 0,30.

Die fallenden Tropfen erscheinen hier lange Zeit infolge der Ableitung des Zinkes positiv. Erst als der schwärzliche Streifen sich von der nicht amalgamirten Zinkoberfläche her auch etwas über die amalgamirte Stelle bis zum Rande vorschob, wurde die positive Spannung überwunden, und die Schaale zeigte schwache negative Spannung.

Ferner wurde an das untere Ende eines 10 cm langen Zinkstreifens ein 5 cm langer Platinstreifen von gleicher Breite mit dem Zinke angelöthet, so dass die über das Zink hinabfliessenden Tropfen erst nach dem Überschreiten des Platinbleches von dem unteren Rande dieses letzteren abfielen. Die angewandte Schwefelsäure war mit dem 8fachen Volumen Wasser verdünnt.

Isolirt und mit *E.* verbunden.	Zur Erde abgeleitet.	In 2 Minuten angesammelte Spannungen.	
Z	*S*	— 0,96	
S	*Z*		— 0,30
Z	*S*	— 1,83	
S	*Z*		— 0,34
Z	*S*	— 1,74	
S	*Z*		— 0,32
Z	*S*	— 1,91	
S	*Z*		— 0,38
Z	*S*	— 1,57	
S	*Z*		— 0,40
Z	*S*	— 1,34	
Nach 8 Minuten Zwischenzeit			
Z	*S*	— 0,83	
S	*Z*		— 0,61
Z	*S*	— 0,60	
Nach 20 Minuten Zwischenzeit			
Z	*S*	+ 0,25	
Z	*S*	+ 0,20	
S	*Z*		— 0,43

Infolge des Abfallens vom Platin erhalten die Tropfen eine negative Spannung, und die in der vorstehenden Versuchsreihe beobachteten Ladungen der Platinschaale verdanken, wie man aus den Zahlenwerthen derselben erkennt, fast allein jenem Contacte ihre Entstehung.

Wenn bei den Versuchen, in welchen die Säure auf einen blanken gewöhnlichen Zinkstreifen tropft, das Zink nicht wie bisher

zur Erde abgeleitet, sondern isolirt gehalten wird, so ändert sich die elektrische Ladung der abfallenden Säuretropfen je nach dem elektrischen Zustande des Zinkes. Innerhalb derjenigen Periode im Anfange einer Versuchsreihe, wo das Zink selbst negativ erscheint, wird durch diese negative Spannung auf dem Zinke die negative Ladung der Tropfen vergrössert. Isolirt man dagegen das Zink in der bei stärkeren Säuren nach längerer Dauer des Tropfens eintretenden Periode seiner positiven Ladung, so wird dadurch die negative Ladung der Tropfen verringert.

d. *Elektrisches Verhalten des Zinkes.*

Nach den unter a. mitgetheilten Versuchsreihen zeigt das Zink bei dem Auftropfen von Schwefelsäure in den verschiedensten Concentrationsgraden beim Beginne des Versuchs stets negative Spannung. Diese negative Ladung wächst je nach der Beschaffenheit der Säure in längerer oder kürzerer Zeit bis zu einem Maximum, nimmt dann ab und geht schliesslich in eine positive über.

In dem Abschnitte II ist nachgewiesen worden, dass, wenn Wasser- oder Säuretropfen ohne chemischen Angriff von einem isolirten Zinke abfallen, das mit diesem Zinke verbundene Elektrometer eine negative Spannung annimmt, die jedoch in zwei Minuten höchstens bis — 0,4 steigen kann. Da nun, wenn Säure, namentlich in verdünntem Zustande, auf gewöhnliches (nicht amalgamirtes) Zink tropft, der chemische Angriff anfangs sehr gering ist, so wird durch das Abfallen der Tropfen das mit dem Zinke verbundene Elektrometer einen schwachen negativen Ausschlag geben.

Sobald nun der directe Angriff der Säure beginnt, entweicht mit dem Wasserstoff positive Elektricität, was eine negative Ladung des Zinkes, und somit eine Steigerung des negativen Ausschlages im Elektrometer zur Folge hat.

Diesem Anwachsen der negativen Spannung auf dem Zinke treten aber zwei andere Vorgänge entgegen. In dem Maasse, als durch die Entstehung der schwärzlichen Schicht sich ein galvanisches Element bildet, nimmt der durch die Wirkung dieses Elementes ausgeschiedene Wasserstoff negative Elektricität mit, was eine positive Ladung des Zinkes zur Folge hat.

Ebenso wird infolge des am unteren Ende des Zinkes verlaufenden chemischen Processes und des Abfallens der Tropfen das Zink positiv.

Je mehr die beiden letzten Vorgänge sich verstärken, wird die durch die directe Gasentwickelung dem Zinke ertheilte negative Ladung geschwächt, und unter geeigneten Umständen gänzlich überwunden, so dass nun das Zink positiv erscheint.

Dass die Zersetzung des Wassers durch die auf der Seitenfläche des Zinkes gebildete Kette allein hinreicht, um die anfängliche positive Ladung des Zinkes schliesslich in eine positive zu verwandeln, zeigen die S. 626 mitgetheilten Versuche, bei welchen an das untere Ende des Zinkstreifens ein Platinblech angelöthet war. Die bei dieser Vorrichtung abfallenden Säuretropfen vermögen an der Abfallstelle keinen chemischen Process einzuleiten; die abfallenden Tropfen können höchstens so viel negative Elektricität mit hinwegnehmen, als aus der Berührung und Ladung des ganzen Leiters ihnen zukommt.

Wesentlich vermehrt wird aber die positive Spannung auf dem Zinke durch das an seinem untern Ende stattfindende Abfallen der Tropfen.

Wenn die Säure, wie dies oben bei der mit dem acht- und dem vierfachen Volumen Wasser vermischten Säure eintrat, so stark angreift, dass sich Schaum auf der Zinkfläche und am unteren Rande bildet, so wird die schwärzliche Schicht hie und da abgestossen, und die Tropfen am unteren Ende verlieren einen Theil ihrer negativen Ladung, den sie an das Zink zurückgeben. Durch diese Vorgänge kann der positive Zustand des Zinkes zeitweilig wieder in den negativen zurückgehen. Beide, sowohl der positive als auch der negative, werden aber jener Änderungen wegen keine beträchtliche Stärke erlangen. (Vergl. die Versuche unter a, 4 und a, 5.)

In dem Vorhergehenden war entweder das Zink oder die Platinschaale mit dem Elektrometer verbunden. Welcher Erfolg zu erwarten steht, wenn beide gleichzeitig isolirt mit dem Elektrometer verbunden werden, lehrt ein Blick auf die oben im Abschnitte a. mitgetheilten Versuche: das Elektrometer wird bei dieser Verbindung stets negative Elektricität anzeigen. Im Anfange überwiegt die negative Spannung des Zinkes; dann werden Zink und Schaale gleich-

zeitig negativ, und wenn zuletzt das Zink in den positiven Zustand übergeht, so sind die fallenden Tropfen stark negativ. In einer Versuchsreihe wurden z. B. nach einander die folgenden in zwei Minuten angesammelten Spannungen beobachtet: — 1,35; — 2,50; — 3,13; — 3,82; — 4,09; — 4,90; — 5,10; — 5,25.

B. Schwefelsäure fällt in Tropfen auf eine horizontale Zinkplatte.

Unterhalb des trichterförmigen Gefässes wurde eine Zinkplatte von 15 cm Seite horizontal an einem isolirenden Halter befestigt, so dass die aus der Spitze des Trichters fallenden Tropfen die Mitte der Platte trafen. Es sammelte sich dann nach und nach eine Schicht Säure auf der Platte, die schliesslich bei hinreichender Ausdehnung über den Rand derselben abfloss. Zur Aufnahme der von der Platte abfliessenden Säure diente eine grössere in einigem Abstande darunter gestellte kupferne Schaale, welche zur Erde abgeleitet war.

Um die Wirkung des ersten Angriffs der aus dem Trichter auf die Platte fallenden Säure beobachten zu können, wurde zwischen die Zinkplatte und die Spitze des Trichters mittelst eines in horizontaler Ebene beweglichen Armes ein kleiner Platintiegel eingeschoben, so dass die sofort nach dem Eingiessen der Säure in den Trichter abfallenden Tropfen von diesem Tiegel aufgenommen wurden. Erst wenn ich vor dem Elektrometer sass, wurde mittelst eines längeren Drahtes jener Arm gedreht, so dass nun die Säuretropfen auf die Zinkplatte trafen*).

Welche elektrischen Vorgänge bei diesem Verfahren eintreten müssen, lässt sich nach den Resultaten des vorhergehenden Abschnittes leicht voraussehen. Bei dem Beginne des Tropfens wird der Wasserstoff der Zinkplatte positive Elektricität entnehmen. Da jedoch im Anfang der Angriff der Säure nur schwach ist und der mit positiver Polarität beladene Wasserstoff jetzt eine dickere Flüssigkeitsschicht, als bei der geneigten Platte, zu durchdringen hat, so

*) Eben diese Vorrichtung wurde auch bei den Versuchen des vorhergehenden und der folgenden Abschnitte benutzt, wenn die Wirkung bei dem ersten Auftreffen der Säure auf die geneigte Platte beobachtet werden sollte.

wird die von ihm fortgeführte Menge positiver Elektricität nur gering sein können, das Zink also auch nur eine geringe negative Spannung erhalten.

Zugleich beginnt aber die grauliche Schicht sich zu bilden, und der durch das entstandene galvanische Element entwickelte Wasserstoff nimmt negative Elektricität mit sich, so dass das Zink positiv geladen wird. Gewöhnlich erreicht die negative Spannung schon in einer Minute ihr Maximum, und geht dann in eine positive über, deren Grösse durch die Stärke des Angriffes der Säure auf das Zink bedingt ist.

Aber auch diese letzte positive Spannung kann keinen sehr hohen Werth erreichen, weil der Versuch schon nach 6 bis 9 Minuten durch das Hinabfliessen der Säure über den Rand der Platte sein Ende findet.

Die Stärke des Angriffes der Schwefelsäure auf verschiedene Zinkplatten und somit auch die infolge der dadurch bewirkten Wasserstoffentwickelung auftretende Elektricität ist sehr verschieden. Als z. B. eine mit dem 16fachen Volumen Wasser verdünnte Schwefelsäure auf eine Zinkplatte tropfte, welche leicht von der Säure angegriffen wurde, zeigte die Zinkplatte eine Minute lang schwache negative Spannung (— 0,21); dieselbe ging in eine positive über, und nach Verlauf von 4 Minuten betrug die in zwei Minuten in der Platte angehäufte positive Spannung + 4,8. Bei Anwendung einer anderen Zinkplatte, welche von der Säure nur wenig angegriffen wurde, stieg beim Auftropfen einer mit dem 4fachen Volumen Wasser verdünnten Schwefelsäure die negative Spannung in einer Minute nur bis — 0,05; nach Verlauf von 4 Minuten betrug die in zwei Minuten angesammelte positive Spannung nur + 0,44.

C. Wasserstoffentwickelung mittelst der einfachen galvanischen Kette.

Ich stelle die Versuche über die Zersetzung des Wassers durch die einfache galvanische Kette gleich hier ein, da im Vorhergehenden bereits mehrfach darauf Bezug genommen ist.

Auf den Boden einer gläsernen Krystallisirschale von 5 cm Höhe und 7,5 cm Durchmesser wurde ein Platinblech gelegt, und darauf ein gut amalgamirter Zinkring von 4 cm Höhe gestellt. Die

in verschiedenen Graden mit Wasser verdümte Schwefelsäure wurde in solcher Menge eingegossen, dass ihr Niveau 4—5 mm über dem oberen Rande des Zinkcylinders stand. Die Schwefelsäure verband ein in dieselbe eintauchender Platindraht mit einer horizontalen isolirten Kupferplatte, in deren Mitte das zuvor beschriebene Element stand. Die Kupferplatte konnte mit dem Elektrometer verbunden werden.

Wie in dem Abschnitte A. werde ich auch jetzt wieder diejenigen elektrischen Spannungen angeben, welche nach einer zwei Minuten dauernden Verbindung des Elementes mit dem Elektrometer beobachtet wurden.

Da bei der vorliegenden Anordnung der Wasserstoff sich nicht am Zinke, sondern am negativen Platin entwickelt, so wird er, und selbstverständlich gilt dies bei allen Verdünnungsgraden der Schwefelsäure, mit negativer Elektricität geladen. Indem er nun diese negative Elektricität mit sich fortführt, erhält die Kette eine positive Ladung, deren Grösse von der Stärke der angewandten Säure abhängt.

Wurde eine mit dem 64fachen Volumen Wasser verdünnte Schwefelsäure eingegossen, so entstand nur eine geringe Ladung des Elektrometers, die anfänglich + 1 betrug, nach 12 Minuten aber durch die Abnahme des galvanischen Stromes infolge der Polarisation des Platins bis + 0,66 gesunken war.

Bei einer mit dem 32fachen Volumen Wasser verdünnten Säure erreichte die Spannung anfangs den Werth + 3,4, der sich nach 15 Minuten bis + 3,6 gesteigert hatte.

Ähnlich verhielt sich die mit dem 16fachen Volumen Wasser verdünnte Säure; der anfängliche Werth betrug + 3,2, nach 18 Minuten + 4.

Bei einer mit dem 8fachen Volumen Wasser verdünnten Säure war die Spannung anfangs + 4, stieg nach drei Minuten auf + 6, welcher Werth dann längere Zeit fortbestand.

Wurde eine nur mit dem vierfachen Volumen Wasser verdünnte Säure angewandt, so betrug die anfängliche Spannung + 0,9 bis + 2; im weiteren Verlaufe stieg dieselbe erst rasch, dann langsamer und näherte sich einem Maximum, das je nach den Umständen + 30 bis + 40 erreichte.

Bei diesem Verfahren der Elektricitätsentwickelung ist es leicht zu zeigen, dass die elektrisch geladenen Gase ihre Elektricität an feste und flüssige Leiter nur wenig abgeben.

Aus sehr engmaschiger Messinggaze wurde ein unten offener Cylinder von 31 cm Höhe und 19 cm Durchmesser gebildet, und oberhalb des galvanischen Elementes so aufgehangen, dass sein unterer Rand ungefähr 2,5 cm oberhalb der Kupferplatte lag. Da die auf der Kupferplatte stehende Krystallisirschaale eine Höhe von 5 cm hatte, so traten die Gasblasen 2,5 cm oberhalb des untern Cylinderrandes aus der Flüssigkeit, und wurden infolge ihrer Leichtigkeit und des in der Kapelle herrschenden Luftzuges durch die Maschen des Metallnetzes getrieben.

Als das Element mit einer starken Schwefelsäure (1 Vol. Säure, 4 Vol. Wasser) gefüllt war, nahm es in zwei Minuten die Spannung + 20 an; dem darüber befindlichen Netze ertheilten die durch dasselbe hindurchgehenden Gase, ebenfalls in zwei Minuten, jedoch nur eine Spannung — 2. Der grösste Theil der in dem Gase vorhandenen negativen Elektricität war also durch das Sieb hindurchgegangen. Es war bei der zweiten Messung die Capacität des zu ladenden Conductors allerdings eine etwas grössere als bei der ersten; aber auch selbst bei gleicher Capacität würde die Spannung im zweiten Falle nicht über — 4 hinausgegangen sein.

Der geringe Übergang der negativen Elektricität aus dem Gase zu dem Metallsiebe erhellt auch aus folgendem Versuche. Dieses Sieb wurde nicht wie vorhin isolirt aufgehangen, sondern mit seinem unteren Rande auf die Kupferscheibe gestellt, so dass es mit dieser und dem Inhalte der Glasschaale leitend verbunden war. Dabei zeigte das mit dem Elemente, der Kupferplatte und dem Siebe verbundene Elektrometer nur eine wenig geringere positive Spannung, als wenn das Sieb ganz entfernt war. Wäre von dem Siebe die negative Elektricität des Gases aufgenommen worden, so hätte sich diese negative Elektricität mit der positiven der Schaale vereinigen und das Elektrometer ohne Spannung bleiben müssen.

Dies letztere trat nun nahe ein, als eine inwendig feuchte, etwas grössere Krystallisirschaale über das Element gestülpt wurde. Jetzt zeigte das Elektrometer nur noch einen sehr geringen positiven Ausschlag, weil nur ein sehr geringer Theil der negativen Elektricität

mit dem Wasserstoff durch die enge Ritze zwischen dem Rande der Schaale und der nicht ganz ebenen Kupferplatte zu entweichen vermochte.

Aber auch in eine leitende Flüssigkeit tritt die Elektricität aus den Gasblasen, welche in derselben aufsteigen, nur sehr allmählig über. In einem 17 cm hohen cylindrischen Glase wurde auf den Boden die Platinplatte gelegt und darauf der amalgamirte Zinkring gestellt. Wurde eine mit dem 16 fachen Volumen Wasser verdünnte Schwefelsäure so weit eingefüllt, dass der obere Zinkrand eben bedeckt war, so erhielt ich eine elektrische Spannung + 3,1; wurde dagegen das Glas bis zum Rande mit derselben Säure gefüllt, so beobachtete ich nur noch eine Spannung + 1,4. Es war also durch die 13 cm höhere Säureschicht nur etwas mehr als die Hälfte der in den Gasblasen vorhandenen negativen Elektricität aufgenommen worden.

D. Übergiessen eines Zinkstückes mit verdünnter Schwefelsäure oder Eintauchen in dieselbe.

Um die Oberfläche des Zinkes noch in bestimmter Weise herstellen zu können, wurde ein einziges Zinkstück mit verdünnter Schwefelsäure übergossen.

Da es sich, namentlich bei Anwendung schwacher Säuren, um geringe elektrische Spannungen handelte, so war es geboten, von den Stellen, welche berührt werden mussten, alle Nichtleiter auszuschliessen, um jede Reibungselektricität fern zu halten; es wurde deshalb folgendes Verfahren eingeschlagen. Ein quadratisches Stück blanken Zinkes von 2,5 cm Seite wurde entweder in die Platinschaale gelegt, so dass es mit seinen Ecken die Wand der Schaale berührte und mit ihr und der eingegossenen Säure ein galvanisches Element bildete, oder es wurde das Zink in ein auf dem Boden der Platinschaale befindliches flaches Uhrglas gelegt, so dass es nirgends das Platin berühren konnte, und also für sich dem Angriffe der eingegossenen Säure ausgesetzt war. Die Platinschaale wurde isolirt und mit dem Elektrometer verbunden; die Menge der eingegossenen mehr oder weniger verdünnten Schwefelsäure betrug 50 ccm.

Wenn nun zunächst das blank gefeilte Zink in das Uhrglas gelegt wird, so haben wir bei der Erklärung der entstehenden elektrischen Spannungen folgende Vorgänge in Betracht zu ziehen:

1) Die Säure befindet sich in der Platinschaale, hat also durch die vor der Isolirung stattgehabte Ableitung zur Erde eine negative Spannung angenommen. Wenn nun Gase aus der Oberfläche der Flüssigkeit sich erheben, so werden sie ähnlich wie die vom Platin abfallenden Wassertropfen (S. 606) etwas negative Elektricität mitnehmen, so dass das Elektrometer einen positiven Ausschlag giebt.

2) Der directe Angriff der Schwefelsäure auf blankes Zink macht (S. 621) die Säure negativ, weil der sich entwickelnde Wasserstoff positive Elektricität aufnimmt. Da der Angriff aber nur gering ist, so werden die lange am Zink unter der Säure haftenden Blasen (die erst aufsteigen, wenn sie eine gewisse Grösse erreicht haben) ihre positive Spannung an die Säure, welche in erheblich dicker Schicht darüber liegt, ganz, oder fast ganz abgeben, und ohne merkliche Elektricität die Oberfläche erreichen.

3) Sehr bald bildet sich aber nun auf dem Zink die graulichschwarze Schicht; die so hergestellte galvanische Kette zersetzt das Wasser lebhafter, der entweichende Wasserstoff nimmt an dem negativen Pole negative Elektricität auf, und lässt die Schaale mit ihrem Inhalte in positivem Zustande zurück. Allerdings wird auch von der negativen Ladung des Wasserstoffs ein Theil an die Flüssigkeit übergehen; bei der rascheren Entwickelung vermag aber stets noch ein mehr oder weniger grosser Theil derselben mit dem Gase zu entweichen.

Bei Anwendung einer 64fach verdünnten Säure ist der Angriff so schwach, dass das Elektrometer in zwei Minuten keine merkliche Ladung annimmt. Bei einer 32- oder 16fach verdünnten Säure zeigt das Elektrometer anfangs nur eine sehr geringe positive Spannung von + 0,1; erst nach 10 Minuten steigt innerhalb zweier Minuten die Spannung auf + 0,78 und resp. + 1,05. Bei stärkeren Säuren, z. B. bei nur 8fach verdünnter, erreicht 10 Minuten nach dem Übergiessen die in zwei Minuten angesammelte Spannung den Werth + 5,55.

Wird also ein blankes in einem Uhrglase liegendes Zinkstück mit verdünnter Schwefelsäure übergossen, so entsteht gleich anfangs

eine schwache positive Ladung der Schaale, die sich bei stärkeren Säuren im Fortgange des Versuches wesentlich steigert. Unter günstigen Umständen würde übrigens gleich im Anfange auch eine schwache negative Ladung eintreten können.

Riess schliesst in seinem Werke über die Reibungselektricität*) an die Erwähnung der Versuche von Lavoisier und de la Place den Satz an: »Man kann sich davon (von dem Auftreten der Elektricität bei Zersetzungen) an einem Säulenelektroskope überzeugen, auf dessen Teller ein Platintiegel mit verdünnter Säure gefüllt gestellt ist. Taucht man in die Säure einen Streifen Zink, Eisen oder einer anderen angreifbaren Substanz, so kommt sogleich positive Elektricität zur Anzeige, welche der angreifenden Säure zugehört.« Wollte man das Eintauchen so verstehen, dass das Zink dabei noch mit der Erde in leitender Verbindung bleibt, so wird die Ladung des Elektrometers nur durch die Berührungen der verschiedenen Leiter und die Ableitung erzeugt.

Als ich z. B. einen durch einen Kupferdraht zur Erde abgeleiteten Zinkstreifen in 4fach verdünnte, in der isolirten und mit dem Elektrometer verbundenen Platinschaale enthaltene Schwefelsäure tauchte, so wurde eine Spannung + 0,7 beobachtet.

Wird das blanke Zinkstück an einer isolirenden Vorrichtung befestigt in die Säure getaucht, so erscheint im ersten Anfange durch den Angriff der Säure eine schwache negative Spannung, welche jedoch sehr bald in eine positive übergeht, die mit der Zunahme der Auflösung unter Bildung der grauschwarzen Schicht sich steigert und nach Verlauf von 10 Minuten bis + 2 anwächst.

Stellt man das Zinkstück in die Platinschaale, so dass die Wand derselben berührt wird, so bildet sich noch ein gewöhnliches galvanisches Element, bei dem der Wasserstoff sich am negativen Pole entwickelt, das Element also im positiven Zustande zurücklässt. Die positive Ladung ist dann, wie ich gleich zeigen werde, beträchtlich grösser.

Wenn bei den vorhin beschriebenen Versuchen das auf dem Boden der Platinschaale liegende Uhrglas entfernt wird, so dass nun das Zinkstück mit seinen Ecken die Wände der Platinschaale be-

*) Die Lehre von der Reibungselektricität Bd. 2. S. 418.

rührt, so bildet sich beim Übergiessen mit der Säure ein galvanisches Element; infolge dessen wird die Schaale viel stärker positiv als zuvor, wo das Zink das Platin nicht berührte.

Nachdem die Säure z. B. 10 Minuten lang mit dem Metalle in Berührung gewesen, wurden in zwei Minuten folgende Ladungen angesammelt: bei der 64fach verdünnten Säure + 0,6, bei der 32fach verdünnten + 3,05, bei der 16fach verdünnten + 24,0 u. s. w.

E. Übergiessen zahlreicher kleiner Zinkstücke mit verdünnter Schwefelsäure.

Werden zahlreiche kleine Zinkstücke mit verdünnter Schwefelsäure übergossen, so hängt die zuerst auftretende elektrische Ladung der Schaale von der Concentration der Säure, von der Beschaffenheit der Oberfläche der Zinkstücke und von dem Material der Schaale (Porcellan und Glas*), oder Platin) ab. Da sich nun die Oberfläche dieser kleinen Stücke nicht in beliebiger Beschaffenheit herstellen lässt, so ist es nicht möglich, jedes Mal bestimmt vorherzusagen, welche der beiden Polaritäten die Schaale gleich nach dem Aufgiessen der Säure annehmen wird. Sind im Anfange die Umstände einem starken Angriffe der Säure günstig, und wird durch die grösseren sich bildenden Gasblasen die Flüssigkeit verdrängt und dadurch eine starke Absorption der in dem Gase in diesem Zeitpunkte vorhandenen positiven Elektricität verhindert, so tritt in der Schaale negative Spannung auf. Diese negative Ladung hält jedoch nicht lange an, sondern geht in eine positive über. Sehr oft vermag aber die negative Elektricität in der Schaale nicht aufzutreten; infolge des Überwiegens der Zersetzung durch das gebildete galvanische Element erscheint sie gleich anfangs positiv.

Entladet man das sehr unempfindlich gemachte Elektrometer und die damit verbundene Schaale nicht, sondern lässt die Elektricität sich längere Zeit anhäufen, so kann man unter günstigen Umständen Spannungen von 200 und darüber beobachten, aber, wie aus dem Vorstehenden erhellt, nach einiger Zeit der Einwirkung nur positive.

---

*) Die Schaale von Porcellan oder Glas ist selbstverständlich durch einen in die Säure eintauchenden Platindraht mit dem Elektrometer zu verbinden.

IV. Elektrische Vorgänge bei der Entwickelung des Wasserstoffgases aus Zink und Salzsäure.

Die elektrischen Vorgänge bei der Entwickelung des Wasserstoffs aus Zink und Salzsäure entsprechen im Allgemeinen den im Vorhergehenden bei Anwendung der Schwefelsäure beschriebenen, so dass ich mich bei ihrer Darlegung kurz fassen kann.

A. Salzsäure fällt in Tropfen auf einen ungefähr um 45° gegen den Horizont geneigten Zinkstreifen.

Wird eine mit dem 64 fachen Volumen gemischte Säure angewendet, so erleidet das Zink keinen merklichen Angriff; das Zink und die Platinschaale ertheilen dem Elektrometer dieselbe Ladung, als wenn Wasser aus dem Trichter auf den Zinkstreifen fiele; das Zink erscheint also schwach negativ, und die Platinschaale schwach positiv.

Tropft eine mit dem 32- oder 16 fachen Volumen gemischte Säure auf das Zink, so findet nach einiger Zeit ein deutlicher Angriff des Zinkes statt. Nach 20 Minuten beträgt die in 2 Minuten angesammelte Elektricität — 0,83 und resp. — 1,52. Das Zink wird also durch den Angriff der Salzsäure ebenso negativ, wie durch den Angriff der Schwefelsäure. Die über den langen Zinkstreifen hinabfliessende Säure ist auf diesem Wege abgestumpft, und verhält sich beim Abfallen fast wie reines Wasser; die Platinschaale erhält also eine schwache positive Ladung, jedoch beginnt dieselbe bei der mit dem 16 fachen Volumen verdünnten Säure bereits nach und nach geringer zu werden.

Für die mit dem 8- und dem 4 fachen Volumen Wasser verdünnte Säure will ich je eine Versuchsreihe mittheilen.

Achtfach verdünnte Säure.

Isolirt und mit *E* verbunden.	Zur Erde abgeleitet.	In 2 Minuten angesammelte Elektricität.
Z	*S*	— 0,39
S	*Z*	+ 0,12
Z	*S*	— 1,79
S	*Z*	+ 0,07

Achtfach verdünnte Säure.

Isolirt und mit *E* verbunden.	Zur Erde abgeleitet.	In 2 Minuten angesammelte Elektricität.
Z	*S*	— 2,31
S	*Z*	— 0,22
S	*Z*	— 0,21
Z	*S*	— 1,94
S	*Z*	— 0,36
Z	*S*	— 1,92
S	*Z*	— 0,90
Z	*S*	— 2,70 *)
S	*Z*	— 1,23

Vierfach verdünnte Säure.

Isolirt und mit *E* verbunden.	Zur Erde abgeleitet.	In 2 Minuten angesammelte Elektricität.
Z	*S*	— 2,45
S	*Z*	— 0,46
Z	*S*	— 2,09
S	*Z*	— 1,69
Z	*S*	— 1,80
S	*Z*	— 1,28
Z	*S*	— 1,10
S	*Z*	— 2,60
Z	*S*	— 1,03
S	*Z*	— 3,51
Z	*S*	+ 0,32
S	*Z*	— 5,36
Z	*S*	+ 1,12
S	*Z*	— 6,39
Z	*S*	+ 1,51

Wie bei dem Auftropfen der Schwefelsäure, so wird auch bei dem Auftropfen der Salzsäure das Zink anfangs negativ; die negative Spannung erreicht ein Maximum, nimmt dann wieder ab und geht nach längerer Zeit in eine positive über; nur tritt der Übergang der negativen in die positive bei der Salzsäure erst nach längerer Zeit ein, als bei der Schwefelsäure. Der sich im Anfange entwickelnde Wasserstoff entnimmt dem Zinke also ebenso, wie bei

*) Solche Störungen, wie hier, in dem regelmässigen Verlaufe werden dadurch hervorgerufen, dass sich die Bahn, in welcher die Säure über die Zinkfläche herabfliesst, mehr oder weniger verändert.

den früheren Versuchen (s. S. 621), positive Elektricität und lässt den Leiter mit negativer zurück. Nach und nach bildet sich aber durch die Entstehung der graulichschwarzen Schicht auf der Seitenfläche ein galvanisches Element aus; der an der negativen schwärzlichen Schicht ausgeschiedene Wasserstoff nimmt negative Elektricität mit fort. Diese schwärzliche Schicht hindert ferner das rasche Aufsteigen der am Zinke entwickelten, mit positiver Elektricität geladenen Gase. Wenn nun die Wirkung des galvanischen Elementes und der Einfluss des am unteren Rande stattfindenden Abfalles der Tropfen wächst, so muss die negative Ladung des Zinkes abnehmen und in eine positive übergehen.

Die vom unteren Ende abfallenden Tropfen nehmen bei der 8fach verdünnten Säure anfangs noch die aus der Berührung und Ableitung stammende positive Spannung mit; durch den am unteren Rande sich ausbildenden Vorgang erhalten sie aber negative Ladung, die nach und nach, wie bei der 4fach verdünnten Säure, eine beträchtliche Stärke erreicht.

B. Salzsäure fällt in Tropfen auf eine horizontale Zinkplatte.

Auch bei diesem Vorgange gleicht die Salzsäure in ihrem Verhalten der Schwefelsäure. Als z. B. eine mit dem 2fachen Volumen Wasser verdünnte Salzsäure auf eine horizontale Zinkscheibe tropfte, zeigte die Platte nach der ersten Minute die Ladung — 0,14, dieselbe nahm dann sofort ab, und war schon vor Ablauf der zweiten Minute infolge des kräftigen Angriffes der Säure in eine starke positive übergegangen. Nach 5 Minuten erreichte die in 2 Minuten in der Platte angesammelte Elektricität die Spannung + 10.

C. Übergiessen eines Zinkstückes mit Salzsäure.

Es wurde ein blankes Zinkstück entweder unmittelbar auf den Boden der Platinschaale oder in ein auf dem Boden dieser Schaale befindliches Uhrglas gelegt, und dann mit Salzsäure übergossen. Lag das Zink in der Platinschaale, so entstand durch die Berührung ein galvanisches Element. Die Erklärung der in beiden Fällen beobachteten elektrischen Ladungen ist genau dieselbe, wie bei den früheren

Versuchen mit der Schwefelsäure. Es genügt daher, die Messungen selbst kurz anzuführen.

Die hintereinander gesetzten Zahlen geben die Werthe an, welche nach einander in 2 Minuten angesammelt waren. Nach jeder Messung wurde die Schaale 1 Minute lang abgeleitet, und dann wieder von Neuem 2 Minuten isolirt gehalten.

Mit dem 64 fachen Volumen Wasser verdünnte Salzsäure.
Zink im Uhrglase: keine merkliche Ladung.
Zink in der Platinschaale: + 0,65; + 0,60; + 0,49; + 0,36 u. s. w.

Mit dem 32 fachen Volumen Wasser verdünnte Salzsäure.
Zink im Uhrglase: + 0,13; + 0,13; + 0,06
Zink in der Platinschaale: + 0,82; + 0,85; + 0,57.

16 fach verdünnte Salzsäure.
Zink im Uhrglase: + 0,04; + 0,06; + 0,08
Zink in der Platinschaale: + 2,00; + 1,00; + 0,60.

8 fach verdünnte Salzsäure.
Zink im Uhrglase: + 0,15; + 0,28; + 0,40
Zink in der Platinschaale: + 3,92; + 2,71; + 4,46.

4 fach verdünnte Salzsäure.
Zink im Uhrglase: 0,0; + 1,0; + 0,16
Zink in der Platinschaale: + 0,56; + 3,58; + 4,88.

Mit einem anderen Zinkstück wurde beobachtet:
Zink im Uhrglase: + 0,56; + 0,83; + 1,21
Zink in der Platinschaale: + 4,05; + 6,97; + 8,05.

2 fach verdünnte Salzsäure.
Zink im Uhrglase: + 0,91; + 3,05; + 3,9
Zink in der Platinschaale: + 6,9; + 7,2; + 3,1; + 0,73.

Bei Anwendung der mit dem gleichen Volumen Wasser verdünnten Salzsäure zeigt aber die Elektricitätsentwickelung einen anderen Verlauf; es wird bei der Stärke dieser Säure der Angriff so heftig, dass die fremden Schichten von der Oberfläche abgestossen werden; infolge dessen tritt dann die positive Elektricität vom Zinke an das Gas, welches dieselbe fortführt, und die Schaale mit ihrem Inhalte in negativem Zustande zurücklässt. Erst später, wenn die heftige Auflösung etwas nachlässt und etwas Chlorzink in der Flüssigkeit

gelöst ist (vgl. den Abschnitt VII), entweicht mit dem Wasserstoff die negative Elektricität, so dass nun die Schaale positiv erscheint. Wenn die Oberfläche des Zinks so beschaffen ist, dass unmittelbar nach dem Aufgiessen der Säure ihr Angriff nicht gleich sehr heftig eintreten kann, so geht auch wohl der negativen Ladung der Schaale eine sehr kurze positive voran, die aber rasch, sobald die Auflösung stark erfolgt, sich in eine negative verwandelt.

In einem solchen Versuche, wobei das Zink in dem Uhrglase lag, zeigte z. B. die Schaale unmittelbar nach dem Aufgiessen der Säure eine positive Ladung, die nach ³/₄ Minuten bis + 0,8 gestiegen war, dann aber sehr rasch in die negative überging. Nach 4 Minuten betrug die in 2 Minuten angesammelte Elektricität — 12; nach 6 Minuten (stets von dem Zeitpunkte des Eingiessens der Säure gerechnet) stieg sie auf — 36, nahm dann ab und verwandelte sich nach 13 Minuten in positive, die eine Zeit lang an Stärke wuchs, + 12, + 18 u. s. w., und dann allmählig wieder abnahm.

Wenn das Zink in der Platinschaale lag, so waren die Vorgänge ähnliche. Anfangs überwog auch hier die Entwickelung des Wasserstoffes am Zinke, es traten negative Spannungen bis — 52 auf. Während aber zuvor erst nach 13 Minuten der Übergang in den positiven Zustand der Schaale geschah, erfolgte er jetzt schon nach 8 Minuten, weil durch das aus dem Zinke und dem Platin gebildete galvanische Element die Fortführung der negativen Elektricität unterstützt wurde.

Ebenso verhielt sich auch die Salzsäure (sp. Gew. 1,14) ohne Wasserzusatz; nur trat infolge des heftigen Angriffes die erste negative Elektricität noch stärker auf, und ging, als das Zink in dem Uhrglase lag, nach 8 Minuten in die positive über.

D. Übergiessen zahlreicher kleiner Zinkstücke mit Salzsäure.

Übergiesst man in einer Schaale eine Menge kleiner Zinkstücke mit Salzsäure von verschiedener Concentration, so wird je nach den Umständen das Gefäss zuerst positiv, und diese positive Spannung wird bei schwächeren Säuren, z. B. einer mit dem 32fachen Volumen Wasser verdünnten, fortbestehen; bei stärkeren Säuren geht sie aber, ohne einen erheblichen Werth erreicht zu haben, sobald

der Angriff heftig genug wird, um die Flüssigkeit durch Blasenbildung vom Zinke abzustossen, in die negative über, die je nach den vorliegenden Verhältnissen stark anwächst, nach mehreren Minuten wieder abnimmt, und dann sich in eine positive verwandelt, die ebenfalls wieder auf ein Maximum steigt, und darauf wieder geringer wird. Bei Anwendung von starken Säuren, z. B. der concentrirten oder nur mit dem gleichen Volumen Wasser gemischten, fällt öfter auch die erste positive Periode fort; die Schaale erscheint gleich anfangs negativ.

V. Elektrische Vorgänge bei der Entwickelung von Gasen aus Zink und Salpetersäure.

Obwohl bei dem Angriff der Salpetersäure auf Zink anstatt des Wasserstoffs vorzugsweise oder ausschliesslich Stickoxydgas entwickelt wird, so treten doch ganz analoge elektrische Vorgänge ein, wie die zuvor unter Anwendung der Schwefelsäure und Salzsäure beschriebenen.

Lässt man z. B. eine aus gleichem Volumen starker Salpetersäure (sp. Gew. 1,40) und Wasser bestehende Mischung auf eine geneigt gestellte Zinkplatte tropfen, so wird das Zink anfangs negativ; sehr bald aber, schon vor Ablauf einer Minute, geht die negative Spannung in die positive über, die aber auch infolge des Schäumens und der dadurch veranlassten theilweisen Wiedervereinigung der beiden Elektricitäten keinen sehr hohen Werth (+ 3,0) erreicht. Die positive Spannung nimmt rasch ab, und gibt nach 9 Minuten nur noch + 0,6.

Wird die zuvor genannte Säure mit dem 64 fachen Volumen Wasser gemischt, so erfolgt auf der geneigten Zinkplatte kaum ein Angriff; das Zink zeigt nur eine wenig grössere negative Spannung, als beim Auftropfen des reinen Wassers. Die fallenden Tropfen ertheilen der Platinschaale infolge der Berührung und Ableitung positive Spannung.

Wird auf ein Stück Zink, das in einem auf dem Boden der Platinschaale befindlichen Uhrglase liegt, starke oder mit dem gleichen Volumen gemischte Salpetersäure gegossen, so wird die Schaale anfangs stark negativ; aber sehr bald, schon nach ½ Minute, geht

die negative Spannung in die positive über, welche in wenigen Minuten ihr Maximum + 6 bis + 11 erreicht, und dann abnimmt. Die trotz des heftigen Angriffes der Säure nicht sehr grosse Stärke der positiven Spannung findet ihre Erklärung in der durch den Schaum veranlassten Wiedervereinigung der beiden Elektricitäten, weshalb auch bei der concentrirten Säure nur der Werth + 6 erreicht wurde, während bei der mit dem gleichen Volumen Wasser verdünnten die Ladung auf + 11 stieg.

Wendet man eine mit dem doppelten Volumen Wasser gemischte Säure an, so erscheint die Schaale gleich von Anfang an positiv; diese positive Spannung wächst und erreicht nach 5 Minuten ein Maximum + 50, welches dann allmählig abnimmt.

Beim Übergiessen mit einer sehr verdünnten Säure (1 Vol. Säure und 32 Vol. Wasser) erhält die Schaale nur eine sehr geringe positive Spannung.

VI. Elektrische Vorgänge bei der Entwickelung des Wasserstoffs durch die Einwirkung von Säuren auf Eisen.

A. Säuretropfen fallen auf einen gegen den Horizont geneigten Eisenstreifen.

Die genaue Feststellung der elektrischen Vorgänge beim Zusammentreffen der Schwefel- und Salzsäure mit Eisen gelingt weniger gut, als beim Zinke. Es werden die massiven Eisenstücke von diesen Säuren viel schwächer angegriffen, als das Zink. So kann z. B. eine nur mit dem vierfachen Volumen Wasser vermischte Schwefelsäure 20 Minuten lang über ein blankes Eisenstück geflossen sein, ohne dass die Bahn, in welcher die Säure hinabgelaufen ist, merklich eingegraben erscheint. Die braunschwarze Färbung der von der Säure berührten Stellen lässt sich stets noch durch Abreiben mit Schmirgelpapier beseitigen.

Bei der Geringfügigkeit des Angriffes ist es daher erklärlich, dass, wenn eine mit dem 64- oder 32fachen Volumen Wasser verdünnte Schwefelsäure auf einen blanken Eisenstreifen tropft und über denselben hinabfliesst, das Eisenstück nur eine sehr geringe negative Spannung annimmt, die selbst bei der nur mit dem 8- oder 4fachen Volumen Wasser gemischten Säure höchstens auf — 0,8

bis — 0,9 steigt. Selbst bei Anwendung einer nur mit dem gleichen Volumen Wasser gemengten Säure, bei welcher jedoch infolge ihrer Schwerflüssigkeit die Tropfen nicht sehr schnell einander folgten (2 bis 3 in der Secunde), entstand nur eine geringe negative Spannung, die nach einiger Zeit in eine noch schwächere positive überging.

Die unterhalb des Eisenstreifens stehende Platinschaale, in welche die vom Eisen abfallenden Tropfen sich sammelten, zeigte bei den sehr schwachen Säuren in den ersten Minuten eine sehr schwache positive Spannung (+ 0,04 bis + 0,09), welche später in eine etwas stärkere negative überging. Bei Anwendung stärkerer Schwefelsäure wurde die Schaale gleich zu Anfang negativ.

Ähnlich wie gegen Schwefelsäure verhielt sich das blanke Eisen gegen Salzsäure. Fielen die Tropfen einer nur mit dem gleichen Volumen Wasser gemischten Säure auf das blanke Eisen, so entstand auf demselben eine schwache negative Spannung, welche höchstens den Werth 0,6 erreichte.

B. Übergiessen eines Eisenstückes mit Säure.

Wird ein quadratisches blankes Eisenstück von 2,5 cm Seite auf ein in der grossen Platinschaale befindliches Uhrglas gelegt, und mit sehr verdünnter Schwefelsäure übergossen, so findet fast kein Angriff statt, und es lassen sich auch nur geringe Spuren von Elektricität wahrnehmen. Bei Anwendung einer mit dem 4 fachen Volumen Wasser gemischten Säure erschien die Schaale in der ersten Minute sehr schwach negativ, und nahm dann später eine ebenso schwache positive Spannung an. Wurde das Uhrglas vorgezogen, so dass das Eisen die Platinschaale berührte, so zeigte die Schaale die etwas grössere positive Spannung + 0,4.

Wurde anstatt der Schwefelsäure eine mit dem gleichen Volumen Wasser gemischte Salzsäure auf das im Uhrglase liegende Eisenstück gegossen, so entstand zuerst eine positive Spannung + 0,55, die bald in eine sehr schwache negative, und nach mehreren Minuten wieder in eine positive (+ 0,23) überging. Wurde das Uhrglas vorgezogen, so dass das Eisen das Platin berührte, so wurde eine stärkere positive Spannung, die nach einiger Zeit bis + 1,08 stieg,

beobachtet. Die Platinschaale war auf ihrer inneren Fläche mit Gasblasen bedeckt; dieselben lösten sich aber nur sehr sparsam ab.

Ähnlich verhielt sich die concentrirte Salzsäure vom sp. Gew. 1,14. Als das Eisenstück im Uhrglase innerhalb der Platinschaale lag, und diese Säure aufgegossen wurde, betrug die Ladung + 0,32. Dieselbe stieg nach dem Vorziehen des Uhrglases auf + 1,16, nahm jedoch infolge der Verringerung der Gasentwickelung durch die auf dem Platin eintretende Polarisation bald bis + 0,2 ab.

C. Übergiessen von Eisenfeilicht mit Säuren.

Wird etwas Eisenfeilicht in einem Glase oder einer Platinschaale mit kalter verdünnter Schwefelsäure übergossen, so findet fast keine Einwirkung und folglich auch keine Entwickelung von Elektricität statt. Selbst als eine mit dem vierfachen Volumen Wasser gemischte Säure auf das in einem Uhrglase in der Platinschaale liegende Eisenfeilicht wirkte, entstand nur eine positive Spannung + 0,4 *).

Wurde eine mit dem dreifachen Volumen Wasser gemischte, aber auf 70° erhitzte Schwefelsäure auf das Eisenfeilicht gegossen, so gelang es, im Anfange während einiger Secunden eine negative Spannung zu beobachten, die aber rasch in eine positive überging. Letztere wuchs in dem vorliegenden Falle bis + 10, und nahm dann wieder ab.

Wenn das im Uhrglase in der Platinschaale befindliche Eisenfeilicht mit kalter, nur mit dem gleichen Volumen Wasser gemischter Salzsäure übergossen wurde, so zeigte sich anfangs eine positive Spannung + 0,49, die nach 6 Minuten bis + 0,19 abnahm, nach 9 Minuten in eine negative — 4,06, und nach 12 Minuten — 7,58 überging. Diese negative Spannung nahm dann ab, und verwandelte sich wieder in eine schwache positive (+ 0,14).

Wurde das Eisenfeilicht in die Platinschaale selbst geschüttet, und die mit dem gleichen Volumen Wasser vermischte Salzsäure aufgegossen, so entstand zuerst eine Spannung + 6,3, die nach 3 Minuten in eine negative überging; letztere erreichte eine Höhe

*) Alle diese Zahlen geben, wenn nichts weiter dabei bemerkt, ebenso wie früher, die Spannung der in 2 Minuten angesammelten Elektricität.

— 10,4, nahm dann ab, und verwandelte sich zuletzt wieder in eine schwache positive.

Lavoisier und de la Place berichten in ihrer kurzen Notiz, dass, als sie Eisenfeilicht in einem Glase (*bocal*) mit weiter Öffnung mit einer ungefähr durch 3 Theile Wasser verdünnten Schwefelsäure (*acide vitrolique*) übergossen, unter Eintritt einer heftigen Gasentwickelung der mit dem Inhalte des Gefässes in leitender Verbindung stehende Condensator so stark geladen wurde, dass sie einen lebhaften Funken daraus erhalten konnten; sie erkannten die elektrische Ladung als negativ*).

Bei Wiederholung dieses Versuches, unter Anwendung einer Mischung aus 1 Volumen concentrirter Schwefelsäure und 3 Volumen Wasser, wird man, wenigstens wenn man nur kleine Mengen Eisenfeilicht und Schwefelsäure anwendet, den Inhalt des Glases wohl meistens positiv elektrisch finden. Wird der Versuch mit grösseren Mengen und mit einer durch die Mischung noch heissen Säure ausgeführt, so kann, wie die zuvor bei Anwendung heisser Schwefelsäure gemachte Beobachtung zeigt, infolge der grossen Heftigkeit des Angriffes das Gefäss auch negativ elektrisch werden.

Diese negative Ladung trat z. B. auch auf, als ich die Entwickelung des Wasserstoffs aus Eisenfeilicht und Schwefelsäure nach dem von Volta befolgten Verfahren bewirkte. Volta**) nahm nämlich 1 bis 4 Gefässe, brachte in dieselben Eisenfeilicht und Wasser, und goss Vitriolöl hinzu. Die Gefässe waren mit dem Condensator verbunden. Als die heftige Entwickelung nachzulassen begann, wurde die Ladung des Condensators untersucht und negativ gefunden.

Um den Versuch in analoger Weise zu wiederholen, wurde in die grosse Platinschaale etwas Eisenfeilicht geschüttet, zuerst 75 ccm Wasser aufgegossen und dann 25 ccm concentrirte Schwefelsäure zugesetzt. Jetzt zeigte das Elektrometer starke negative Spannung. Die später eintretende positive konnte nicht beobachtet werden, weil der Versuch wegen des Überfliessens der Masse über den Rand der Schaale unterbrochen werden musste. Als der Versuch, um diesen letzten Übelstand zu vermeiden, mit geringeren Mengen wiederholt wurde, trat meistens nur positive Elektricität in der Schaale auf.

*) *Histoire de l'Acad. royale des Sciences. Année* 1781. S. 293.

**) *Collez. dell' opere.* T. I. S. 271.

VII. Elektrische Vorgänge bei der Entwickelung der Kohlensäure aus Kreide und Marmor.

Als Lavoisier und de la Place gepulverte Kreide mit verdünnter Schwefelsäure übergossen, fanden sie das Gefäss negativ elektrisch, aber schwächer als beim Übergiessen des Eisenfeilichts.

Um den Angriff der Säure regelmässiger zu gestalten, habe ich bei den folgenden Versuchen nicht Schwefelsäure, sondern Salzsäure angewandt.

A. Entwickelung der Kohlensäure aus Kreide und Salzsäure.

a. *Salzsäure tropft auf ein Kreidestück.*

Ein durch Sägen passend geformtes längeres Kreidestück wurde mit dem einen Ende in einer isolirt gehaltenen Messingklammer befestigt und, unter 45° gegen den Horizont geneigt, so unterhalb der Spitze des Trichters gestellt, dass die aus derselben herabsinkenden Tropfen in der Nähe seines oberen Endes auffielen. Unterhalb des unteren Endes befand sich die Platinschaale, in welcher sich die von diesem Ende abfallenden Tropfen sammelten. Um die Elektricität der Kreide und der über dieselbe hinfliessenden Säure zu erhalten, wurde ein isolirter Platindraht mit seinem einen Ende auf die Stelle der Kreide gelegt, wo die Säuretropfen auffielen, während sein anderes Ende mit dem Elektrometer verbunden war.

Wenn selbst nur eine sehr verdünnte Salzsäure auf die Kreide tropft, so zeigt das Elektrometer eine erhebliche negative Ladung der Kreide und der über sie hinfliessenden Säure an; mit der Concentration wächst diese Ladung. Die in die Platinschaale fallenden Tropfen ertheilen dieser ebenfalls negative Elektricität, die mit der Concentration der Säure zunimmt, jedoch geschwächt wird, wenn an dem unteren Ende des Kreidestückes sich ein Schaumanhang bildet, so dass die Tropfen nicht vom Kreidestücke, sondern von diesem Schaumanhange abfallen. Durch diesen Umstand erhält (S. 623) die in ihnen vorhandene negative Elektricität Gelegenheit zur Ausgleichung.

Es wird genügen, nur zwei Versuche anzuführen. *P* bedeutet den auf das Kreidestück gelegten Platindraht.

Mit dem 32 fachen Volumen Wasser verdünnte Salzsäure.

Isolirt und mit *E* verbunden.	Zur Erde abgeleitet.	In 2 Minuten angesammelte Spannungen.	
P	*S*	— 5,15	
P	*S*	— 5,80	
S	*P*		— 3,15
P	*S*	— 5,00	
S	*P*		— 3,80.

Mit dem 8 fachen Volumen Wasser verdünnte Salzsäure.

Isolirt und mit *E* verbunden.	Zur Erde abgeleitet.	In 2 Minuten angesammelte Spannungen.	
P	*S*	— 7,4	
S	*P*		— 16,8
P	*S*	— 14,2	
S	*P*		— 4,5

Die Abnahme der negativen Ladung der Platinschaale bei der letzten Messung ist also eine Folge des gebildeten Schaumanhanges am unteren Ende; dieselbe nahm sehr bald noch weiter ab. Bei Anwendung einer mit dem 4 fachen Volumen Wasser verdünnten Säure wurde dieser Schaumanhang noch beträchtlicher, und die von ihm abfallenden Tropfen ertheilten der Platinschaale in 2 Minuten nur eine elektrische Spannung — 0,5.

Analoge elektrische Vorgänge wurden beobachtet, als das Kreidestück horizontal unter der Spitze des Trichters aufgestellt war.

Ebenso wie der Wasserstoff, wenn er direct am Zink sich entwickelt, nimmt also auch die Kohlensäure die positive Elektricität mit fort, so dass die Säure mit negativer Ladung zurückbleibt.

b. *Übergiessen von Kreidestücken mit Salzsäure.*

Wird ein in der Platinschaale liegendes Kreidestück mit Salzsäure übergossen, so nimmt die Schaale stets negative Elektricität an. Bei einer mit dem 32 fachen Volumen Wasser verdünnten Säure ist dieselbe nur gering, steigert sich aber mit der Concentration der Säure, erreicht bei einer ungefähr mit dem 2 fachen Volumen Wasser gemischten ein Maximum und nimmt dann wieder ab. Der Grund für diese letztere Abnahme liegt in der starken Schaumbildung; bei dem Durchgange durch die aufgehäuften Blasen hat ein Theil der vom

Gase aufgenommenen positiven Polarität Gelegenheit sich mit der negativen zu verbinden, so dass also die Schaale nur in geringer Stärke negativ erscheinen kann.

B. Entwickelung der Kohlensäure aus Marmor und Salzsäure.

a. *Salzsäure tropft auf Marmor.*

Ein Marmorstück von 16 cm Länge, 4 cm Breite und 1,5 cm Dicke wurde in der isolirten Messingklammer in geneigter Lage, ebenso wie zuvor das Kreidestück, unterhalb der Spitze des trichterförmigen Gefässes aufgestellt, so dass die aus dieser Spitze herabfallenden Tropfen nahe an seinem oberen Ende auftrafen. Auf die Stelle, auf welche die Tropfen fielen, war das eine Ende eines Platindrahtes *P* gelegt, dessen anderes Ende mit dem Elektrometer verbunden oder zur Erde abgeleitet werden konnte. Unterhalb des unteren Randes des Marmorstückes stand die Platinschaale zur Aufsammlung der abfallenden Tropfen.

In dem Trichter befindet sich eine mit dem 32 fachen Volumen Wasser verdünnte Salzsäure.

Isolirt und mit *E* verbunden.	Zur Erde abgeleitet.	In 2 Minuten angesammelte Spannungen.
P	*S*	— 1,90
S	*P*	— 2,25
P	*S*	— 1,46
S	*P*	— 2,30
P	*S*	— 1,57
S	*P*	— 3,26
P	*S*	— 1,76

Das Marmorstück und die Säure werden also negativ; ebenso sind aber auch die von dem Marmor abfallenden Tropfen negativ und zwar in beträchtlichem Grade.

Die negative Elektrisirung des Marmors und der auf ihm fliessenden Säure verdankt ihre Entstehung, gerade wie bei den entsprechenden Versuchen mit der Kreide und dem Zinke, der auf der Oberfläche des Marmors eintretenden Zersetzung; die sich entwickelnde Kohlensäure nimmt positive Elektricität an, und die Säure die nega-

tive, welche sich über die benetzte Fläche des Marmors und den Platindraht verbreitet.

Wenn die Elektricität der abfallenden Tropfen in der Platinschaale angesammelt wird, so ist der Marmor und die auf ihm befindliche Säure zur Erde abgeleitet. Abgesehen von der geringen negativen Spannung, welche den an der unteren Kante des Marmors hängenden Tropfen durch diese Ableitung ertheilt wird, muss also die beträchtliche negative Spannung der Platinschaale fast allein durch den am unteren Ende und in seiner Nähe vorgehenden Zersetzungsprocess erzeugt werden. Die Säuretropfen werden infolge des Angriffs auf den Marmor ebenso wie beim Zink (S. 620) negativ. Auch wird die über die unteren Theile der Seitenfläche fliessende Säure trotz der Ableitung nicht ganz entladen, so dass sie am unteren Rande schon in negativem Zustande von einer gewissen Stärke anlangt. Daher erhält die Platinschaale eine starke negative Ladung.

Während bei Anwendung der mit der 32fachen Menge Wasser verdünnten Salzsäure das Marmorstück stets negativ bleibt, ändern sich nun die Vorgänge, wenn auf ein gleiches Marmorstück eine nur mit dem 16- oder dem 8- oder dem 4fachen Volumen Wasser gemischte Säure tropft.

Mit dem 16fachen Volumen Wasser verdünnte Säure.

Isolirt und mit *E* verbunden.	Zur Erde abgeleitet.	In 2 Minuten angesammelte Spannungen.
P	*S*	Anfangs Ausschlag — 1,1, dann Rückgang.
S	*P*	— 0,7
P	*S*	— 0,57
S	*P*	— 14,0
P	*S*	abwechselnd schwach + und —
S	*P*	— 15,0
P	*S*	— 0,95
S	*P*	— 18,6.

Das Marmorstück zeigt also nur geringe Spannung und schwankt öfter zwischen dem positiven und negativen Zustande.

Mit dem 8fachen Volumen Wasser verdünnte Säure.

Isolirt und mit *E* verbunden.	Zur Erde abgeleitet.	In 2 Minuten angesammelte Spannungen.
P	*S*	erst —, dann + 1,54
S	*P*	— 21,6
P	*S*	+ 2,95
S	*P*	— 24,0
P	*S*	+ 3,40
S	*P*	— 28,0.

In diesem Versuche ging die negative Ladung des Marmors schon nach einer Minute in die positive über und verblieb positiv. Die Platinschaale erhielt sehr beträchtliche negative Ladungen; ein Beweis, dass die chemische Zersetzung am unteren Ende sehr lebhaft gewesen. Von diesem unteren Ende senkte sich ein dicker Nebelstreifen abwärts.

Es lässt sich nun aber leicht nachweisen, dass die positive Ladung des Marmors nur durch den an seinem unteren Ende vorhandenen Vorgang hervorgebracht wird. Die über die Seitenfläche des Marmors herabrinnende Säure fliesst auch über die Begrenzungsfläche des unteren Endes und sammelt sich dort, namentlich an dem hinteren Rande, zu grösseren Tropfen. Durch den Angriff auf den Marmor nimmt die Kohlensäure aus dem Marmor die positive Elektricität, während die negative der Salzsäure in die Tropfen übergeht und mit ihnen in die unterhalb befindliche Platinschaale fällt. Die Kohlensäure kann aber an der Stelle, wo sie entstanden, nicht sofort entweichen, und giebt daher einen Theil ihrer Polarität wieder an den Marmor ab. (Vergl. S. 622.) Diese positive Elektricität wirkt nun der durch die Zersetzung auf der Seitenfläche dem Marmor übertragenen negativen entgegen. Bei der 16fach verdünnten Säure bringt sie nur eine beträchtliche Schwächung der negativen hervor, während sie bei der 8fachen die negative dauernd überwindet und den Marmor positiv erscheinen lässt. Begünstigt wird dieser letztere Vorgang noch durch den Umstand, dass bei starken Säuren sich auf der Seitenfläche Chlorcalcium bildet, welches, der Säure beigemengt, das rasche Entweichen der positiven Kohlensäure vermindert (s. S. 656), und dadurch eine Ausgleichung ihrer Polarität mit der negativen der Säure, somit aber eine Schwächung der negativen Ladung des Marmors veranlasst.

Der zuvor erwähnte Nachweis, dass die positive Ladung des Marmors auf diese Weise erfolgt, wird durch folgende Versuche geliefert.

Die Begrenzungsfläche am unteren Ende und ein Theil der an sie stossenden hinteren Seitenfläche wurden mit Siegellack überschmolzen, so dass an dieser Stelle kein wesentlicher Angriff der Säure stattfinden konnte. Bei Anwendung der mit dem 8 fachen Volumen verdünnten Säure erschien jetzt der Marmor negativ.

Isolirt und mit *E* verbunden.	Zur Erde abgeleitet.	In 2 Minuten angesammelte Spannungen.	
P	*S*	— 3,2	
S	*P*		— 10,0
P	*S*	— 1,55	
P	*S*	— 1,35	
S	*P*		— 10,1
P	*S*	— 2,28	
S	*P*		— 9,7
P	*S*	— 2,10	

Als dann über dasselbe Marmorstück eine nur mit dem 4 fachen Volumen Wasser gemischte Säure floss, reichte aber die Siegellackschicht nicht aus; der Marmor wurde positiv. Aber auch bei dieser Säure liess sich die Umkehrung der negativen Ladung des Marmors in eine positive vermeiden; an dem untern Ende eines Marmorstückes wurde auf der vorderen Seitenfläche ein schmaler Querstreifen von 7 mm Breite circa 1 mm tief abgefeilt, und auf diese Stelle das eine Ende eines 5 cm langen Platinbleches mit Siegellack so befestigt, dass die Fläche dieses Bleches mit der vorderen Seitenfläche des Marmorstückes in einer Ebene lag. Die Säure floss daher von dem Marmor auf das Platinblech und fiel erst an dessen unterem Rande ab. Unter Anwendung einer 4 fach verdünnten Säure wurden jetzt folgende Spannungen beobachtet.

Isolirt und mit *E* verbunden.	Zur Erde abgeleitet.	In 2 Minuten angesammelte Spannungen.	
P	*S*	— 6,27	
S	*P*		— 6,25
P	*S*	— 6,85	
S	*P*		— 5,75
P	*S*	— 6,55	

Die von dem unteren Rande des Platinbleches abfliessende Säure ist durch ihr Hingleiten über das 5 cm lange Blech trotz der Ableitung zur Erde noch nicht unelektrisch geworden.

Um die Säuretropfen mit noch schwächerer Elektricität in die Platinschaale gelangen zu lassen, wurde ein längeres Platinblech (von 11 cm Länge) an dem Marmorstücke angebracht, damit die Säure längere Zeit auf demselben verweilte. Bei Anwendung der 4fach verdünnten Säure wurden jetzt folgende Ladungen gemessen:

Isolirt und mit *E* verbunden.	Zur Erde abgeleitet.	In 2 Minuten angesammelte Spannungen.	
P	*S*	— 35,2	
S	*P*		— 3,8
P	*S*	— 27,2	

Unmittelbar nach dem vorstehenden Versuche wurde das Platinblech von dem Marmorstücke entfernt und der Siegellack durch Abfeilen beseitigt. Als das Marmorstück nun ebenfalls der 4fach verdünnten Säure ausgesetzt wurde, fand ich folgende Ladungen:

Isolirt und mit *E* verbunden.	Zur Erde abgeleitet.	In 2 Minuten angesammelte Spannungen.	
P	*S*	+ 2,25	
S	*P*		— 16,40
P	*S*	— 0,03	
S	*P*		— 16,08
P	*S*	— 0,73	
S	*P*		— 15,70
P	*S*	— 2,15	

Der in dieser Versuchsreihe auftretende Wechsel in der Beschaffenheit und Stärke der elektrischen Ladungen des Marmors wird durch die Änderung in dem am unteren Ende desselben vorgehenden Processe hervorgerufen; durch die Auflösung entstehen daselbst Änderungen in der Gestalt und den Anhaftungspunkten der Tropfen, welche wieder auf die Ladung des Marmors Einfluss haben müssen.

Wird die Marmorplatte horizontal gestellt, so zeigt sie beim Auftropfen der mit dem 32- bis 4fachen Vol. Wasser verdünnten Säure während der ersten halben, ganzen oder anderthalben Minuten eine schwache positive Spannung, welche dann nach den bezeichneten Zeiträumen in eine negative übergeht. Die Stärke dieser negativen

Spannung stieg bei der 32fach verdünnten Säure auf — 5, bei der 16fach verdünnten auf — 6, und bei der 8- und 4fach verdünnten auf — 8. Bei einer nur mit dem 2fachen Volumen Wasser vermischten Säure tritt die positive Elektricität anfangs stark auf (+ 8,5), nimmt dann aber ab und schwankt später zwischen schwach positiv und negativ. Ist die Säure mit dem gleichen Volumen Wasser gemischt, so erreicht die positive Spannung zu Anfang einen hohen Werth (+ 24) und nimmt dann ab, jedoch ohne in die negative überzugehen.

b. *Übergiessen von Marmorstücken mit Salzsäure.*

In die Platinschaale wurde ein 2 cm langes und breites und 1,5 cm dickes Marmorstück gelegt, und mit 90 ccm Säure übergossen. Ich gebe im Folgenden die nach einander in jedes Mal 2 Minuten angesammelten elektrischen Ladungen. Die Salzsäure war verdünnt mit Wasser vom

32fachen Volumen:	— 0,16;	+ 0,35;	+ 0,40		
16 » » :	— 0,50;	— 0,27;	— 0,10;	0,00;	+ 0,10
8 » » :	— 0,70;	— 0,40;	— 0,17;	. . . . .;	+ 0,10
4 » » :	— 0,72;	— 0,23;	+ 0,47;	+ 0,40;	+ 0,38
2 » » :	— 1,78;	— 1,15;	+ 0,24;	+ 0,42;	+ 0,54
1 » » :	— 2,26;	— 0,68;	+ 0,58;	+ 0,59	
concentr. Salzsäure:	— 0,27;	+ 0,61;	+ 0,53;	+ 0,40	

Die im Anfange auftretende negative Spannung wächst mit der Stärke der Säure; bei der concentrirten erscheint sie infolge der starken Schaumbildung wieder schwach. Die Abnahme der negativen Spannung erfolgt beim Nachlassen der heftigen Auflösung; die mit positiver Elektricität geladenen Gasblasen verlieren ihre Elektricität mehr oder weniger beim Aufsteigen in der Flüssigkeit.

Die nach der Abnahme und dem Verschwinden der negativen Spannung auftretende positive Elektricität zeigt nur eine geringe Stärke, und zum Theil ist diese positive Spannung eine Folge der durch die vorhergegangene Ableitung zur Erde erzeugten elektrischen Ladung. Ich habe oben (S. 606) nachgewiesen, dass mit Platin in Berührung stehendes und durch die Gasleitung mit der Erde leitend

verbundenes Wasser negativ geladen ist. Wird nun die Platinschaale mit ihrem Inhalte isolirt, und es findet nur eine schwache Gasentwickelung statt, so nehmen die während des Durchganges durch die Flüssigkeit unelektrisch gewordenen Gase von der Flüssigkeitsoberfläche negative Elektricität mit, so dass das Elektrometer einen positiven Ausschlag giebt. Indess übersteigen die zuvor verzeichneten positiven Ladungen, namentlich bei Einwirkung stärkerer Säuren, doch die Werthe, welche oben bei tropfendem Wasser, in welches ein Platindraht tauchte, beobachtet worden; über diesen Zuwachs werden die Versuche im folgenden Abschnitte Aufschluss geben.

Wenn zahlreiche kleine Marmorstücke in der Platinschaale mit Salzsäure von verschiedener Concentration übergossen werden, so entsprechen die Vorgänge den eben beschriebenen, nur tritt die sofort nach dem Übergiessen erscheinende negative Spannung infolge der ausgedehnteren Gasentwickelung stärker auf, ist aber nach 1, höchstens 2 Minuten verschwunden. Wird z. B. eine nur mit dem gleichen Volumen Wasser gemischte Säure angewandt, so geht das Goldblättchen schon in 1 bis 2 Secunden nach der negativen Seite aus dem Gesichtsfelde; wird dasselbe durch Ableitung entladen und wieder isolirt, so bewegt es sich noch einige Male über die Scale hinaus; nach Verlauf von 1 Minute erreicht es nur noch den Werth — 1,2, und erscheint am Ende der zweiten Minute schon schwach positiv.

Die 1 bis 2 Minuten nach dem Aufgiessen der Säure eintretende positive Spannung erreichte überhaupt nur geringe Werthe; z. B. + 0,31 bei der 16fach, + 0,74 bei der 8fach, + 0,96 bei der 2fach verdünnten und + 1,2 bei der nur mit dem gleichen Volumen gemischten Säure. Auch bei der concentrirten Säure stieg die Stärke der Ladung nur auf + 1,3. Jedenfalls sind diese Werthe aber höher, als sie durch die blossen Verhältnisse der Ableitung, wenn wir die Flüssigkeit dem Wasser gleich setzen, erklärt werden können.

VII. Elektricität bei Gasentwickelungen, wenn Marmor, Kreide oder Zink durch Salzsäure, welcher Chlorcalcium, Glycerin oder Zucker zugesetzt worden, übergossen wird.

a. *Marmor.*

Bei den zuvor beschriebenen Versuchen bildet sich durch Auflösen des Marmors in der Säure Chlorcalcium, und es lag daher nahe, in der Beimengung dieses Salzes den Grund der im Verhältniss zu dem blossen Ableitungsverhältnisse etwas erhöhten positiven Ladung zu suchen. Diese Vermuthung erwies sich durch die Versuche als vollständig begründet.

Concentrirte Salzsäure wurde mit dem gleichen Volumen einer starken Chlorcalciumlösung*) gemischt: in 2 Minuten hatte sich eine Ladung + 3,85 angesammelt; nach wieder 2 Minuten + 2,30; nach weiteren 2 Minuten + 1,60.

Zu 40 ccm einer mit dem gleichen Volumen Wasser verdünnten Salzsäure wurden noch 20 ccm der Chlorcalciumlösung zugesetzt: in 2 Minuten hatte sich die Ladung + 3,04 angesammelt; in weiteren 2 Minuten + 2,35.

Darauf wurden 24 ccm der mit gleichem Volumen Wasser verdünnten Säure noch mit 36 ccm der Chlorcalciumlösung versetzt: in 2 Minuten angehäufte Spannung + 2,65.

35 ccm einer mit dem 4fachen Volumen Wasser verdünnten Salzsäure wurden mit 28 ccm der Chlorcalciumlösung gemischt: in 2 Minuten sammelte sich eine Ladung + 2,54 an.

Als 49 ccm dieser Säure mit 14 ccm Chlorcalciumlösung gemischt waren, wurde während der ersten Minute eine Spannung — 0,40 beobachtet; dieselbe ging aber nach Ablauf dieser Minute in positive (+ 2,09) über.

Wurden 54 ccm derselben Säure mit 7 ccm Chlorcalciumlösung gemischt, so trat in der ersten Minute eine Spannung — 5,4 auf. Nach zwei Minuten ging die negative Ladung in eine positive über, die bis + 1,3 stieg.

*) Die Chlorcalciumlösung war durch Auflösen von Marmor in concentrirter Salzsäure hergestellt worden.

Durch den Zusatz der Chlorcalciumlösung wurde jedenfalls die Zähigkeit der Flüssigkeit vermehrt. Ich versuchte daher einen anderen Zusatz, welcher ebenfalls die Beweglichkeit der Säuretheilchen verminderte, das Glycerin.

35 ccm der mit dem 4fachen Volumen Wasser verdünnten Salzsäure wurden mit 28 ccm Glycerin gemischt. Nach einander wurden die in 2 Minuten angesammelten Ladungen beobachtet: + 0,6; + 0,45; + 0,2. Als zu 49 ccm derselben Säure 14 ccm Glycerin zugesetzt waren, ergaben sich folgende Werthe: + 2,95; + 1,90; + 0,99. Wurden zu 54 ccm derselben Säure 7 ccm Glycerin hinzugefügt, so erhielt ich die Ladungen + 3,45; + 1,72. Als schliesslich 59,5 ccm jener Säure mit nur 3,5 ccm Glycerin gemischt waren, erschien im Anfange wieder negative Spannung, die während der ersten Minute bis — 5,4 stieg, dann abnahm und mit dem Beginn der zweiten Minute in die positive überging, welche in 2 Minuten die Ladung + 1,3 ergab.

b. *Kreide.*

Mit Salzsäure übergossene Kreidestücke hatten stets negative Ladungen gegeben. Als nun auf ein Kreidestück eine Mischung aus 40 ccm einer mit dem gleichen Volumen Wasser verdünnten Salzsäure und 20 ccm Chlorcalciumlösung gegossen wurde, entstand nur eine äusserst geringe positive Elektricität + 0,11.

Wurde eine Mischung aus 48 ccm einer mit dem 2fachen Volumen Salzsäure und 12 ccm Chlorcalciumlösung angewandt, so zeigte die Platinschaale zuerst eine schwache positive Ladung + 0,37, die nach 2 Minuten in eine negative überging, welche in den folgenden 2 Minuten bis — 1,25 stieg.

Waren 54 ccm eben dieser Säure mit 6 ccm Chlorcalciumlösung gemischt, so zeigte sich in der ersten Minute nur eine geringe Spur von positiver Spannung; nach 1 Minute war die Ladung schon schwach negativ. Ähnlich verhielt sich eine Mischung aus 95 ccm der letztgenannten Säure und 5 ccm Chlorcalcium. Wurden 100 ccm eben dieser Säure, ohne Zusatz von Chlorcalcium, auf das Kreidestück gegossen, so ging das Goldblättchen schon nach 12 Secunden nach der negativen Seite hin aus dem Gesichtsfelde; die

Spannung war also in diesen wenigen Secunden bereits über — 10,0 gestiegen.

Als darauf 95 ccm dieser Säure mit 5 ccm einer concentrirten Zuckerlösung gemischt wurden, erhielt die Schaale in 2 Minuten eine Ladung von — 3,1. Wurden zu 90 ccm der Säure 10 ccm der Zuckerlösung gesetzt, so war in den ersten zwei Minuten keine Elektricitätsentwickelung wahrzunehmen; später erschien eine äusserst geringe positive Ladung + 0,08.

c. *Zink.*

Wie wir oben (S. 641) gefunden haben, zeigt das im Uhrglase innerhalb der Platinschaale liegende Zink durch Übergiessen mit einer durch das gleiche Volumen Wasser verdünnten Salzsäure sehr kurze Zeit eine schwache positive Ladung, die bald in eine starke negative übergeht.

Ebenso verhielt sich das Zink, als es mit 57,5 ccm dieser Säure, welcher 2,5 ccm Glycerin zugesetzt waren, übergossen wurde. In 15 Secunden entstand eine Spannung + 0,10, welche dann sich sofort in eine sehr starke negative verwandelte.

Wurden zu 55 ccm dieser Säure 5 ccm Glycerin hinzugefügt, so erhielt die Platinschaale positive Elektricität; dieselbe nahm mit der Zeit zu. Als die Schaale vom Ende der 2. bis zum Ende der 8. Minute isolirt gehalten, hatte sich während der 6 Minuten eine Ladung + 10,7 angesammelt. Bei Vermehrung des Glycerinzusatzes blieb die Schaale stets positiv; die Ladung wurde aber infolge des verringerten Angriffes der Säure geringer. Wurden z. B. zu 50 ccm der obigen Säure 10 ccm Glycerin zugesetzt, so erhielt die Platinschaale in den 6 Minuten von der 4. bis zur 10. nur eine Ladung + 4,1.

Ein gleicher Einfluss, wie ihn das Glycerin zeigte, wird sich auch bei den Versuchen, in welchen Zinkstücke mit Schwefelsäure oder Salzsäure übergossen werden, je nach Maassgabe des dabei sich bildenden schwefelsauren Zinkoxydes oder Chlorzinkes geltend machen.

Da Chlorcalcium-, Glycerin- und Zuckerlösung in gleicher Weise die Entstehung der positiven Ladung der Platinschaale begünstigen,

so scheint ihre Einwirkung nur eine Folge der Verminderung der Beweglichkeit der Flüssigkeitstheilchen zu sein. Die bei ihrer Entwicklung und ihrem Aufsteigen einen grösseren Widerstand findenden Gasblasen nehmen ihre Ladung nicht blos auf dem positiven Marmor, sondern auch aus der negativen Säure; bei Vorwalten dieses letzteren Vorganges muss, weil dann die Gase negative Elektricität in grösserer Menge fortführen, die Schaale positiv erscheinen.

SIEBENTER BAND. (XI. Bd.) Mit 5 Tafeln. hoch 4. 1865. brosch. 17 *M.*

P. A. HANSEN, Darlegung der theoretischen Berechnung der in den Mondtafeln angewandten Störungen. Zweite Abhandlung. 1864. 9 *M.*

G. METTENIUS, Ueber die Hymenophyllaceae. Mit 5 Tafeln. 1864. 3 *M* 60 *Pf.*

P. A. HANSEN, Relationen einestheils zwischen Summen und Differenzen und anderntheils zwischen Integralen und Differentialen. 1865. 2 *M.*

W. G. HANKEL, Elektrische Untersuchungen. Sechste Abhandlung: Maassbestimmungen der elektromotorischen Kräfte. Zweiter Theil. 1865. 2 *M* 80 *Pf.*

ACHTER BAND. (XIII. Bd.) Mit 3 Tafeln. hoch 4. 1868. brosch. Preis 24 *M.*

P. A. HANSEN, Geodätische Untersuchungen. 1865. 5 *M* 60 *Pf.*

—— Bestimmung des Längenunterschiedes zwischen den Sternwarten zu Gotha und Leipzig, unter seiner Mitwirkung ausgeführt von Dr. Auwers und Prof. Bruhns im April des Jahres 1865. Mit 1 Figurentafel. 1866. 2 *M* 80 *Pf.*

W. G. HANKEL, Elektrische Untersuchungen. Siebente Abhandlung: Ueber die thermoelektrischen Eigenschaften des Bergkrystalles. Mit 2 Tafeln. 1866. 2 *M* 40 *Pf.*

P. A. HANSEN, Tafeln der Egeria mit Zugrundelegung der in den Abhandlungen der Königl. Sächs. Gesellschaft der Wissenschaften in Leipzig veröffentlichten Störungen dieses Planeten berechnet und mit einleitenden Aufsätzen versehen. 1867. 6 *M* 80 *Pf.*

—— Von der Methode der kleinsten Quadrate im Allgemeinen und in ihrer Anwendung auf die Geodäsie. 1867. 6 *M.*

NEUNTER BAND. (XIV. Bd.) Mit 6 Tafeln. hoch 4. 1871. brosch. Preis 18 *M.*

P. A. HANSEN, Fortgesetzte geodätische Untersuchungen, bestehend in zehn Supplementen zur Abhandlung von der Methode der kleinsten Quadrate im Allgemeinen und in ihrer Anwendung auf die Geodäsie. 1868. 5 *M* 40 *Pf.*

—— Entwickelung eines neuen veränderten Verfahrens zur Ausgleichung eines Dreiecksnetzes mit besonderer Betrachtung des Falles, in welchem gewisse Winkel vorausbestimmte Werthe bekommen sollen. 1869. 3 *M.*

—— Supplement zu der geodätische Untersuchungen benannten Abhandlung, die Reduction der Winkel eines sphäroidischen Dreiecks betr. 1869. 2 *M.*

W. G. HANKEL, Elektrische Untersuchungen. Achte Abhandlung: Ueber die thermoelektrischen Eigenschaften des Topases. Mit 4 Tafeln. 1870. 2 *M* 40 *Pf.*

P. A. HANSEN, Bestimmung der Sonnenparallaxe durch Venusvorübergänge vor der Sonnenscheibe mit besonderer Berücksichtigung des im Jahre 1874 eintreffenden Vorüberganges. Mit zwei Planigloben. 1870. 3 *M.*

G. T. FECHNER, Zur experimentalen Aesthetik. Erster Theil. 1871. 3 *M.*

ZEHNTER BAND. (XV. Bd.) Mit 7 Tafeln. hoch 4. 1874. brosch. Preis 21 *M.*

W. WEBER, Elektrodynamische Maassbestimmungen, insbesondere über das Princip der Erhaltung der Energie. 1871. 1 *M* 60 *Pf.*

P. A. HANSEN, Untersuchung des Weges eines Lichtstrahls durch eine beliebige Anzahl von brechenden sphärischen Oberflächen. 1871. 3 *M* 60 *Pf.*

C. BRUHNS, Bestimmung der Längendifferenz zwischen Leipzig und Wien. 1872. 2 *M.*

W. G. HANKEL, Elektrische Untersuchungen. Neunte Abhandlung: Ueber die thermoelektrischen Eigenschaften des Schwerspathes. Mit 4 Tafeln. 1872. 2 *M.*

—— Elektrische Untersuchungen. Zehnte Abhandlung: Ueber die thermoelektrischen Eigenschaften des Aragonites. Mit 3 Tafeln. 1872. 2 *M.*

C. NEUMANN, Ueber die den Kräften elektrodynamischen Ursprungs zuzuschreibenden Elementargesetze. 1873. 3 *M* 80 *Pf.*

P. A. HANSEN, Von der Bestimmung der Theilungsfehler eines gradlinigen Maassstabes. 1874. 4 *M.*

—— Ueber die Darstellung der graden Aufsteigung und Abweichung des Mondes in Function der Länge in der Bahn und der Knotenlänge. 1874. 1 *M.*

—— Dioptrische Untersuchungen mit Berücksichtigung der Farbenzerstreuung und der Abweichung wegen Kugelgestalt. Zweite Abhandlung. 1874. 2 *M.*

ELFTER BAND. (XVIII. Bd.) Mit 8 Tafeln. hoch 4. 1878. brosch. Preis 21 *M.*

G. T. FECHNER, Ueber den Ausgangswerth der kleinsten Abweichungssumme, dessen Bestimmung, Verwendung und Verallgemeinerung. 1874. 2 *M.*

C. NEUMANN, Ueber das von Weber für die elektrischen Kräfte aufgestellte Gesetz. 1874. 3 *M.*

W. G. HANKEL, Elektrische Untersuchungen. Elfte Abhandlung: Ueber die thermoelektrischen Eigenschaften des Kalkspathes, des Berylles, des Idocrases und des Apophyllites. Mit 3 Tafeln. 1875. 2 *M.*

P. A. HANSEN, Ueber die Störungen der grossen Planeten, insbesondere des Jupiter. 1875. 6 *M.*

W. G. HANKEL, Elektrische Untersuchungen. Zwölfte Abhandlung: Ueber die thermoelektrischen Eigenschaften des Gypses, des Diopsids, des Orthoklases, des Albits und des Periklins. Mit 4 Tafeln. 1875. 2 *M.*

W. SCHEIBNER, Dioptrische Untersuchungen, insbesondere über das Hansen'sche Objectiv. 1876. 3 *M.*

C. NEUMANN, Das Webersche Gesetz bei Zugrundelegung der unitarischen Anschauungsweise. 1876. 1 *M.*

W. WEBER, Elektrodynamische Maassbestimmungen, insbesondere über die Energie der Wechselwirkung. Mit 1 Tafel. 1878. 2 *M.*

ZWÖLFTER BAND. (XX. Bd.) hoch 4. 1883. brosch. Preis 22 *M.*

W. G. HANKEL, Elektrische Untersuchungen. Dreizehnte Abhandlung: Ueber die thermoelektrischen Eigenschaften des Apatits, Brucits, Coelestins, Prehnits, Natroliths, Skolezits, Datoliths und Axinits. Mit 3 Tafeln. 1878. 2 *M.*

W. SCHEIBNER, Zur Reduction elliptischer Integrale in reeller Form. 1879. 5 *M.*

—— Supplement zur Abhandlung über die Reduction elliptischer Integrale in reeller Form. 1880. 1 *M* 50 *Pf.*

W. G. HANKEL, Elektrische Untersuchungen. Vierzehnte Abhandlung: Ueber die photo- und thermoelektrischen Eigenschaften des Flussspathes. Mit 3 Tafeln. 1879. 2 *M.*

C. BRUHNS, Neue Bestimmung der Längendifferenz zwischen der Sternwarte in Leipzig und der neuen Sternwarte auf der Türkenschanze in Wien. 1880. 2 *M* 40 *Pf.*

C. NEUMANN, Ueber die peripolaren Coordinaten. 1880. 1 *M* 50 *Pf.*

—— Die Vertheilung der Elektricität auf einer Kugelcalotte. 1880. 2 *M* 40 *Pf.*

W. G. HANKEL, Elektrische Untersuchungen. Fünfzehnte Abhandlung: Ueber die Aktino- und piezoelektrischen Eigenschaften des Bergkrystalles und ihre Beziehung zu den thermoelektrischen. Mit 4 Tafeln. 1881. 2 *M.*

—— Elektrische Untersuchungen. Sechszehnte Abhandlung. Ueber die thermoelektrischen Eigenschaften des Helvins, Mellits, Pyromorphits, Mimetesits, Phenakits, Pennins, Dioptases, Strontianits, Witherits, Cerussits, Euklases und Titanits. Mit 3 Tafeln. 1882. 2 *M.*

—— Elektrische Untersuchungen. Siebzehnte Abhandlung. Ueber die bei einigen Gasentwickelungen auftretenden Elektricitäten. 1883. 1 *M* 80 *Pf.*

Leipzig, December 1883. **S. Hirzel.**

Druck von Breitkopf & Härtel in Leipzig.